目　录

第一章　亚正常算子和半亚正常算子的初等性质

§1　序和定义

1. 序　单个算子的谱分析始终是泛函分析(包括算子理论)中引人兴趣的、活跃的课题之一. 关于自共轭算子(包括无界的情况)、酉算子以至正常算子的谱分析理论现在已成为泛函分析基础书的重要内容之一. 自五十年代起，许多数学家转而考察更一般的线性算子，有各种理论出现，如推广正常算子谱分解式的谱算子理论(Dunford & Schwartz [1])或广义谱算子理论(Foias [1]).考察接近于自共轭算子的非自共轭算子理论(Бродский, Лившиц[1], Gohberg & Krein[1,2])，接近于酉算子的压缩算子的有关调和分析(Foias & sz Nagy [1])，不变子空间理论(Radjavi & Rosenthal [1])以及本书中所讨论的从某种意义上来说接近于正常算子的亚正常算子、半亚正常算子以及近似正常算子的理论，还有其它一些理论. 这些理论中有些分别是从自共轭算子、酉算子、正常算子的谱分析理论中得到某些启发并在一定的条件下把这些理论加以"推广". 所有这些新的发展都是不平凡的，有必要的，都是提出了新的方法，克服了新的矛盾，取得了新的应用. 当然其应用范围也都受到一定的限制. 而且这些理论全都是开始不久，尚待进一步发展，也期待着新的理论出现.

本书中，我们就从正常算子谱理论为起点来陈述一类算子的谱理论.

2. 亚正常算子的定义　本书中我们用 $\mathscr{H}$ 表示一个复的可折 Hilbert 空间，用 $(\cdot,\cdot)$ 表示其中的内积，用算子这个词表示 $\mathscr{H}$ 中的有界线性算子，用 $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 表示 $\mathscr{H}$ 中算子全体按照通常的代数运算所成的算子代数. 用 I 表示恒等算子，当 $A, B\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$

时，称

$$[A, B]=AB-BA$$

是 A 与 B 的交换子. 称 $[A^*, A]$ 是 A 的自换子或导算子. 简记为 D_A 或 D. 当 $N\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 时，N 是正常算子的充要条件是 N 的导算子为零. 当 $S\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 时，如果 D_S 是半定的(即 $D_S\geqslant 0$ 或 $D_S\leqslant 0$)，就称 S 是半正常 (semi-normal) 算子. 当 $D_S\geqslant 0$ 时，算子 S 称为亚正常(hyponormal) 算子，其全体记为 $HN(\mathscr{H})$ 或 HN. 当 $D_S\leqslant 0$ 时，算子 S 称为协亚正常 (cohyponormal) 算子. 虽然协亚正常算子族仅是亚正常算子的共轭算子族，但在某些理论中例如局部预解式理论 (参看 Clancey [5])，又如定理 2.6，它们之间有很大的差别.

设 $A\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$，作 A 的卡狄生分解 $A=X+iY$，其中

$$X=\frac{1}{2}(A+A^*),\quad Y=\frac{1}{2i}(A-A^*),$$

分别称为 A 的实部和虚部. 设 $z=x+iy$ 是一个复数，x, y 是 z 的实部和虚部. 记

$$A_z=(A-zI),\quad X_x=X-xI,\quad Y_y=Y-yI,$$

那么

$$A_z^*A_z=X_x^2+Y_y^2+i[X, Y] \tag{1.1}$$

$$A_zA_z^*=X_x^2+Y_y^2-i[X, Y]. \tag{1.2}$$

所以

$$D_{A_z}=2i[X, Y] \tag{1.3}$$

它实际上与 z 无关.

3. 半亚正常算子的定义 我们再来考察算子的极分解. 设 $A\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$，作半正定算子

$$|A|_r=(A^*A)^{1/2},\quad |A|_l=(AA^*)^{1/2}.$$

我们再作 $|A|_r\mathscr{H}$ 到 $A\mathscr{H}$ 的映象

$$U:(A^*A)^{1/2}y\rightarrow Ay,$$

这显然是一个等距映象，因此我们把它唯一地延拓成 $\overline{|A|_r\mathscr{H}}$[1] 到

---

1) 这里 $\overline{M}$ 表示集 M 的包 (closure).

$\overline{A\mathscr{H}}$ 上的等距算子，我们这里规定当 $x\perp|A|_r\mathscr{H}$ 时 $Ux=0$，这样 U 成为部分等距算子，它以 $\overline{|A|_r\mathscr{H}}$ 为始域，以 $\overline{A\mathscr{H}}$ 为终域．我们有

$$A=U|A|_r. \tag{1.4}$$

称之为算子 A 的极分解．显然

$$|A|_l^2=AA^*=U|A|_r^2U^*.$$

由于 U 的等距性，当 U^*U 限制在 $\overline{|A|_r\mathscr{H}}$ 上时是恒等算子，所以

$$|A|_l^2=U|A|_rU^*U|A|_rU^*=(U|A|_rU^*)^2,$$

由非负算子开平方根的唯一性知道

$$|A|_l=U|A|_rU^*. \tag{1.5}$$

由此可知 $AU^*U=|A|_lU$．因此当 $x\in\overline{|A|_r\mathscr{H}}$ 时，

$$Ax=|A|_lUx,$$

当 $x\perp\overline{|A|_r\mathscr{H}}$ 时，由规定 $Ux=0$，而另一方面 $|A|_rx=0$，所以

$$Ax=U|A|_rx=0;$$

所以仍然有

$$Ax=|A|_lUx,$$

这样就得到另一种极分解

$$A=|A|_lU. \tag{1.6}$$

又由 (1.4) 可知 U 的值域为 $\overline{A\mathscr{H}}=\overline{|A|_l\mathscr{H}}$，又由于

$$A^*=|A|_rU^*,$$

所以 U 的始域为 $\overline{|A|_r\mathscr{H}}=\overline{A^*\mathscr{H}}$．由于 (1.5) 还可以证明

$$|A|_r=U^*|A|_lU. \tag{1.7}$$

当 $\dim((|A|_r\mathscr{H})^\perp)\leqslant\dim((|A|_l\mathscr{H})^\perp)$ 时，我们可以任意地把 U 延拓成 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}$ 中的等距算子，这时 (1.4) 与 (1.6) 仍然成立．特别当 $\dim((|A|_r\mathscr{H})^\perp)=\dim((|A|_l\mathscr{H})^\perp)$ 时，我们称 A 为等亏维的．当 A 是等亏维时，我们总是把 U 延拓成 $\mathscr{H}$ 中的酉算子．我们注意如果 $A^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$，那么 $A\mathscr{H}=A^*\mathscr{H}=\mathscr{H}$，此时 A 的极分解 $A=U|A|_r$ 中的 U 是酉算子．以后为简单起见记 $|A|_r$ 为 $|A|$．

当

$$Q_A = (A^*A)^{1/2} - (AA^*)^{1/2} \geqslant 0 \tag{1.8}$$

时，称 A 是半亚正常（semi-hyponormal）算子，Q_A 为其极差算子。半亚正常算子全体记为 $SH(\mathscr{H})$ 或 SH. 而当 $Q_{A^*} \geqslant 0$ 时，称 A 为半协亚正常（semi-cohyponornnl）算子.

当 $A \in SH(\mathscr{H})$ 时，由 (1.8) 易知

$$\mathscr{N}(|A|_r)^{1)} \subset \mathscr{N}(|A|_l),$$

所以

$$(|A|_r\mathscr{H})^\perp \subset (|A|_l\mathscr{H})^\perp$$

由此可得

$$\overline{A\mathscr{H}} \subset \overline{A^*\mathscr{H}} \tag{1.9}$$

因此在 A 的极分解 $A = U|A|_r$ 中，可以把 U 任意地延拓成 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}$ 的等距算子. 记 $SHU(\mathscr{H})$ 或 SHU 为 SH 中等亏维算子全体，当 $A \in SHU$ 时，A 的极分解 $A = U|A|_r$ 中，U 总延拓成酉算子.

4. 亚正常算子的半亚正常性 令 $\mathscr{N}$ 为 $\mathscr{H}$ 中正常算子全体，我们有关系

定理 1.1 亚正常算子必是半亚正常的. 因此有

$$\mathscr{N} \subset HN \subset SH.$$

为此我们证明一个引理.

引理 1.2 设 $A, B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$，而且

$$0 \leqslant A \leqslant B \tag{1.10}$$

那么对一切 $\alpha \in [0, 1]$ 成立

$$A^\alpha \leqslant B^\alpha. \tag{1.11}$$

注 这是 Löwner [1] 定理的特殊情况，这里我们避免介绍 Löwner 的较复杂的一般理论. 但当 $\alpha = 1/2$ 时，此证明仍可再化简. 然而 $\alpha \neq 1/2$ 的情况对后面也是有用的.

证 设 $E = \{\alpha | \alpha$ 为实数，从 $B \geqslant A \geqslant 0$ 可推出 $B^\alpha \geqslant A^\alpha\}$.

---

1) 这里 $\mathscr{N}(B)$ 表示 B 的零空间.

易知E是闭集，$0,1\in E$. 下面我们证E是凸集. 这里可设$B\geqslant A\geqslant \varepsilon I>0$，否则可在$A$，$B$分别加上$\varepsilon I$，最后令$\varepsilon\to 0$. 这时$A$，$B$可逆. 若$\alpha,\beta\in E$，今证$(\alpha+\beta)/2\in E$. 由于

$$B^{\alpha}\geqslant A^{\alpha}.$$

因此

$$B^{-\alpha/2}A^{\alpha}B^{-\alpha/2}\leqslant I,$$

从而$\|A^{\alpha/2}B^{-\alpha/2}\|\leqslant 1$，同样有$\|A^{\beta/2}B^{-\beta/2}\|\leqslant 1$. 当$A_1,B_1,B_1^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$时，$\sigma(A_1B_1)=\sigma(B_1A_1)$，所以

$$r_{sp}(A_1B_1)^{1)}=r_{sp}(B_1A_1)\leqslant\|A_1B_1\|\leqslant\|A_1\|\|B_1\|.$$

从而有

$$\begin{aligned}&r_{sp}(B^{-(\alpha+\beta)/4}A^{(\alpha+\beta)/2}B^{-(\alpha+\beta)/4})\\&\quad=r_{sp}(B^{(\alpha-\beta)/4}B^{-(\alpha+\beta)/4}A^{(\alpha+\beta)/2}B^{-(\alpha+\beta)/4}B^{(\beta-\alpha)/4})\\&\quad=r_{sp}(B^{-\beta/2}A^{\beta/2}A^{\alpha/2}B^{-\alpha/2})\leqslant 1.\end{aligned}$$

但$B^{-(\alpha+\beta)/4}A^{(\alpha+\beta)/2}B^{-(\alpha+\beta)/4}$是自共轭的，因此有

$$B^{-(\alpha+\beta)/4}A^{(\alpha+\beta)/2}B^{-(\alpha+\beta)/4}\leqslant I,$$

即有

$$A^{(\alpha+\beta)/2}\leqslant B^{(\alpha+\beta)/2}.$$

即$(\alpha+\beta)/2\in E$. 因此E为联络集，从而$[0,1]\subset E$.

定理 1.1 的证明 设$T\in HN$，那么由定义$D_T\geqslant 0$即得

$$|T|_l^2=TT^*\leqslant T^*T=|T|_r^2$$

由引理1.2，取$\alpha=\frac{1}{2}$即得

$$|T|_l\leqslant|T|_r$$

这就是(1.8).

后面将举例说明$\mathscr{N}\neq HN$，$HN\neq SH$，本书中主要考察HN及SH中算子的谱理论，将充分利用$D_T\geqslant 0$及$Q_T\geqslant 0$.

5. Cayley 变换 我们用L表示 Cayley 变换$Lx=(x+i)(x-i)^{-1}$，它的逆变换为$L^{-1}(e^{i\theta})=i(e^{i\theta}+1)(e^{i\theta}-1)^{-1}$

---

1) 这里$r_{sp}(A)$表示A的谱半径.

对于 $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 中的自共轭算子 A，我们记

$$M(A)=\sup_{\|h\|=1}(Ah,h),\quad m(A)=\inf_{\|h\|=1}(Ah,h).$$

我们可以作 $HN(\mathscr{H})$ 到 $SHU(\mathscr{H})$ 中算子的变换 τ 如下：当 $T=X+iY\in HN(\mathscr{H})$，而且 X, Y 为自共轭算子时，

$$\tau(T)=e^{i\alpha}L(X)(Y-m(Y)I), \tag{1.12}$$

那么 $\tau(T)\in SHU(\mathscr{H})$. 事实上，如果记 $A=\tau(T)$，那么

$$|A|_r=Y-mI,\quad U=e^{i\alpha}L(X).$$

而且

$$\begin{aligned}|A|_r-|A|_l&=|A|_r-U|A|_lU^*\\&=2(X-iI)^{-1}i[X,Y](X+iI)^{-1}\geqslant 0.\end{aligned}$$

后面经常利用上述变换——也称为 Cayley 变换——把亚正常算子和半亚正常算子联系起来.

§2 亚正常算子、半亚正常算子的一些初等性质

1. 关于亚正常算子族和半亚正常算子族的一些经常用的初等性质

(1) 设 $T\in HN$，α,β 为数，则 $\alpha T+\beta I\in HN$.

事实上这由 $D_{\alpha T+\beta I}=|\alpha|^2D_T$ 立即可知.

(2) 设 $T\in SH$ (或 SHU)，α 为数，则 $\alpha T\in SH$ (相应地 SHU).

事实上这由 $|\alpha T|_r=|\alpha||T|_r$, $|\alpha T|_l=|\alpha||T|_l$ 立即可知.

(3) 设 $T\in HN$ (或 SH)，而且 $0\bar{\in}\sigma(T)$ (这里 $\sigma(T)$ 表示 T 的谱)，那么 $T^{-1}\in HN$ (相应地 SH).

证 设 $T=U|T|_r$ 是 T 的极分解，由于 $0\bar{\in}\sigma(T)$，易知 U 是酉算子，这时有

$$T^{-1}=|T|_r^{-1}U^*=U^*|T|_l^{-1},$$

所以

$$|T^{-1}|_r=|T|_l^{-1},\quad |T^{-1}|_l=|T|_r^{-1}.$$

当 $T\in HN$ 时，作 $\phi(t)=t^2$，当 $T\in SH$ 时，作 $\phi(t)=t$. 从而

$$\phi(|T|_l)\leqslant\phi(|T|_r),$$

因此

$$B = \psi(|T|_l)^{1/2}\psi(|T|_r)^{-1/2}$$

是压缩算子．又由于 $\psi(|T^{-1}|_r) = \psi(|T|_l)^{-1}$，$\psi(|T^{-1}|_l) = \psi(|T|_r)^{-1}$，我们得到

$$\begin{aligned}&\psi(|T^{-1}|_r) - \psi(|T^{-1}|_l) \\ &\quad = \psi(|T|_l)^{-1/2}(I - BB^*)\psi(|T|_l)^{-1/2} \geqslant 0,\end{aligned}$$

即 $T^{-1} \in HN$（相应地 SH）．

(4) 设 $T = X + iY \in HN(\mathscr{H})$，则$X$的特征子空间和$Y$的特征子空间都约化 T．

证 我们只须证X的特征子空间 $N_x = \{f | f \in \mathscr{H},\ Xf = xf\}$ 约化 Y．当 $f \in N_x$，即 $Xf = xf$，那么

$$(i[X, Y]f, f) = 0.$$

但由于 $T \in H\mathscr{N}$，从而 $i[X, Y] \geqslant 0$，因此导出

$$i[X, Y]f = 0,$$

从而

$$XYf = YXf = xYf,$$

即 $Yf \in N_x$．从而 N_x 约化 Y．

(5) 设 $T = U|T| \in SH(\mathscr{H})$，那么$U$的特征子空间约化 T．

证 U的特征 λ 或是 0 或是适合$|\lambda| = 1$．当 $|\lambda| = 1$ 时，记 $M_\lambda = \{f | f \in \mathscr{H},\ Uf = \lambda f\}$．这时 M_λ 必落在U的始域 $\overline{T^*\mathscr{H}}$ 中，因而当 $f \in M_\lambda$ 时，$f = U^*Uf = \lambda U^*f$，即 $U^*f = \bar{\lambda}f$．这样由(1.8)知

$$\begin{aligned}(Q_T f, f) &= (|T|_r f, f) - (|T|_r U^*f,\ U^*f) \\ &= (|T|_r f, f) - (|T|_r \bar{\lambda}f, \bar{\lambda}f) = 0\end{aligned}$$

但 $Q_T \geqslant 0$，从而有 $Q_T f = 0$，即有

$$|T|_r f = U|T|_r U^*f = \bar{\lambda}U|T|_r f,$$

所以

$$U|T|_r f = \lambda|T|_r f,$$

因此 $|T|_r f \in M_\lambda$，从而 M_λ 约化 $|T|_r$，因而也约化 T．

当 $\lambda = 0$，$M_0 = \{f | Uf = 0\}$，那么 $M_0 = (T^*\mathscr{H})^\perp = \mathscr{N}(T)$，

因此当 $f\in M_0$ 时，

$$Tf=0,$$

即 M_0 为 T 的不变子空间，又因 $T\in SH$，$M_0\subset\mathcal{N}(|T|_l)$，从而当 $f\in M_0$ 时，

$$T^*f=U^*|T|_lf=0,$$

即 M_0 对 T^* 也不变，因此 M_0 约化 T.

(6) 设 $T=U|T|\in SHU$，U 为酉算子，而且 $\sigma(U)\neq\{z||z|=1\}$，那么 $|T|$ 的特征子空间也约化 U.

证 不妨设 $1\bar{\in}\sigma(U)$，作 U 的 Cayley 变换

$$B=i(U+I)(U-I)^{-1},$$

那么立即可得

$$i[B,|T|]=2(U-I)^{-1}Q_T(U^*-I)^{-1}\geqslant 0.$$

所以 $B+i|T|$ 是亚正常算子，由 (4) 知 $|T|$ 的特征子空间约化 B，从而约化 U.

这儿条件“$\sigma(U)$ 不充满单位圆”不能除去.

例 2.1 令 $C_1=\{e^{i\theta}|\theta$ 为实数$\}$ $\mathfrak{B}_{C_1}$ 为 C_1 中 Borel 集全体所成的 σ 代数，m 为如下的测度

$$dm(e^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}d\theta.$$

$\mathscr{H}$ 为测度空间 $(C_1,\mathfrak{B}_{C_1},m)$ 上平方可积函数全体按通常线性运算及内积

$$(f,g)=\int f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}dm(e^{i\theta})$$

所成的 Hilbert 空间，设 U 为“双向平移算子”，即

$$(Uf)(e^{i\theta})=e^{i\theta}f(e^{i\theta}),\quad f\in\mathscr{H}.$$

设 $\{\lambda_n\}$ 是任意一列正的严格单调增加的有界数列，今定义 $|T|_r$ 如下：

当 $f(e^{i\theta})\sim\sum f_ne^{ni\theta}$ 时，

$$(|T|_rf)(e^{i\theta})\sim\sum\lambda_nf_ne^{ni\theta}.$$

那么 $T=U|T|_r\in SHU$，但 $|T|_r$ 的特征子空间 $\{ce^{in\theta}|c$ 为复数$\}$ (n 为固定的非负整数)并不约化 U.

2. 联合点谱 对算子的卡狄生分解 $T = X+iY$ 我们有等式(1.1)，下面我们给出极分解情况下的一个重要等式:

引理 2.1 设 $T = U|T|_r$ 是 T 的极分解，$Q = |T|_r - |T|_l$，复数 $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$, $|e^{i\theta}| = 1$. 那么

$$T_z^*T_z = (|T|_r - \rho)^2 + \rho(U - e^{i\theta})|T|_r \cdot (U - e^{i\theta})^* + \rho Q. \tag{2.1}$$

此式又等价于对一切 $f \in \mathscr{H}$，成立

$$\|T_z f\|^2 = \|(|T|_r - \rho)f\|^2 + \rho\||T|_r^{1/2}(U - e^{i\theta})^* f\| + \rho(Qf, f). \tag{2.2}$$

证明由计算直接可知.

设 $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$，我们用 $\sigma_p(T)$ 表示 T 的点谱，即全部特征值所成之集. 设 $T = X + iY$ 是 T 的卡狄生分解，令 $\sigma_{jp}(T)$ 表示满足下述条件的复数 $z = x + iy$ (x, y 是实数)的全体:存在 X 与 Y 的公共特征向量 $f \neq 0$ 使

$$Xf = xf, \quad Yf = yf.$$

称 $\sigma_{jp}(T)$ 为 T 的联合点谱. 又 $z \in \sigma_{jp}(T)$ 的充要条件是存在非零向量 f 使

$$Tf = zf, \quad T^*f = \bar{z}f. \tag{2.3}$$

显然有

$$\sigma_{jp}(T) \subset \sigma_p(T),$$

而且当 T 为正常算子时，

$$\sigma_{jp}(T) = \sigma_p(T).$$

引理 2.2 设 $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$，其极分解为 $T = U|T|$，复数 $z = |z|e^{i\theta}$, $|z| > 0$, $|e^{i\theta}| = 1$. 那么 $z \in \sigma_{jp}(T)$ 的充要条件是存在 $f \neq 0$，使

$$Uf = e^{i\theta}f, \quad |T|f = |z|f. \tag{2.4}$$

证 当(2.3)满足时，显然有

$$T^*Tf = |z|^2 f.$$

于是可以对任一多项式 P 有

$$P(T^*T)f = P(|z|^2)f,$$

取多项式 $P(t)$ 在 $[0, \|T\|^2]$ 一致逼近于 $t^{1/2}$，就知道

$$|T|f = |z|f,$$

再由

$$Tf = zf, \quad T = U|T|, \quad |z| \neq 0.$$

立即导出

$$Uf = e^{i\theta}f.$$

即 (2.4) 成立. 反之当 (2.4) 成立时 (2.3) 显然成立.

定理 2.3 设 T 是半亚正常算子，则

$$\sigma_{jp}(T) = \sigma_p(T).$$

证 如果 $\rho e^{i\theta} \in \sigma_p(T)$, $\rho > 0$, θ 为实数，对应 $\rho e^{i\theta}$ 的 T 的特征向量为 $f \neq 0$，即

$$\|(T - \rho e^{i\theta} I)f\| = 0.$$

代入 (2.2) 并且注意由于 $T \in SH$ 而有 $(Qf, f) \geq 0$，立即得到

$$(|T|_r - \rho I)f = 0, \quad |T|_r^{1/2}(U - e^{i\theta})^* f = 0, \quad Qf = 0.$$

因此得到

$$|T|_r f = \rho f, \quad Uf = e^{i\theta}f.$$

即 (2.4) 成立. 从而 $\rho e^{i\theta} \in \sigma_{jp}(T)$.

如果 $0 \in \sigma_p(T)$，那么必有 $f \neq 0$，使 $Tf = 0$，由此可得

$$T^*Tf = 0,$$

从而有

$$|T|_r f = 0.$$

但是 T 为半亚正常的，因而 $(|T|_l f, f) = 0$，即 $|T|_l f = 0$. 因此有

$$T^*f = U^*|T|_l f = 0.$$

所以 $0 \in \sigma_{jp}(T)$. 证毕.

3. 联合近似点谱 设 $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$，我们用 $\sigma_a(T)$ 表示 T 的近似点谱，即满足下述条件的复数 λ 的全体：对于 λ，存在 $\mathscr{H}$ 中一列单位向量 $\{f_n\}$ 使

$$\lim_{n\to\infty} \|(T - \lambda I)f_n\| = 0.$$

显然 $\sigma_p(T) \subset \sigma_a(T)$.

设T的卡狄生分解为 $T = X + iY$. 我们用$\sigma_{ja}(T)$表示满足如下条件的复数 $\lambda = x + iy$(x, y 为实数)全体，存在 $\mathscr{H}$ 中一列单位向量 $\{f_n\}$ 使

$$\lim_{n\to\infty}\|(X - xI)f_n\| = \lim_{n\to\infty}\|(Y - yI)f_n\| = 0.$$

这时称 $\sigma_{ja}(T)$ 是T的联合近似点谱. 显然 $z \in \sigma_{ja}(T)$ 的充要条件是存在一列单位向量 $\{f_n\}$ 使

$$\lim_{n\to\infty}\|(T - zI)f_n\| = \lim_{n\to\infty}\|(T^* - \bar{z}I)f_n\| = 0. \tag{2.5}$$

它显然对一切 $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ 成立

$$\sigma_{ja}(T) \subset \sigma_a(T).$$

易知存在 $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ 使 $\sigma_{ja}(T) \neq \sigma_a(T)$，但对正常算子$T$有

$$\sigma_{ja}(T) = \sigma_a(T) = \sigma(T).$$

引理 2.4 设 $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ 而且T的极分解是 $T = U|T|$. 又设 $\rho > 0$, $|e^{i\theta}| = 1$. 则复数 $\rho e^{i\theta} \in \sigma_{ja}(T)$的充要条件是存在 $\mathscr{H}$ 中一列单位向量 $\{f_n\}$ 使

$$\lim_{n\to\infty}\|(|T| - \rho I)f_n\| = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\|(U - e^{i\theta}I)f_n\| = 0. \tag{2.6}$$

证 条件的必要性是显然的，因为如果 $z = \rho e^{i\theta} \in \sigma_{ja}(T)$，那么必有一列单位向量 $\{f_n\}$ 使 (2.5) 成立，因此由

$$\|T^*Tf_n - \bar{z}zf_n\| \leqslant \|T^*Tf_n - zT^*f_n\| + \|zT^*f_n - z\bar{z}f_n\|,$$

而知

$$\lim_{n\to\infty}\|(|T|^2 - |z|^2I)f_n\| = 0,$$

从而可知

$$\lim_{n\to\infty}\|(|T| - |z|)f_n\| = 0.$$

由上式与 (2.5) 立即可得 (2.6) 中另一式.

反之若 (2.6) 成立，令 P 为 $\mathscr{H}$ 到 $\overline{|T|\mathscr{H}}$ 上的投影，那么由(2.6) 的第一式及 $\rho > 0$ 可知

$$\|(I - P)f_n\| \to 0,$$

因此不妨设 (2.6) 中的 $f_n \in \overline{|T|\mathscr{H}}$，这样一来，由

$$\|(U^* - e^{-i\theta}I)f_n\| = \|U^*(U - e^{i\theta}I)f_n\|$$

和 (2.6) 的第二式可知

$$\|(U^* - e^{-i\theta})f_n\| \to 0,$$

再由

$$\|(T - zI)f_n\| \leqslant \|(|T| - \rho I)f_n\| + \rho\|(U - e^{i\theta}I)f_n\|$$

和

$$\|(T^* - \bar{z}I)f_n\| \leqslant \||T|\| \cdot \|(U^* - e^{-i\theta}I)f_n\| + \|(|T| - \rho I)f_n\|,$$

可知 (2.5) 成立. 证毕.

定理 2.5 设 T 是半亚正常算子,则

$$\sigma_{ja}(T) = \sigma_a(T).$$

证 设 $\rho_0 \geqslant 0$, $|e^{i\theta_0}| = 1$, 且 $\rho_0 e^{i\theta_0} \in \sigma_a(T)$, 那么存在 $\mathscr{H}$ 中一列单位向量 $\{f_n\}$ 使

$$\lim_{n\to\infty} \|(T - \rho_0 e^{i\theta_0}I)f_n\| = 0.$$

如果 $\rho_0 = 0$, 那么

$$\lim_{n\to\infty}\||T|f_n\| = \lim_{n\to\infty}\|Tf_n\| = 0,$$

由于 $(U|T|U^*f_n, f_n) \leqslant (|T|f_n, f_n)$, 所以

$$\||T|U^*f_n\|^2 \leqslant \|T\|(|T|U^*f_n, U^*f_n) \leqslant \|T\|(|T|f_n, f_n).$$

即得

$$\lim_{n\to\infty}\|T^*f_n\| = 0.$$

所以 $0 \in \sigma_{ja}(T)$. 如果 $\rho_0 > 0$, 由 (2.2)

$$\|(|T|_r - \rho_0 I)f_n\| \to 0, \quad \||T|_r^{1/2}(U - e^{i\theta})^*f_n\| \to 0,$$
$$\|Qf_n\| \to 0.$$

再由

$$\|\rho_0 Uf_n - e^{i\theta_0}\rho_0 f_n\| \leqslant \|\rho_0 Uf_n - U|T|f_n\| + \|U|T|f_n - \rho_0 e^{i\theta_0}f_n\| \leqslant \|(|T| - \rho_0 I)f_n\| + \|(T - \rho_0 e^{i\theta_0}I)f_n\|,$$

立即有

$$\|(U - e^{i\theta_0})f_n\| \to 0,$$

即 $\rho_0 e^{i\theta_0} \in \sigma_{ja}(T)$. 证毕.

我们注意当 T 是协亚正常算子或协半亚正常算子时，一般来说等式 $\sigma_{ja}(T) = \sigma_a(T)$ 是不成立的.

例 2.2 我们考察单位圆周 C_1 上的 Hardy 空间 $H^2(C_1)$，它是形如

$$f(e^{i\theta}) \sim \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{in\theta}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^2 < \infty$$

的 Fourier 级数全体，按通常的线性运算及内积

$$(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \bar{g}_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}d\theta$$

所成的 Hilbert 空间. 我们作算子 T 如下：当

$$f(e^{i\theta}) \sim \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{in\theta}$$

时，

$$(Tf)(e^{i\theta}) = (f(e^{i\theta}) - f(0))e^{-i\theta} \sim \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{(n-1)i\theta}.$$

这时 T^* 是所谓的单向平移算子，即

$$(T^*f)(e^{i\theta}) = e^{i\theta}f(e^{i\theta}).$$

由于

$$(T^*T - TT^*)f = -f(0),$$

所以 T 是协亚正常算子. 我们注意对算子 T，成立

$$\sigma(T) = \sigma_a(T) = \{z \mid |z| \leq 1\}.$$

事实上，当 $|z| < 1$ 时，函数

$$f(e^{i\theta}) = \frac{c}{1 - ze^{i\theta}}$$

为算子 T 的相应于 z 的特征向量，从而

$$\{z \mid |z| < 1\} \subset \sigma_p(T).$$

而 $\{z \mid |z| = 1\}$ 是 $\sigma(T)$ 的境界，所以含在 $\sigma_a(T)$ 中. 但是我们

注意 $\{z \mid |z| < 1\}$ 与 $\sigma_{ja}(T)$ 不可能有公共点. 事实上若 $|z| < 1$ 且 $z \in \sigma_{ja}(T)$, 则 $\bar{z} \in \sigma_{ja}(T^*)$, 然而因此有 $H^2(C_1)$ 中单位向量列 $\{f_n\}$, 使

$$\lim_{n \to \infty} \|(T^* - \bar{z}I)f_n\| = 0.$$

由于 $\|T^* f_n\| = \|f_n\| = 1$, 所以

$$\|(T^* - \bar{z}I)f_n\| \geqslant (1 - |z|) > 0.$$

这和 $\|(T^* - \bar{z}I)f_n\| \to 0$ 矛盾, 从而

$$\sigma_{ja}(T) \cap \{z \mid |z| < 1\} = \varnothing,$$

即 $\sigma_{ja}(T) \neq \sigma_a(T)$.

对任一复数集 M, 令 $M^* = \{\bar{z} \mid z \in M\}$. 显然对任一 $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, 由 (2.5) 有

$$\sigma_{ja}(T) = \sigma_{ja}(T^*)^* \subset \sigma_a(T^*)^*.$$

定理 2.6 设 T 是半亚正常算子, 则

$$\sigma(T) = \sigma_a(T^*)^*. \tag{2.7}$$

证 对任何 $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, 有

$$\sigma(T) = \sigma_a(T) \cup \sigma_p(T^*)^*. \tag{2.8}$$

事实上, 显然有

$$\sigma_a(T) \cup \sigma_p(T^*)^* \subset \sigma(T),$$

反之若 $z \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)$, 则存在 $a > 0$ 使

$$\|(T - zI)f\| \geqslant a\|f\|, \quad f \in \mathscr{H}.$$

从而 $(T - zI)\mathscr{H}$ 是闭的; 由于 $z \in \sigma(T)$, $(T - zI)\mathscr{H}$ 必然不等于 $\mathscr{H}$, 所以 $(T^* - \bar{z}I)$ 的零空间不是 $\{0\}$, 即 $\bar{z} \in \sigma_p(T^*)$. 因此 (2.8) 成立.

由定理 2.5, $\sigma_a(T) = \sigma_{ja}(T) \subset \sigma_a(T^*)^*$, 又由 $\sigma_p(T^*) \subset \sigma_a(T^*)$, 我们得到 $\sigma(T) \subset \sigma_a(T^*)^*$. 反面包含关系是显然的. 证毕.

4. Berberian 技巧 处理近似点谱还可以用下面的 Berberian 技巧把它化成点谱, 这样有时比较方便. 我们只是简单的介绍一下这个技巧.

引理 2.7 设 $\mathscr{H}$ 是复的 Hilbert 空间, 则存在 Hilbert 空间 $\mathfrak{R} \supset \mathscr{H}$, 和映照 $\pi: \mathscr{L}(\mathscr{H}) \to \mathscr{L}(\mathfrak{R})$ 使

(1) π 是 * 代数同构、等距映照而且是保序的[1].

(2) $\sigma(T)=\sigma(\pi(T)),\sigma_a(T)=\sigma_a(\pi(T))=\sigma_p(\pi(T))$.

证 令 m 表示有界复数列全体按通常线性运算和范数所成的 Banach 空间. 由 Hahn-Banach 定理可知，在 m 中定义了一个 Banach 极限 L.i.m. 满足如下的条件：当 $\{x_n\}\in m$ 时

(1) L.i.m. $(\cdot)$ 是 m 上的线性有界泛函，

(2) L.i.m. $(\{x_n\})=$ L. i. m. $(\{x_{n+1}\})$

(3) 当 $\{x_n\}$ 是实数列时，$\varliminf_{n\to\infty} x_n\leqslant$ L. i. m. $(\{x_n\})\leqslant\varlimsup_{n\to\infty} x_n$.

现在我们作一个新的线性空间

$$\mathfrak{M}=\{\{x_1,x_2,\cdots\}\mid x_n\in\mathscr{H},\quad \sup_n\|x_n\|<\infty\}.$$

并按通常的点列的线性运算来规定 $\mathfrak{M}$ 中的线性运算. 在 $\mathfrak{M}$ 中我们定义一个"半内积"

$$(\{x_n\},\{y_n\})=\text{L. i. m.}(\{(x_n,y_n)\}).$$

它满足内积的一切条件，除去能当 $(\{x_n\},\{x_n\})=0$ 时有 $\{x_n\}\neq\{0\}$. 我们作 $\mathfrak{M}$ 的线性子空间

$$\mathfrak{N}=\{\{x_n\}\mid x_n\in\mathscr{H},\quad \text{L. i. m}\{\|x_n\|^2\}=0\}.$$

再作商空间 $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$. 当 $x,y\in\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$，而 $\{x_n\},\{x_n'\}\in x$，$\{y_n\},\{y_n'\}\in y$ 时，

$$(\{x_n\},\{y_n\})=(\{x_n'\},\{y_n'\}).$$

因此可定义上面共同值作为 (x,y). 这样的 (x,y) 是 $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ 上的内积，再将 $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ 按此内积完备化成为 Hilbert 空间 $\mathfrak{K}$. 我们把 $\mathscr{H}$ 中元 x 与 $\mathfrak{K}$ 中的向量

$$\{x,x,x,\cdots\}$$

---

1) 所谓 * 代数同构是指当 $A,B\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$，$\alpha,\beta$ 是数时，

$$\pi(A^*)=[\pi(A)]^*,\quad \pi(I)=I,$$

$$\pi(\alpha A+\beta B)=\alpha\pi(A)+\beta\pi(B),\quad \pi(AB)=\pi(A)\pi(B).$$

而且当 $\pi(A)=0$ 时必有 $A=0$. 所谓等距映照是指

$$\|\pi(T)\|=\|T\|,$$

所谓保序是指当 $A\leqslant B$ 时，

$$\pi(A)\leqslant\pi(B).$$

一致化(它们的线性运算与内积都一致)，这样就使 $\mathscr{H}$ 成为 $\mathfrak{N}$ 的一个子空间了.

下面我们来构造映照 π. 设 $T\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$，作 $\mathfrak{M}$ 上算子

$$\tilde{T}(\{x_n\})=\{Tx_n\},$$

由于 $\|Tx_n\|\leqslant\|T\|\|x_n\|$，所以 $\{Tx_n\}\in\mathfrak{M}$，而且

$$\|\tilde{T}\{x_n\}\|\leqslant\|T\|\|\{x_n\}\|.$$

我们得到

$$\tilde{T}\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M},\quad \tilde{T}\mathfrak{N}\subset\mathfrak{N},$$

这样可以把 $\tilde{T}$ 的意义改成 $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}\to\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ 的线性算子，而且有界的

$$\|\tilde{T}\|\leqslant\|T\|.$$

因此 $\tilde{T}$ 又可以唯一地延拓成为 $\mathfrak{R}$ 上线性有界算子 $\pi(T)$，我们有 $\|\pi(T)\|\leqslant\|T\|$，但 $\pi(T)$ 是 T 的延拓，因此有

$$\|\pi(T)\|=\|T\|.$$

这个对应显然是代数同构，且当 $T\geqslant 0$ 时，由 L.i.m. 的性质(3)可知

$$(\tilde{T}\{x_n\},\{x_n\})=\text{L. i. m.}\{(Tx_n,x_n)\}\geqslant 0,$$

从而 $\pi(T)\geqslant 0$，所以 π 是保序的.

现在再证明 π 满足条件(2). 由于 $\lambda\in\rho(T)$ 等价于存在正数 ε 使

$$(T-\lambda I)^*(T-\lambda I)\geqslant\varepsilon I,\quad (T-\lambda I)(T-\lambda I)^*\geqslant\varepsilon I.$$

由于 π 具有性质(1)，这也等价于上两式对 T 与 $\pi(T)$ 同时成立或不成立，因此

$$\rho(T)=\rho(\pi(T)),$$

所以

$$\sigma(T)=\sigma(\pi(T)).$$

再由于 $\lambda\in\sigma_a(T)$ 的充要条件是存在 $\mathscr{H}$ 中单位向量列 $\{x_n\}$ 使

$$\|(T-\lambda I)x_n\|\to 0,$$

这就等价于存在 $\{x_n\}\in\mathfrak{M}$，$\|\{x_n\}\|=1$ 使

$$\tilde{T}\{x_n\}-\lambda\{x_n\}\in\mathfrak{N},$$

即有 $x \in \mathfrak{R}$，$\|x\| = 1$ 使

$$\pi(T)x = \lambda x,$$

也就是等价于 $\lambda \in \sigma_p(\pi(T))$，即

$$\sigma_a(T) = \sigma_p(\pi(T)).$$

另一方面，当 $\lambda \in \sigma(T)$ 时，$\lambda \bar{\in} \sigma_a(T)$的充要条件是存在正数 $\varepsilon > 0$ 使

$$(T - \lambda I)^*(T - \lambda I) \geqslant \varepsilon I,$$

这就等价于

$$(\pi(T) - \lambda I)^*(\pi(T) - \lambda I) \geqslant \varepsilon I,$$

即 $\lambda \bar{\in} \sigma_a(\pi(T))$. 因此

$$\sigma_a(T) = \sigma_a(\pi(T)).$$

因此条件 π 满足 (2). 证毕.

由 π 满足条件 (1) 可知 $T \in SH(\mathscr{H})$ 的充要条件是 $\pi(T) \in SH(\mathfrak{R})$，利用引理 2.7，可以由本节第 2 段的结果推出第 3 段的相应的结果. 例如要证 $\sigma_{ja}(T) = \sigma_a(T)$，只要利用引理 2.7 得到

$$\sigma_{jp}(\pi(T)) = \sigma_{ja}(T), \quad \sigma_p(\pi(T)) = \sigma_a(T),$$

再利用定理 2.3，$\sigma_{jp}(\pi(T)) = \sigma_p(\pi(T))$，即得定理 2.5.

5. 完全非正常算子 设 $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$，$\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{H}$ 的线性闭子空间，约化 A，即

$$A\mathscr{M} \subset \mathscr{M}, \quad A^*\mathscr{M} \subset \mathscr{M}$$

而且 A 限制在 $\mathscr{M}$ 上时所得的算子 $A|_{\mathscr{M}}$ 是正常的，那么称 $\mathscr{M}$ 为 A 的正常子空间. 如果 A 没有非 $\{0\}$ 的正常子空间，就称 A 是完全非正常的.

引理 2.8 设 $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$，那么必有 $\mathscr{H}$ 的线性子空间 $\mathscr{M}$，$\mathscr{N}$ 使

$$\mathscr{H} = \mathscr{M} \oplus \mathscr{N}$$

而 $\mathscr{N}$ 是 A 的正常子空间，A 在 $\mathscr{M}$ 上的限制 $A|_{\mathscr{M}}$ 是完全非正常的.

证 令 $\mathfrak{F}$ 为 A 的正常子空间全体，在 $\mathfrak{F}$ 中规定半序如下，当 $\mathscr{N}_1, \mathscr{N}_2 \in \mathfrak{F}$，而 $\mathscr{N}_1 \subset \mathscr{N}_2$ 时 $\mathscr{N}_1 \prec \mathscr{N}_2$. 若 $\mathfrak{F}_1$ 为 $\mathfrak{F}$ 的全序子集，作子空间

$$\mathscr{N}_0=\overline{\bigcup_{L\in\mathfrak{F}_1} L}.$$

容易看出 $\mathscr{N}_0$ 是 A 的约化子空间. 由于当 $x\in L\in\mathfrak{F}_1$ 时,

$$(A^*A-AA^*)x=0.$$

因此当 $x\in\mathscr{N}_0$ 时上式仍然成立,于是 $\mathscr{N}_0$ 是 A 的正常子空间, 它是 $\mathfrak{F}_1$ 的上界, 所以 $\mathfrak{F}$ 必有极大元 $\mathscr{N}$. 记 $\mathscr{M}=\mathscr{N}^\perp$, 那么 A 在 $\mathscr{M}$ 上的限制必是完全非正常的. 事实上若有 $\{0\}\neq\mathscr{M}_1\subset\mathscr{M}$ 使 $\mathscr{M}_1$ 为 $A|_{\mathscr{M}}$ 的正常子空间, 那么由 $\mathscr{M}$ 约化 A 得知 $\mathscr{M}_1$ 也约化 A, 从而 $\mathscr{M}_1$ 也是 A 的正常子空间. 所以 $\mathscr{M}_1\oplus\mathscr{N}$ 也成为 A 的正常子空间,这和 $\mathscr{N}$ 的极大值矛盾. 所以 $A|_{\mathscr{M}}$ 是完全非正常的. 证毕.

定理 2.9 设 T 是半亚正常的完全非正常算子,那么 T 没有点谱.

证 设 $T=U|T|\in SH$, $\lambda=\rho e^{i\theta}\in\sigma_p(T)$, $\rho\geq 0$, $|e^{i\theta}|=1$. 由定理 2.3 $\sigma_{jp}(T)=\sigma_p(T)$ 得知存在 $f\neq 0$ 使

$$Uf=e^{i\theta}f,\quad |T|f=\rho f.$$

因此,一维向量空间 $\{\lambda f|\lambda$ 为复数$\}$ 是 T 的约化子空间, 而且 T 在这空间上限制是正常的, 这和 T 是完全非正常的假设矛盾. 所以 $\sigma_p(T)=\phi$. 证毕.

§3 谱的同伦性与谱分割

1. 谱的同伦性 我们要进一步证明半亚正常算子、亚正常算子具有正常算子所具有的谱分割性质. 为此我们需要下面的一般的关于谱的同伦性的引理. 这个引理今后还要多次用到.

设 $A\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$, λ 是一复数,如果存在正数 c 使

$$\|(A-\lambda I)x\|\geq c\|x\|,\quad x\in\mathscr{H}$$

(这等价于 $(A-\lambda I)^*(A-\lambda I)\geq c^2I$), 而且 $(A-\lambda I)\mathscr{H}\neq\mathscr{H}$, 那么我们说 λ 属于 A 的剩余谱. 这种 λ 的全体记为 $\sigma_r(A)$. 显然

$$\sigma(A)=\sigma_a(A)\cup\sigma_r(A),\quad \sigma_a(A)\cap\sigma_r(A)=\phi.$$

引理 3.1 设 R 是复平面 $\mathbf{C}$ 的子集，$T(t)$ 是区间 $[0, 1]$ 上的（按算子范数）连续的算子值函数，$\tau_t(t\in[0, 1])$ 是一族 R 到 $\tau_t(R)\subset\mathbf{C}$ 上的一一映照，而且对每个 $z\in R$，$\tau_t(z)$ 是 $t\in[0, 1]$ 的连续函数，又设 τ_0 为恒等映照. 如果对一切 $t\in[0, 1]$ 有

$$\sigma_a(T(t))\cap\tau_t(R)=\tau_t(\sigma_a(T(0))\cap R),\tag{3.1}$$

那么对一切 $t\in[0, 1]$ 也有

$$\sigma_r(T(t))\cap\tau_t(R)=\tau_t(\sigma_r(T(0))\cap R),\tag{3.2}$$

因此

$$\sigma(T(t))\cap\tau_t(R)=\tau_t(\sigma(T(0))\cap R).\tag{3.3}$$

证 对任一

$$\lambda\in\sigma_r(T(0))\cap R,\tag{3.4}$$

作集

$$E_\lambda=\{t\mid t\in[0,1],\tau_s(\lambda)\in\sigma_r(T(s)),\ 0\leqslant s\leqslant t_0\}.$$

今证 $E_\lambda=[0, 1]$. 显然必有 $t_0\in[0, 1]$，使 E_λ 形如 $[0, t_0)$ 或 $[0, t_0]$. 设 $E_\lambda=[0, t_0)$，则

$$\tau_{t_0}(\lambda)\bar{\in}\sigma_r(T(t_0)).$$

但由 (3.4)，

$$\lambda\bar{\in}\sigma_a(T(0))\cap R.$$

因此从 (3.1) 可知

$$\tau_{t_0}(\lambda)\bar{\in}\sigma_a(T(t_0)).$$

所以 $\tau_{t_0}(\lambda)\in\rho(T(t_0))$. 但由 $\tau_t(\lambda)$ 和 $T(t)$ 关于 t 的连续性可知有正数 δ 使得当 $|t-t_0|<\delta$ 时

$$\tau_t(\lambda)\in\rho(T(t)),$$

因此当 $|t-t_0|<\delta$ 时 $\tau_t(\lambda)\bar{\in}\sigma_r(T(t))$，即

$$(t_0-\delta, t_0)\cap E_\lambda=\varnothing,$$

这和 $[0, t_0)=E_\lambda$ 矛盾，所以 $E_\lambda=[0, t_0]$.

今证 $t_0=1$. 这时 $\tau_0(\lambda)\in\sigma_r(T(t_0))$，因此有正数 $\varepsilon>0$，使得当 $x\in\mathscr{H}$ 时，

$$\|(T(t_0)-\tau_{t_0}(\lambda)I)x\|\geqslant\varepsilon\|x\|.\tag{3.5}$$

如果 $t_0<1$，由 $T(t)$ 和 $\tau_t(\lambda)$ 的连续性，必有 $\delta>0$ 使 $t_0+\delta<$

1，而且当 $t\in[t_0, t_0+\delta)$ 时，

$$\|T(t)-T(t_0)\|<\frac{\varepsilon}{6}, \quad |\tau_t(\lambda)-\tau_{t_0}(\lambda)|<\frac{\varepsilon}{6}, \qquad (3.6)$$

因此由 (3.5—6) 可知

$$\|(T(t)-\tau_t(\lambda)I)x\|\geqslant\frac{2}{3}\varepsilon\|x\|,$$

$$x\in\mathscr{H}, \quad t\in[t_0, t_0+\delta). \qquad (3.7)$$

如果 $(T(t)-\tau_t(\lambda)I)\mathscr{H}=\mathscr{H}$，则 $(T(t)-\tau_t(\lambda)I)^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$，而且

$$\|(T(t)-\tau_t(\lambda)I)^{-1}\|\leqslant\frac{3}{2\varepsilon}.$$

再由 (3.6) 导出 $\tau_{t_0}(\lambda)\in\rho(T(t_0))$ 的矛盾．因此 $(T(t)-\tau_t(\lambda)I)\mathscr{H}\neq\mathscr{H}$，即有

$$\tau_t(x)\in\sigma_r(T(t)), \quad t\in[t_0, t_0+\delta).$$

这样一来 $[t_0, t_0+\delta)\subset E_\lambda$，这又矛盾，所以只有 $t_0=1$，即

$$\tau_s(\sigma_r(T(0))\cap R)\subset\sigma_r(T(s))\cap\tau_s(R), \; s\in[0, 1]. \qquad (3.8)$$

如果我们代替 R，$T(t)$ 与 τ_t 为 $\tau_s(R)$，$T(s(1-t))$ 与 $\tau_{s(1-t)}\tau_s^{-1}$，$(t\in[0,1])$，这儿 s 为 $[0, 1]$ 中任一定数，对应 (3.8) 我们有

$$\sigma_r(T(s))\cap\tau_s(R)\subset\tau_s(\sigma_r(T(0))\cap R), \quad s\in[0, 1],$$

所以 (3.2) 成立．证毕．

2. 谱的角状分割 现在我们给出 $SHU(\mathscr{H})$ 中的算子的谱分割性质，设 $T=U|T|$，$\in SHU(\mathscr{H})$，U 的谱分解为

$$U=\int_{C_1}\lambda dE(\lambda),$$

其中 $E(\cdot)$ 为 $(C_1, \mathfrak{B}_{C_1})$ 上的谱测度，$E(C_1)=I$．设 γ 为 C_1 的弧，而且 $E(\gamma)\neq 0$，记

$$\mathscr{H}_\gamma=E(\gamma)\mathscr{H}, \; U_\gamma=U|_{\mathscr{H}_\gamma}, \; T_\gamma=E(\gamma)T|_{\mathscr{H}_\gamma}.$$

这时 T_γ 显然也是半亚正常算子，而且在 $SHU(\mathscr{H}_\gamma)$ 中，以及

$$|T_\gamma|=E(\gamma)|T||_{\mathscr{H}_\gamma}.$$

我们称 T_γ 为 T 的由弧 γ 割出的部分．作角状区域

$$\mathfrak{D}_\gamma = \left\{\lambda \mid \lambda \neq 0, \frac{\lambda}{|\lambda|} \in \gamma\right\}.$$

定理 3.2 设 $T = U|T| \in SHU(\mathscr{H})$，$\gamma$ 为 C_1 的弧，T_γ 为 T 由 γ 割出的部分，那么(a)

$$\sigma_p(T_\gamma)\backslash\{0\} = \sigma_p(T) \cap \mathfrak{D}_\gamma,$$

而且 f 为 T_γ 的相应于特征值 λ 的特征向量的充要条件是 f 为 T 的相应于 λ 的特征向量，同时 $\lambda \in \mathfrak{D}_\gamma$.

(b)
$$\sigma(T_\gamma) \subset \overline{\mathfrak{D}}_\gamma, \tag{3.9}$$

而且当 γ 是开弧时，

$$\sigma_a(T_\gamma) \cap \mathfrak{D}_\gamma = \sigma_a(T) \cap \mathfrak{D}_\gamma, \tag{3.10}$$

$$\sigma_r(T_\gamma) \cap \mathfrak{D}_\gamma = \sigma_r(T) \cap \mathfrak{D}_\gamma. \tag{3.11}$$

因此

$$\sigma(T_\gamma) \cap \mathfrak{D}_\gamma = \sigma(T) \cap \mathfrak{D}_\gamma. \tag{3.12}$$

证 (a) 设 $\lambda \in \sigma_p(T_\gamma)\backslash\{0\}$，$f$ 为 T_γ 的相应于 λ 的特征向量. $f \in \mathscr{H}_\gamma$，记 $\rho = |\lambda|$，$e^{i\theta} = \dfrac{\lambda}{\rho}$，对 T_γ 用定理 2.3 可知

$$|T_\gamma| f = \rho f, \quad U_\gamma f = e^{i\theta} f.$$

因此由 $f \in \mathscr{H}_\gamma$ 知道

$$Uf = e^{i\theta} f.$$

所以 f 是 U 相应于特征值 $e^{i\theta}$ 的特征向量. 但 $f \in E(\gamma)\mathscr{H}$，因此相应于 f 的特征值 $e^{i\theta} \in \gamma$，即 $\lambda \in \mathfrak{D}_\gamma$.

令

$$M_\theta = \{g \mid Ug = e^{i\theta} g\}.$$

由于 $E(\cdot)$ 是 U 的谱测度，所以有

$$M_\theta \subset \mathscr{H}_\gamma.$$

又由 M_θ 约化 T，得知 $Tf \in \mathscr{H}_\gamma$，所以

$$Tf = E(\gamma)Tf = T_\gamma f = \lambda f.$$

即 f 也是 T 相应于特征值 λ 的特征向量.

反之，如果 $\lambda = \rho e^{i\theta} \in \sigma_p(T) \cap \mathfrak{D}_\gamma$，这时 f 为 T 的相应于 λ 的特征值. 同样由定理 2.3 可知

$$Uf = e^{i\theta}f,$$

而 $e^{i\theta} \in \gamma$，从而 $f \in \mathscr{H}_\gamma$，因此

$$T_\gamma f = E(\gamma)Tf = \rho e^{i\theta}E(\gamma)f = \rho e^{i\theta}f,$$

即 $\lambda \in \sigma_p(T_\gamma)\backslash\{0\}$.

(b) 我们作区间 $[0, 1]$ 上算子值函数

$$T(t) = U[t|T| + (1-t)E(\gamma)|T|E(\gamma)], \quad t \in [0,1].$$

它显然是连续的算子值函数，而且每个 $T(t)$ 是半亚正常的，同时

$$|T(t)| = t|T| + (1-t)E(\gamma)|T|E(\gamma).$$

记 $T(t)$ 的极差算子为 $Q(t) = |T(t)| - U|T(t)|U^*$.

任取 $\lambda = \rho e^{i\theta} \in \sigma_a(T(t)) \cap \mathfrak{D}_\gamma$，由定理 2.5，存在 $\mathscr{H}$ 中一列单位向量 $\{f_n\}$，使得

$$\|(T(t) - \rho e^{i\theta}I)f_n\| \to 0 \tag{3.13}$$

和

$$\|(|T(t)|_r - \rho I)f_n\| \to 0, \quad \|(U - e^{i\theta}I)f_n\| \to 0 \tag{3.14}$$

成立，这时显然有

$$(Q(t)f_n, f_n) \to 0.$$

又因 $Q(t) \geqslant 0$，所以

$$\|Q(t)f_n\| \to 0.$$

再由 (3.14) 第二式知

$$\lim_{n\to\infty}\|(I - e^{-i\theta}U)|T(t)|f_n\| = \lim_{n\to\infty}\|Q(t)f_n\| = 0. \tag{3.15}$$

记 $e^{i\theta}$ 与 γ 的端点最短距离为 $\delta > 0$，那么由 U 的谱分解易知

$$\begin{aligned}\|(U - e^{i\theta})f\|^2 &= \int |\lambda - e^{i\theta}|^2 d(E(\lambda)f, f) \\ &\geqslant \delta^2\|(I - E(\gamma))f\|^2.\end{aligned} \tag{3.16}$$

从 (3.14)—(3.16) 可以得到

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\|(I - E(\gamma))|T(t)|f_n\| \\ &= \lim_{n\to\infty}\|(I - E(\gamma))f_n\| = 0.\end{aligned} \tag{3.17}$$

对任何 $t, t' \in [0, 1]$，

$$(T(t') - \lambda I)f_n = (T(t) - \lambda I)f_n$$

$$+(t'-t)U[(I-E(\gamma))|T|f_n$$
$$+E(\gamma)|T|(I-E(\gamma))f_n]. \tag{3.18}$$

当 $t\neq 0$ 时，由 (3.17) 可知

$$\|(I-E(\gamma))|T(t)|f_n\|\to 0. \tag{3.19}$$

当 $t=0$ 时，由不等式

$$\|(I-E(\gamma))|T|f_n\|\leqslant 2\|(|T|-\rho I)f_n\|$$
$$+\rho\|(I-E(\gamma))f_n\|,$$

(3.14) 和 (3.17) 知道 (3.19) 仍然成立，

从而由 (3.17), (3.18) 及 (3.13) 可知

$$\|(T(t')-\lambda I)f_n\|\to 0.$$

即 $\lambda\in\sigma_a(T(t'))\cap\mathfrak{D}_\gamma$. 由于 t, t' 是任意的，因此

$$\sigma_a(T(t))\cap\mathfrak{D}_\gamma=\sigma_a(T(t'))\cap\mathfrak{D}_\gamma,\quad t,t'\in[0,1], \tag{3.20}$$

再由引理 3.1 可知

$$\sigma_r(T(t))\cap\mathfrak{D}_\gamma=\sigma_r(T(t'))\cap\mathfrak{D}_\gamma,\quad t,t'\in[0,1], \tag{3.21}$$
$$\sigma(T(t))\cap\mathfrak{D}_\gamma=\sigma(T(t'))\cap\mathfrak{D}_\gamma,\quad t,t'\in[0,1], \tag{3.22}$$

而 $T(1)=T$, $T(0)=T_\gamma E(\gamma)$. 因此

$$\sigma_a(T(0))\backslash\{0\}=\sigma_a(T_\gamma)\backslash\{0\},$$
$$\sigma_r(T(0))\backslash\{0\}=\sigma_r(T_\gamma)\backslash\{0\}.$$

再由 (3.20)—(3.22) 中取 $t=1$, $t'=0$ 代入即得 (3.10—12).

最后证 $\sigma(T_\gamma)\subset\bar{\mathfrak{D}}_\gamma$. 显然 $\sigma(T_\gamma)$ 的境界点含在 $\sigma_a(T_\gamma)$ 中，如果 $\sigma(T_\gamma)\not\subset\bar{\mathfrak{D}}_\gamma$，那么必有 $\lambda\neq 0$, $\lambda\in\sigma_a(T_\gamma)\backslash\bar{\mathfrak{D}}_\gamma$，所以

$$e^{i\theta}=\frac{\lambda}{|\lambda|}\bar{\in}\bar{\gamma},$$

但另一方面，由 (2.6) 知 $e^{i\theta}\in\sigma(U_\gamma)$，然而

$$\sigma(U_\gamma)\subset\bar{\gamma},$$

这是矛盾的. 因此 $\sigma(T_\gamma)\subset\bar{\mathfrak{D}}_\gamma$. 证毕.

3. 谱的直角分割 对于亚正常算子 T，当它的极分解式 $T=U|T|$ 中 U 为酉算子时，它当然有上一段说的谱的角状分割性质. 然而除此之外，一般的亚正常算子还具下述的谱的直角分割性质.

设 $T=X+iY$ 是 $\mathscr{H}$ 中亚正常算子. 设 X 有谱分解式

$$X = \int x dE(x)$$

任取 x 轴上区间 Δ，令

$$\mathscr{H}_\Delta = E(\Delta)\mathscr{H}, \quad T_\Delta = E(\Delta)T|_{\mathscr{H}_\Delta},$$
$$D_\Delta = \{x + iy | x \in \Delta\},$$

这时算子 T_Δ 也是亚正常的，称它为 T 的由区间 Δ 割出的部分.

定理 3.3 设 $T = X + iY$ 是亚正常算子，Δ 是非空区间，那么 (a)

$$\sigma_p(T_\Delta) = \sigma_p(T) \cap D_\Delta,$$

而且 f 为 T_Δ 的相应于特征值 λ 的特征向量的充要条件是 f 为 T 的相应于 λ 的特征向量，而且 $\lambda \in D_\Delta$. (b)

$$\sigma(T_\Delta) \subset \overline{D}_\Delta, \tag{3.23}$$

而且当 Δ 为开区间时，

$$\sigma_a(T_\Delta) \cap D_\Delta = \sigma_a(T) \cap D_\Delta, \tag{3.24}$$
$$\sigma_r(T_\Delta) \cap D_\Delta = \sigma_r(T) \cap D_\Delta, \tag{3.25}$$
$$\sigma(T_\Delta) \cap D_\Delta = \sigma(T) \cap D_\Delta. \tag{3.26}$$

当把 Y 轴分割，而把 X 换成 Y 时，也有类似的结果，对这些结果的证明都和定理 3.2 的证明相平行，兹略去.

4.相似变换下的谱映照 现在作出引理 3.1 的另一应用. 后面我们要用到相似变换下的谱映照定理（引理 3.4），更一般的变换将在第六章给出. 设 λ 为任一正数，作映照

$$M_\lambda: X + iY \longmapsto \lambda X + iY,$$

其中 $X, Y \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$，而且是自共轭的，又作复平面上的相似变换

$$M_\lambda: \ x + iy \longmapsto \lambda x + iy.$$

引理 3.4 设 $T = X + iY \in HN$（X, Y 是自共轭的），λ 为一正数，则

$$\sigma_a(M_\lambda(T)) = M_\lambda(\sigma_a(T)), \tag{3.27}$$
$$\sigma_r(M_\lambda(T)) = M_\lambda(\sigma_r(T)), \tag{3.28}$$
$$\sigma(M_\lambda(T)) = M_\lambda(\sigma(T)). \tag{3.29}$$

证 我们作

$$T(t)=(\lambda t+(1-t))X+iY,$$
$$\tau_t(x+iy)=(\lambda t+(1-t))x+iy,$$

易知 $T(t)\in HN$，从而 $\sigma_{ja}(T(t))=\sigma_a(T(t))$. 由此易证 (3.27)，再由引理 3.1 即得 (3.28)，(3.29). 证毕.

第二章　记 号 算 子

在第三章中，我们将看到半亚正常算子实质上是一种奇型积分算子——一种零阶的伪微分算子．而在伪微分算子理论中记号算子是一个有力的工具，在非交换算子代数理论中交换的记号算子族也同样是一个有用的工具．此外我们还可看到记号算子的概念与量子力学（或算子摄动理论）中波算子的概念有密切的联系．我们发现用记号算子来研究非正常算子确是有意义的．

§1　记号算子的定义及基本性质

1. 定义及初等性质　设 $T\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$，$\{A(t)|b\leqslant t<\infty\}$ 是一个固定的单参数压缩半群[1)]，iA 是它的母元，即 $A(t)=\exp(iAt)$．（本书中实际上只考察 A 是自共轭的情况）当 $t<0$ 时，记 $A(t)=A(-t)^*$ 如果

$$S_A^{\pm}(T)=S-\lim_{t\to\pm\infty}A(t)TA(-t)$$

存在，则称 $S_A^{\pm}(T)$ 为 T 关于 A 的记号算子．

设 B 为一等距算子，作

$$B^{[n]}=\begin{cases}B^n, & n\geqslant 0,\\ B^{*|n|}, & n<0.\end{cases}$$

如果

$$\mathscr{S}_B^{\pm}(T)=S-\lim_{n\to\mp\infty}B^{[n]}TB^{[-n]}$$

存在，就称 $\mathscr{S}_B^{\pm}(T)$ 为 T 关于 B 的极记号算子．

---

1) $\{A(t)\}$ 是单参数压缩半群，即 $A(t)\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$，$(0\leqslant t<\infty)$ 满足如下条件:
(i) $A(0)=I$，$A(t_1+t_2)=A(t_1)A(t_2)$，$t_1,t_2\in[0,\infty)$，
(ii) 对任何 $x,y\in\mathscr{H}$，$(A(t)x,y)$ 是 $t\in[0,\infty)$ 的可测函数，
(iii) $\|A(t)\|\leqslant 1$，$t\in[0,\infty)$．

在上述两定义中对 $A(\cdot)$ 为压缩算子、B 为等距算子的假定并非必要，但目前常用的情况是在此两假设下.

对于固定的算子 A 或算子 B，我们记

$$S_A^{\pm} = \{T \mid T \in \mathscr{L}(\mathscr{H}),\ S_A^{\pm}(T) \text{ 存在}\},$$
$$\mathscr{S}_B^{\pm} = \{T \mid T \in \mathscr{L}(\mathscr{H}),\ \mathscr{S}_B^{\pm}(T) \text{ 存在}\}.$$

又记 $[T]'$ 是 $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 中与 T 可以交换的算子全体. 显然当 A 是自共轭时 $[A]' \subset S_A^{\pm}$ 而且对于 $T \in [A]'$ 有 $S_A^{\pm}(T) = T$. 又当 B 是酉算子时 $[B]' \subset \mathscr{S}_B^{\pm}$，而且对于 $T \in [B]'$ 有，$\mathscr{S}_B^{\pm}(T) = T$.

我们注意 $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 按通常的代数运算及范数成为 Banach 代数. 我们称 $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 中映照 $T \longmapsto T^*$ 为对合.

引理 1.1 (1) 设 $T \in S_A^+$; 则

$$AS_A^+(T) = S_A^+(T)A^*, \tag{1.1}$$

如 $T \in S_A^-$，那么

$$A^*S_A^-(T) = S_A^-(T)A. \tag{1.2}$$

(2) 设 $T \in \mathscr{S}_B^-$，则

$$B\mathscr{S}_B^-(T)B^* = \mathscr{S}_B^-(T), \tag{1.3}$$

如 $T \in \mathscr{S}_B^-$，那么

$$B^*\mathscr{S}_B^+(T)B = \mathscr{S}_B^+(T)\ . \tag{1.4}$$

证 由于当 $t > 0$, $a > 0$ 时

$$e^{iaA}A(t)TA(-t) = A(t+a)TA(-t-a)e^{iaA^*},$$

令 $t \to +\infty$ 即得

$$e^{iaA}S_A(T) = S_A(T)e^{iaA^*}.$$

两边对 a 求导并令 $a = 0$ 即得 (1.1)，其余的类似，证毕.

定理 1.2 (1) 设 A 为自共轭算子，则映象 $T \longmapsto S_A^{\pm}(T)$ 为 $S_A^{\pm}$ 到 $[A]'$ 中的压缩同态，即对 T, T_1, $T_2 \in S_A^{\pm}$, α, β 为数成立

$$AS_A^{\pm}(T) = S_A^{\pm}(T)A, \quad \|S_A^{\pm}(T)\| \leqslant \|T\|,$$
$$S_A^{\pm}(\alpha T_1 + \beta T_2) = \alpha S_A^{\pm}(T_1) + \beta S_A^{\pm}(T_2),$$
$$S_A^{\pm}(T_1T_2) = S_A^{\pm}(T_1)S_A^{\pm}(T_2).$$

另外 $T \longmapsto S_A^{\pm}(T)$ 是从 $S_A^{\pm} \cap (S_A^{\pm})^*$ 到 $[A]'$ 中并保持对合，即有

$$S_A^{\pm}(T^*) = (S_A^{\pm}(T))^*.$$

(2) 设 B 为酉算子，则 $T \to \mathscr{S}_B^{\pm}(T)$ 是 $\mathscr{S}_B^{\pm}$ 到 $[B]'$ 中的压缩同态，而且在 $\mathscr{S}_B^{\pm} \cap (\mathscr{S}_B^{\pm})^*$ 上保持对合.

证 这些都是显然的. 例如由引理 1.1 的 (1.1) 和 $A = A^*$ 立即可知 $S_A^{\pm}(T) \in [A]'$.

系 1.3 (1) 设 $T = u + iv$, u, v 都是自共轭算子. 如果 $v \in S_u^{\pm}$; 那么 $S_u^{\pm}(v)$ 也是自共轭的，而且 $u + iS_u^{\pm}(v) = S_u^{\pm}(T)$ 是正常的.

(2) 设 $T = U|T|$, U 是酉算子，$|T| \geqslant 0$. 如果 $|T| \in \mathscr{S}_U^{\pm}$; 那么 $\mathscr{S}_U^{\pm}(|T|)$ 是半正定的，

$$|\mathscr{S}_U^{\pm}(T)| = \mathscr{S}_U^{\pm}(|T|),$$

而且 $U\mathscr{S}_U^{\pm}(|T|) = \mathscr{S}_U^{\pm}(T)$ 是正常的.

系 1.3 中的正常的记号算子 $S_U^{\pm}(T)$ 或极记号算子 $\mathscr{S}_U^{\pm}(T)$ 是密切联系着算子 T 的有用工具. 下面我们再来研究在算子演算下记号算子或极记号算子的情况

系 1.4 设 T 是正常算子，$f(\cdot)$ 是 $\sigma(T)$ 上的连续函数，当 A 为自共轭，$T \in S_A^{\pm} \cap (S_A^{\pm})^*$ 时，则 $f(T) \in S_A^{\pm}$，而且

$$f(S_A^{\pm}(T)) = S_A^{\pm}(f(T)). \tag{1.5}$$

又当 B 为酉算子，$T \in \mathscr{S}_B^{\pm} \cap (\mathscr{S}_B^{\pm})^*$，则 $f(T) \in \mathscr{S}_B^{\pm}$，而且

$$f(\mathscr{S}_B^{\pm}(T)) = \mathscr{S}_B^{\pm}(f(T)). \tag{1.6}$$

证 把 $f(\cdot)$ 延拓为圆 $\{|Z| \leqslant \|T\|\}$ 上的连续函数，必有多项式序列 $\{P_n(\cdot, \cdot)\}$，使

$$\max_{|Z| \leqslant \|T\|} |f(Z) - P_n(Z, \bar{Z})| \to 0.$$

所以

$$\|f(T) - P_n(T, T^*)\| \to 0.$$

由于 $\|S_A^{\pm}(T)\| \leqslant \|T\|$，所以

$$\|f(S_A^{\pm}(T)) - P_n(S_A^{\pm}(T), S_A^{\pm}(T)^*)\| \to 0,$$

由于 $T \in S_A^{\pm} \cap (S_A^{\pm})^*$，可知 $P_n(T, T^*) \in S_A^{\pm}$，显然 $S_A^{\pm}$ 是一致闭的，所以 $f(T) \in S_A^{\pm}$. 由于 $T \to S_A^{\pm}(T)$ 是压缩同态，从而

$$\begin{aligned}
&\|S_A^{\pm}(f(T)) - P_n(S_A^{\pm}(T), S_A^{\pm}(T^*))\| \\
&= \|S_A^{\pm}(f(T) - P_n(T, T^*))\| \\
&\leqslant \|f(T) - P_n(T, T^*)\| \to 0.
\end{aligned}$$

这样一来

$$S_A^{\pm}(f(T))=f(S_A^{\pm}(T)).$$

我们注意，一般说来，如果 $\mathfrak{R}$ 是 $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 的对称闭子代数，$\varphi: A\longmapsto\varphi(A)$ 是 $\mathfrak{R}$ 到自身的保持对合的同态映照，那么 φ 也保持顺序. 即当 $A\geqslant B$ 时，$\varphi(A)\geqslant\varphi(B)$.

事实上，若 $A\geqslant 0$, $A\in\mathfrak{R}$, 则存在一列多项式在 $[0, \|A\|]$ 中一致收敛于 $\sqrt{t}$，从而

$$\|P_n(A)-A^{1/2}\|\to 0,$$

但 $P_n(A)\in\mathfrak{R}$, 因此 $A^{1/2}\in\mathfrak{R}$. 由 φ 保持对合同态，从而可知 $\varphi(A^{1/2})\in\mathfrak{R}$, 也是自共轭的，从而

$$\varphi(A)=\varphi(A^{1/2})^2\geqslant 0.$$

同样地当 $A\geqslant B$ 时，$\varphi(A)\geqslant\varphi(B)$. 利用上述事实可以证明如下定理.

定理 1.5 设 A 为自共轭算子，$T\in S_A^{\pm}\cap(S_A^{\pm})^*$ 则

$$\sigma(S_A^{\pm}(T))\subset\sigma(T),\quad \sigma_a(S_A^{\pm}(T))\subset\sigma_a(T).\tag{1.7}$$

设 U 为酉算子，$T\in\mathscr{S}_U^{\pm}\cap(\mathscr{S}_U^{\pm})^*$, 则

$$\sigma(\mathscr{S}_U^{\pm}(T))\subset\sigma(T),\quad \sigma_a(\mathscr{S}_U^{\pm}(T))\subset\sigma_a(T).\tag{1.8}$$

证 设 $\lambda\in\rho(T)$, 那么存在 $\varepsilon>0$, 使

$$(T-\lambda I)^*(T-\lambda I)\geqslant\varepsilon I,$$
$$(T-\lambda I)(T-\lambda I)^*\geqslant\varepsilon I,$$

由于 $T\to S_A^{\pm}(T)$ 是 $S_A^{\pm}\cap(S_A^{\pm})^*$ 上的保持对合的同态，从而有

$$(S_A^{\pm}(T)-\lambda I)^*(S_A^{\pm}(T)-\lambda I)\geqslant\varepsilon I,$$
$$(S_A^{\pm}(T)-\lambda I)(S_A^{\pm}(T)-\lambda I)^*\geqslant\varepsilon I,$$

因此 $\lambda\in\rho(S_A^{\pm}(T))$. 即有 (1.7) 的第一式.

如果 $\lambda\bar{\in}\sigma_a(T)$, 那么存在 $\varepsilon>0$,

$$(T-\lambda I)^*(T-\lambda I)\geqslant\varepsilon I.$$

同上可知

$$(S_A^{\pm}(T)-\lambda I)^*(S_A^{\pm}(T)-\lambda I)\geqslant\varepsilon I,$$

因此 $\lambda\bar{\in}\sigma_a(S_A^{\pm}(T))$, 即有 (1.7) 的第二式，(1.8)也同样地证明. 证毕.

2. 谱的分解性质　现在我们利用定理 1.2 来导出谱的分解性质.

定理 1.6　设 X 和 Y 都是自共轭算子，如果 $Y \in S_X^{\pm}$，那么对每个 $x \in \sigma(X)$，必有 $y \in \sigma(S_X^{\pm}(Y))$，使

$$x + iy \in \sigma_{ja}(X + iY)$$

证　因为 $Y \in S_Y^{\pm}$，记 $Y^+ = S_X^{\mp}(Y)$，从系 1.3 我们知道，$X + iY^+$ 是正常的. 根据正常算子的谱分解性质容易证明存在 $y \in \sigma(Y^+)$ 和单位向量列 $\{g_n\}$ 使

$$\|(X - xI)g_n\| \to 0, \quad \|(Y^+ - yI)g_n\| \to 0. \qquad (1.9)$$

对每个 g_n，有实数 t_n，使

$$\|(e^{it_nX}Ye^{-it_nX} - Y^+)g_n\| < \frac{1}{n} \qquad (1.10)$$

只要取 $f_n = e^{-it_nX}g_n$，立即可知 $\|f_n\| = 1$，而且由 (1.9—10) 知道

$$\lim_{n\to\infty}\|(X - xI)f_n\| = \lim_{n\to\infty}\|(Y - yI)f_n\| = 0,$$

即 $x + iy \in \sigma_{ja}(X + iY)$. 证毕.

同样地，我们有

定理 1.7　设 U 为酉算子，T 为自共轭算子，$T \in \mathscr{S}_U^{\pm}$，那么对每个 $e^{i\theta} \in \sigma(U)$（其中 θ 为实数），存在 $\rho \in \sigma(\mathscr{S}_U^{\pm}(T))$ 以及单位向量列 $\{f_n\}$，使

$$\|(U - e^{i\theta}I)f_n\| \to 0, \quad \|(T - \rho I)f_n\| \to 0,$$

特别当 $T \geqslant 0$ 时，$\rho e^{i\theta} \in \sigma_{ja}(UT)$.

定理 1.6 及定理 1.7 给出算子的谱与其记号算子（或极记号算子）的谱之间的关系.

§2　亚正常算子的记号算子与半亚正常算子的极记号算子

1. Γ 算子的定义及其与记号算子的关系　和记号算子有密切关系的是 Γ 算子. 设 $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ 为一固定的线性算子，而 iA 为单参数压缩算子半群 $A(t)$ 的母元，当 $t < 0$ 时，记

$$A(t) = A(-t)^*,$$

如果 $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ 使

$$\pm \int_0^{\pm\infty} A(t) T A(-t) dt$$

$$= \pm S - \lim_{a \to +\infty} \int_0^{\pm a} A(t) T A(-t) dt$$

存在，那么记它约为 $\Gamma_A^{\pm}(T)$. 称

$$\Gamma_A^{\pm}: T \longmapsto \Gamma_A^{\pm}(T)$$

为 Friedrichs [1] 的 Γ 算子

设 U 为固定的等距算子，如果 $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$，使

$$\sum_{n=0}^{\infty} U^{[\pm n]} T U^{[\mp n]} = S - \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} U^{[\pm n]} T U^{[\mp n]}$$

存在，就记它们为 $\gamma_U^{\mp}(T)$.

定理 2.1 设 $A, T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$，记 $D_+ = i(AT - TA^*)$，$D_- = i(A^*T - TA)$. 那么 $S_A^{\pm}(T)$ 存在的充要条件是 $\Gamma_A^{\pm}(D_{\pm})$ 存在，而且当它们存在时，成立

$$T = S_A^{\pm}(T) \mp \Gamma_A^{\pm}(D_{\pm}). \tag{2.1}$$

证 由于

$$\frac{d}{dt} e^{itA} T e^{-itA^*} = e^{itA}[i(AT - TA^*)] e^{-itA^*},$$

将上式两边乘以 dt，再由 0 积到 $s > 0$，我们得着

$$e^{isA} T e^{-isA^*} - T = \int_0^s e^{itA} D_+ e^{-itA^*} dt. \tag{2.2}$$

再令 $s \to +\infty$，即知 (2.1) 中关于 $S_A^+(T)$ 的等式成立. 对于 $S_A^-(T)$ 的情况也类似地讨论，证毕.

类似地有

定理 2.2 设 B 为等距算子，$T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$，记

$$Q_{\pm} = \pm(B^{[\mp 1]} T B^{[\pm 1]} - T)$$

那么 $\mathscr{S}_B^{\mp}(T)$ 存在的充要条件是 $\gamma_B^{\mp}(Q_{\pm})$ 存在，而且当它们存在时，

$$T = \mathscr{S}_B^{\mp}(T) \mp \gamma_B^{\mp}(Q_{\pm}). \tag{2.3}$$

2. 记号算子存在的充分条件 为了给出记号算子存在的一个充分条件，我们先证明一个引理.

引理 2.3 设 $\{A_n\}$ 是一列下有界的单调下降的有界自共轭算子序列，则 $\{A_n\}$ 必存在强极限，即有自共轭算子 $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ 使

$$A = S - \lim_{n\to\infty} A_n.$$

证 由于 A_n 为下有界的单调下降的自共轭序列，因此有常数 $M > 0$，使 $\|A_n\| \leqslant M$. 这样对每个 $x \in \mathscr{H}$，$\{(A_nx, x)\}$ 是单调减少的有界数列，因此必有 $A(x, x)$ 存在使

$$A(x, x) = \lim_{n\to\infty}(A_nx, x)$$

而且

$$|A(x, x)| \leqslant M\|x\|^2.$$

所以 $A(x, x)$ 是有界实值二次泛函，而且满足平行四边形公式

$$A((x+y), (x+y)) + A((x-y), (x-y)) = 2A(x, x) + 2A(y, y).$$

所以存在有界自共轭算子 $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ 使

$$(Ax, x) = A(x, x).$$

记 $B_n = A_n - A \geqslant 0$，$B_n$ 为一致有界的单调下降正算子序列，且

$$(B_nx, x) \to 0.$$

因此

$$\|B_n^{1/2}x\| \to 0,$$

但 B_n 一致有界，从而

$$\|B_nx\| \to 0,$$

即 A_n 强收敛于 A. 证毕.

现在我们给出记号算子或极记号算子存在并且记号算子与极记号算子相等的一类充分条件.

定理 2.4 设 $A, T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$，$T$ 为自共轭的，A 是耗散的(即 A 的虚部 $\frac{1}{2i}(A - A^*) \geqslant 0$) $D_+ = i(AT - TA^*)$，$D_- = i(A^*T - TA)$. 如果

$$D_+ \geqslant 0, \quad (\text{或 } D_- \geqslant 0) \tag{2.4}$$

那么 $S_A^+(T)$（相应地 $S_A^-(T)$）存在，而且

$$S_A^+(T) \geqslant T, \quad (\text{相应地 } T \geqslant S_A^-(T)). \tag{2.5}$$

若记 $B = (A^* + iI)(A^* - iI)^{-1}$，则 $\mathscr{S}_B^+(T)$（相应地 $\mathscr{S}_B^-(T)$）也存在，而且

$$\mathscr{S}_B^+(T) = S_A^+(T) \quad (\text{相应地 } \mathscr{S}_B^-(T) = S_A^-(T)) \tag{2.6}$$

证 由于 $D_+ \geqslant 0$，可知自共轭算子值函数

$$f(s) = e^{isA}Te^{-isA^*}$$

是单调上升的．设 $T \leqslant MI$，那么

$$f(s) \leqslant Me^{isA}e^{-isA^*},$$

又由于 A 是耗散的，知 $\|e^{isA}\| \leqslant 1$，

$$0 \leqslant e^{isA}e^{-isA^*} \leqslant I.$$

因此 $f(s)$ 是上有界的．由引理 2.3，可知

$$S - \lim_{s\to+\infty} f(s) = S_A^+(T)$$

存在．又由 $f(s)$ 是单调上升的，从而

$$S_A^+(T) \geqslant f(0) = T.$$

可以类似地在 $D_- \geqslant 0$ 的假设下证明 $S_A^-(T)$ 的存在性和不等式 $T \geqslant S_A^-(T)$．

容易知道

$$Q_- = T - BTB^* = 2(A^* - iI)^{-1}D_-(A + iI)^{-1},$$

$$Q_+ = B^*TB - T = 2(A + iI)^{-1}D_+(A^* - iI)^{-1},$$

因此 $Q_\pm \geqslant 0$，类似地可证 $\mathscr{S}_B^\pm(T)$ 存在．

由引理 1.1

$$AS_A^+(T) = S_A^+(T)A^*,$$

可知

$$B^*S_A^+(T)B = S_A^+(T).$$

由 (2.1) 可知

$$B^{*n}TB^n = S_A^+(T) - B^{*n}\Gamma_A^+(D_+)B^n.$$

但 $\Gamma_A^+(D_+) \geqslant 0$，因此在上式中令 $n \to +\infty$ 可导出

$$\mathscr{S}_B^+(T) \leqslant S_A^+(T).$$

类似地由引理 1.1 知

$$B^*\mathscr{S}_B^+(T)B=\mathscr{S}_B^+(T).$$

我们得到

$$A\mathscr{S}_B^+(T)=\mathscr{S}_B^+(T)A^*,$$

因此

$$e^{isA}\mathscr{S}_B^+(T)e^{-isA^*}=\mathscr{S}_B^+(T).$$

从而得到

$$e^{isA}Te^{-isA^*}=\mathscr{S}_B^+(T)-e^{isA}\gamma_B^+(Q_+)e^{-isA^*}.$$

在上式中令 $s\to+\infty$，可得

$$S_A^+(T)\leqslant\mathscr{S}_B^+(T).$$

因此

$$S_A^+(T)=\mathscr{S}_B^+(T).$$

另一式可同样地证明．证毕．

同样地有

定理 2.5 设 $B,T\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$；$T$ 为自共轭的，B 为等距算子，又设 $Q_\pm\geqslant 0$，那么 $\mathscr{S}_B^\pm(T)$ 存在，而且

$$\mathscr{S}_B^+(T)\geqslant T\geqslant\mathscr{S}_B^-(T). \tag{2.7}$$

设 B 为酉算子，而 $e^{i\alpha}$ 为单位圆上一复数，$e^{i\alpha}\notin\sigma(B)$，设 A 为 $e^{-i\alpha}B$ 的逆 Cayley 变换 $A=i(e^{-i\alpha}B+I)(e^{-i\alpha}B-I)^{-1}$，则 $S_A^\pm(T)$ 也存在，而且 (2.6) 成立．

3. 亚正常算子的记号算子 现在我们把上面一般的理论用于讨论亚正常算子的记号算子或半亚正常算子的极记号算子．

定理 2.6 设 $T=X+iY$ 是亚正常算子，那么 $T\in S_X^\pm\cap S_Y^\pm$，而且

$$S_X^-(Y)\leqslant Y\leqslant S_X^+(Y),\quad S_Y^-(X)\leqslant X\leqslant S_Y^+(X), \tag{2.8}$$

设 U,V 分别为 X 和 Y 的 Cayley 变换，则 $T\in\mathscr{S}_U^\pm\cap\mathscr{S}_V^\pm$，而且

$$S_X^\pm(T)=\mathscr{S}_U^\pm(T),\quad S_Y^\pm(T)=\mathscr{S}_V^\pm(T). \tag{2.9}$$

它们都是正常算子，分别与 X 和 Y 可以交换．

证 对自共轭算子 X 和 Y 应用定理 2.4，这时由于

$$D_\pm\geqslant 0,$$

知道

$$Y \in S_X^{\pm} \cap \mathscr{S}_U^{\pm}.$$

而且

$$S_X^-(Y) \leqslant Y \leqslant S_X^+(Y); \quad S_X^{\pm}(Y) = \mathscr{S}_U^{\pm}(Y),$$

由于 $X \in S_X^{\pm} \cap \mathscr{S}_U^{\pm}$，而且

$$S_X^{\pm}(X) = S_U^{\pm}(X) = X$$

我们得到 $T \in S_X^{\pm} \cap \mathscr{S}_U^{\pm}$，而且

$$S_X^{\pm}(T) = \mathscr{S}_U^{\pm}(T).$$

再由系 1.3 知 $S_X^{\pm}(T) = X + iS_X^{\pm}(Y)$ 是正常的. 余下的部分可以同样地证明. 证毕.

系 2.7 在定理 2.6 的假设下，

$$\sigma(S_X^{\pm}(T)) \cup \sigma(S_Y^{\pm}(T)) \subset \sigma_a(T). \tag{2.10}$$

证 由于 $S_X^{\pm}(T)$ 正常，从而 $\sigma(S_X^{\pm}(T)) = \sigma_a(S_X^{\pm}(T))$，而且在定理 2.6 中事实上有 $T \in S_X^{\pm} \cap (S_X^{\pm})^*$，从而由定理 1.5 而知 (2.10) 成立.

定理 2.8 设 $T = U|T|$ 是半亚正常算子，(a) 那么 $\mathscr{S}_U^{\pm}(T)$ 存在，而且

$$\mathscr{S}_U^-(|T|) \leqslant |T| \leqslant \mathscr{S}_U^+(|T|). \tag{2.11}$$

如果 U 是酉算子，那么 $\mathscr{S}_U^{\pm}(T)$ 是正常的. (b) 如果 U 是酉算子，而且 $\sigma(U)$ 不充满单位圆周，那么 $T \in S_{|T|}^{\pm}$. 而且 $S_{|T|}^{\pm}(T)$ 是正常的. 如果 V 是 $|T|$ 的 Cayley 变换，B 是 $e^{-i\alpha}U(e^{i\alpha} \bar{\in} \sigma(U))$ 的逆 Cayley 变换，那么

$$S_B^{\pm}(T) = \mathscr{S}_U^{\pm}(T), \quad S_{|T|}^{\pm}(T) = \mathscr{S}_V^{\pm}(T). \tag{2.12}$$

证 我们只对 (b) 中的一部分"$T \in S_{|T|}^{\pm}$"加以证明. 不妨设 $1 \bar{\in} \sigma(U)$，作

$$B = L^{-1}(U) = i(U + I)(U - I)^{-1},$$

则 $B + i|T| \in HN$，因此由定理 2.6，得到 $B \in S_{|T|}^{\pm}$. 然而由于

$$U = L(B) = (B + i)(B - i)^{-1},$$

由定理 1.2 可知 $U \in S_{|T|}^{\pm}$. 从而 $U|T| \in S_{|T|}^{\pm}$. 证毕.

对半亚正常算子的谱与极记号算子的谱，我们有如下的系.

系 2.9 在定理 2.8 的假设下，

$$\sigma(\mathscr{S}_U^{\natural}(T))\subset\sigma_a(T). \tag{2.13}$$

又在定理 2.8 假设 (b) 下

$$\sigma(S_{|T|}^{\natural}(T))\subset\sigma_a(T). \tag{2.14}$$

证 由于这时 $S_{|T|}^{\natural}(T)$ 和 $\mathscr{S}_U^{\natural}(T)$ 等都是正常算子，它们的谱与近似点谱一致，所以由定理 1.5 而立刻推出 (2.13)，(2.14). 证毕.

现在我们再对记号算子这个概念的来源交代几句. 它的来源深远. Fourier 积分理论中的 Titchmarsh [1] 定理："当 f 为可积时

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{i(x-\omega)t}}{x-i0-\omega}f(x)dx=f(\omega)$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{i(x-\omega)t}}{x+i0-\omega}f(X)dX=0".$$

就启发人们想到记号算子. 对奇异积分算子的 Calkin 代数理论（如参看 Douglas [3], [4]）就实际上引进了记号算子概念. 对于亚正常算子的记号算子概念的来源据张荫南说，他是在读量子力学的 Heisenberg 方程

$$\frac{d}{dt}(e^{iHt}Be^{-iHt})=i[H,e^{iHt}Be^{-iHt}]$$

（其中 H 即为 Hamiltonian, B 为可观察量，H 和 B 都是自共轭算子）时得到启发，发现当 $i[H,B]\geq 0$ 时 $e^{-iHt}Be^{-iHt}$ 是 t 的单调增加函数因而联想到有极限，产生了记号算子的概念.

另一个有可能受到启发的，但稍远一点的来源是谱的摄动和量子力学中的散射理论（例如参见 Kato [3] 的第 10 章），其中需要考察

$$\lim_{t\to\infty}e^{itH}We^{-itH},$$

而 H 的意义仍如上，W 为等距算子（波算子），在一些散射的形式理论中 W 已不限于等距算子了. 这也可视为记号算子概念的来源之一.

§3 谱的投影与谱半径

1. 谱的直角分解与极分解 作为记号算子与极记号算子的一个简单应用来说明非正常算子与正常算子的联系. 证明亚正常算子具有象正常算子所具有的如下的谱直角分解性质. 我们用 π_x, π_y 分别表示复平面上对实轴及虚轴的投影，即对复数 $z=x+iy$,

有

$$\pi_x z = x, \quad \pi_y z = y.$$

设 $X, Y \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ 为自共轭的，显然

$$\pi_x(\sigma_{ja}(X+iY)) \subset \sigma(X), \quad \pi_y(\sigma_{ja}(X+iY)) \subset \sigma(Y).$$

由定理 1.6，即知

引理 3.1 若 X 和 Y 是自共轭算子，$Y \in S_X^+ \cup S_X^-$，则

$$\pi_x(\sigma_{ja}(X+iY)) = \sigma(X). \tag{3.1}$$

定理 3.2 设 $X+iY$(X, Y 为自共轭算子)是亚正常算子，那么

$$\pi_x(\sigma(X+iY)) = \pi_x(\sigma_e(X+iY)) = \sigma(X), \tag{3.2}$$

$$\pi_y(\sigma(X+iY)) = \pi_y(\sigma_e(X+iY)) = \sigma(Y). \tag{3.3}$$

证 由于 $X+iY$ 是亚正常的，从而由引理 3.1 知 (3.1) 成立. 又由于定理 I，2.5[1] 知

$$\sigma_j(X+iY) = \sigma_{ja}(X+iY),$$

又由于 $\sigma(X+iY)$ 的境界在 $\sigma_e(X+iY)$ 中，所以 (3.2) 成立. 同理可得 (3.3). 证毕.

我们再考察复平面上的投影 π_ρ 与 π_θ: 设 φ 为实数，$r>0$，作"投影"

$$\pi_\rho: re^{i\varphi} \longmapsto r,$$

$$\pi_\theta: re^{i\varphi} \longmapsto e^{i\varphi}.$$

和前面一样，当 $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$，而且极分解 $T = U|T|$ 中 U 为酉算子时，显然有

$$\pi_\rho(\sigma_{ja}(U|T|)) \subset \sigma(|T|), \quad \pi_\theta(\sigma_{ja}(U|T|)\backslash\{0\}) \subset \sigma(U).$$

由定理 I,2.5 当 $U|T| \in SHU$ 时得

$$\pi_\rho(\sigma_e(U|T|)) \subset \sigma(|T|), \quad \pi_\theta(\sigma_e(U|T|)\backslash\{0\}) \subset \sigma(U).$$

然而我们还有进一步的结果.

定理 3.3 设 $U|T| \in SHU$，那么

$$\pi_\theta(\sigma(U|T|)\backslash\{0\}) = \pi_\theta(\sigma_e(U|T|)\backslash\{0\}) = \sigma(U), \tag{3.4}$$

$$\pi_\rho(\sigma_e(U|T|)) \supset \{m(|T|), M(|T|)\}, \tag{3.5}$$

---

1) 我们用罗马字表示章次，例如这里定理 I, 2.5 是指第一章定理 2.5.

又当 $\sigma(U)\neq C_1$ 时，

$$\pi_\rho(\sigma(U|T|))=\pi_\rho(\sigma_a(U|T|))=\sigma(|T|). \qquad (3.6)$$

证 (3.4) 的证明与定理 3.2 一样.

现证当 $\sigma(U)\neq C_1$ 时，$\pi_\rho(\sigma_a(U|T|)=\sigma(|T|)$，这时不妨设 $1\bar{\in}\sigma(U)$，作 "Cayley" 变换就可由 3.2 导出 (3.6).

今证 $M(|T|)\in\pi_\rho(\sigma_a(T))$. 由于 $\|T\|=M(|T|)$，(2.11) 和

$$|T|\leqslant S_U^+(|T|)\leqslant\|T\|I,$$

可知 $M(|T|)\in\sigma(\mathscr{S}_U^+(|T|))$. 然而 $S_U^+(T)=US_U^+(|T|)$ 是正常算子，必有 $e^{i\theta}$, $|e^{i\theta}|=1$ 使

$$e^{i\theta}M(|T|)\in\sigma(\mathscr{S}_U^+(T)).$$

由 (2.13) 即得 $M(|T|)e^{i\theta}\in\sigma_a(T)$，此即 $M(|T|)\in\pi_\rho(\sigma_a(T))$.

如果 $m(|T|)=0$，显然 $m(|T|)\in\pi_\rho(\sigma_a(T))$. 如果 $m(|T|)>0$，那么 $T^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 而且由 §I. 1，$T^{-1}\in SHU$. 显然

$$m(|T|)=M(|T^{-1}|)^{-1}\in\pi_\rho(\{\lambda^{-1}|\sigma_a(T^{-1})\}).$$

于是即得 $m(|T|)\in\pi_\rho(\sigma_a(T))$. 证毕.

我们注意，当 $\sigma(U)=C_1$ 时，(3.6) 可能不成立.

在例 I. 2.1 中取 $\lambda_n=0(n<0)$，$\lambda_0=1/2$，$\lambda_n=1(n>0)$，这时 $\sigma(|T|)=\{0,1/2,1\}$. 而 $\sigma_a(T)=\{|z|=1, z=0\}$. 事实上 $T=S+(1/2)P_0$，这儿 S 为对应 $\lambda_n=0(n<0)\lambda_n=1(n>0)$ 的单向平移算子，易知 $\sigma_e(S)=\{|z|=1, z=0\}$. 而 P_0 是到常值函数空间上的一秩投影，从而可知 $\sigma_e(T)=\sigma_e(S)$ 这里 $\sigma_e(T)$ 表示 T 的本质谱. 这样若 $re^{i\theta}\in\sigma(T)\backslash\sigma_e(T)$ 时，或 $re^{i\theta}\in\sigma_r(T)$，或 $re^{i\theta}\in\sigma_a(T)$，但后者不可能，因此只有 $\sigma_r(T)=\sigma(T)\backslash\sigma_a(T)$. 因此可知 $\sigma_a(T)=\{|z|=1, z=0\}$. 这时等式 (3.6) 不成立.

2. 谱半径 现在我们来证明半亚正常算子 T 的谱半径

$$r_{sp}(T)=\max_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|$$

具有象正常算子那样的估计式.

定理 3.4 如果 T 是半亚正常算子(或协半亚正常算子)，那么

$$r_{sp}(T) = \|T\|. \tag{3.7}$$

证 先考察 $T \in SHU$ 的情况. 由于 $\|T\| = \||T|\|$, 从而

$$\|T\| \in \sigma(|T|) \tag{3.8}$$

由 (3.5) 存在实数 θ, 使 $\|T\|e^{i\theta} \in \sigma(T)$, 因此

$$r_{sp}(T) \geqslant \|T\|.$$

但是 $r_{sp}(T) \leqslant \|T\|$ 是显然的. 这就证明了 (3.7).

对于一般的 $T \in SH$, 我们要用到下面一个关于半亚正常算子的扩张引理. 这个引理实际上是联系 SH 与 SHU 中算子的一个基本而简单的引理, 后面要多次用到.

引理 3.5 设 $A = U|A| \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, U 是等距算子, 那么必有 Hilbert 空间 $\widetilde{\mathscr{H}} \supset \mathscr{H}$, 使 U 延拓为 $\widetilde{\mathscr{H}}$ 中的酉算子 $\widetilde{U}$, $|A|$ 延拓成 $\widetilde{\mathscr{H}}$ 中的半正定的自共轭算子 $|\widetilde{A}|$, 使当 $x \in \widetilde{\mathscr{H}} \ominus \mathscr{H}$ 时

$$|\widetilde{A}|x = 0 \tag{3.9}$$

而且 A 延拓成 $\widetilde{A} = \widetilde{U}|\widetilde{A}|$. 特别当 $A \in SH$[1] 时 $\widetilde{A} \in SHU$, 且

$$\sigma(A) \subset \sigma(\widetilde{A}) \subset \sigma(A) \cup \{0\} \tag{3.10}$$

证 任取一 $\widetilde{\mathscr{H}} \supset \mathscr{H}$, 使

$$\dim(\widetilde{\mathscr{H}} \ominus \mathscr{H}) = \aleph_0 \dim(\mathscr{H} \ominus U\mathscr{H}).$$

这时显然可以延拓 U 成为 $\widetilde{\mathscr{H}} \to \widetilde{\mathscr{H}}$ 的酉算子 $\widetilde{U}$. 若 P 为 $\widetilde{\mathscr{H}}$ 到 $\mathscr{H}$ 上的投影算子, 作算子

$$|\widetilde{A}| = |A|P.$$

事实上, 这时 $|\widetilde{A}|$ 为 $|A|$ 与 $\widetilde{\mathscr{H}} \ominus \mathscr{H}$ 中零算子的直交和.

$$|\widetilde{A}| = |A| \oplus O|_{\widetilde{\mathscr{H}} \ominus \mathscr{H}}. \tag{3.11}$$

所以 (3.9) 成立, 自然有 $|\widetilde{A}| \geqslant 0$. 作

$$\widetilde{A} = \widetilde{U}|\widetilde{A}|,$$

这也是极分解式, 而且由 (3.9) 知 $\widetilde{A}$ 是 A 的延拓. 由作法, 相对于分解 $\widetilde{\mathscr{H}} = \mathscr{H} \oplus (\widetilde{\mathscr{H}} \ominus \mathscr{H})$ 有表示

$$\widetilde{U} = \begin{pmatrix} U & * \\ 0 & * \end{pmatrix}, \quad |\widetilde{A}| = \begin{pmatrix} |A| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

1) 在 §1, 1 已说过, 当 $A \in SH(\mathscr{H})$ 时, 在极分解式 $A = U|A|$ 中的 U 必可延拓成 $\mathscr{H}$ 中等距算子.

通过计算易知

$$|\widetilde{A}|-\widetilde{U}|\widetilde{A}|\widetilde{U}^*=(|A|-U|A|U^*)\oplus O|_{\mathscr{F}\ominus\mathscr{H}}.$$

因此当 $A\in SH$ 时必有 $\widetilde{A}\in SHU$. 而且由

$$\widetilde{A}=A\oplus O|_{\mathscr{F}\ominus\mathscr{H}},$$

可知 (3.10) 成立. 引理证毕.

根据引理 3.5, 作 $\widetilde{T}\in SHU$, 且这时显然

$$r_{sp}(\widetilde{T})=r_{sp}(T),\quad \|\widetilde{T}\|=\|T\|.$$

由已证的部分 $\|\widetilde{T}\|=r_{sp}(\widetilde{T})$, 立即得到 (3.7). 证毕.

现在给出半亚正常算子的豫解式的估计.

系 3.6 设 T 为半正常算子(即 T 为亚正常的或协亚正常的), 则 (3.7) 成立, 而且当 $\lambda\in\rho(T)$ 时,

$$\|(T-\lambda I)^{-1}\|=\frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda,\sigma(T))}. \tag{3.12}$$

证 不妨设 T 为亚正常的, 那么由 §I, 1 知 $(T-\lambda I)^{-1}$ 也是亚正常的, 然而

$$\sigma((T-\lambda I)^{-1})=\left\{\frac{1}{z-\lambda}\,\Big|\,z\in\sigma(T)\right\},$$

所以对 $(T-\lambda I)^{-1}$ 用 (3.7) 得

$$\|(T-\lambda I)^{-1}\|=\max_{z\in\sigma(T)}\frac{1}{|z-\lambda|}=\frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda,\sigma(T))}.$$

证毕.

对于半亚正常算子, 迄今尚未得到如 (3.12) 那样的准确估计式, 但是在特别情况下仍有准确估计式.

系 3.7 设 T 是半亚正常的(或协半亚正常的), 而且 $0\in\rho(T)$ 那么

$$\|T^{-1}\|=r_{sp}(T^{-1})=\frac{1}{\min\limits_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|}. \tag{3.13}$$

证 由 §I, 1, 这时 T^{-1} 也是半亚正常的, 所以 (3.13) 成立.

系 3.8 设 T 为半亚正常算子, 那么对自然数 n 成立

$$\|T^n\|=\|T\|^n. \tag{3.14}$$

如果 $T^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$，那么对任何整数 n，(3.14)成立.

证 当 n 为自然数时，

$$\sqrt[n]{\|T^n\|}\leqslant\|T\|.$$

另一方面，对任一 $T\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 都有

$$\|T^n\|\geqslant r_{sp}(T^n).$$

但是当 $\lambda^n\in\rho(T^n)$ 时，易知 $\lambda\in\rho(T)$，因此

$$\{\lambda^n|\lambda\in\sigma(T)\}\subset\sigma(T^n).$$

即得

$$r_{sp}(T^n)\geqslant r_{sp}(T)^n.$$

这样得到

$$r_{sp}(T)\leqslant\sqrt[n]{\|T^n\|}\leqslant\|T\|\leqslant r_{sp}(T),$$

所以(3.13)成立. 当 $T^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 时，类似地证明(3.11)对负整数 n 也成立.

3. Cayley 变换下的谱映照定理 下面再利用引理 I, 3.1 和谱的投影(定理 3.2)给出 Cayley 变换下的谱映照定理，它把亚正常算子的谱和半亚正常算子的谱联系起来.

设 $T=X+iY\in HN$，我们作 §I, 1 第 5 段的 Cayley 变换

$$\tau(T)=e^{i\alpha}(X+iI)(X-iI)^{-1}(Y-m(Y)I).$$

同时作复平面中的映照

$$\tau: x+iy\rightarrow e^{i\alpha}(x+i)(x-i)^{-1}(y-m(Y)).$$

定理 3.9 设 $T\in HN$，则

$$\sigma_a(\tau(T))=\tau(\sigma_a(T)),\tag{3.15}$$

$$\sigma_r(\tau(T))=\tau(\sigma_r(T)),\tag{3.16}$$

$$\sigma(\tau(T))=\tau(\sigma(T)).\tag{3.17}$$

证 记 $T=X+iY$，其中 X,Y 为自共轭的，为简单起见，不妨设 $\alpha=0$，$m(Y)=0$. 为了应用引理 3.1，我们取 $R=\{z|\operatorname{Im}z>0\}$. 作函数

$$\varphi_t(x)=\frac{1-itx}{tx-i},\quad\psi_t(y)=\frac{1-t^2}{2}+ty$$

以及

$$\tau_t(x+iy)=\begin{cases}(\varphi_t(x)\phi_t(y)-i/2)/t & 0<t\leqslant 1\\ x+iy & t=0.\end{cases}$$

又作算子值函数

$$T(t)=\begin{cases}(\varphi_t(X)\phi_t(Y)-i/2)/t & 0<t\leqslant 1\\ X+iY & t=0.\end{cases}$$

这时

$$\tau_1(x+iy)=-i\tau(x+iy)-i/2,$$
$$T(1)=-i\tau(T)-i/2,$$

容易验证 τ_t 及 $T(t)$ 适合引理 I, 3.1 中的条件. 例如我们来验证 (I, 3.1). 由于 $\varphi_t(X)$ 为酉算子, $|\varphi_t(x)|=1$, 所以

$$2\mathrm{Re}((I-\varphi_t(x)\varphi_t(X)^*)f,f)$$
$$=\|(I-\varphi_t(x)\varphi_t(X)^*)f\|^2\geqslant 0 \qquad (3.18)$$

又由 $Y\geqslant 0$ 和

$$Y-\varphi_t(X)Y\varphi_t(X)^*=(tX-i)^{-1}2i[X,Y](tX-i)^{-1*}\geqslant 0$$

得到

$$\mathrm{Re}((Y-\varphi_t(x)Y\varphi_t(X)^*)f,f)$$
$$\geqslant 1/2((Y-\varphi_t(X)Y\varphi_t(X)^*)f,f)\geqslant 0, \qquad (3.19)$$

因此从 (3.18) 和 (3.19) 得到

$$\mathrm{Re}((\phi_t(Y)-\varphi_t(x)\phi_t(Y)\varphi_t(X)^*)f,f)\geqslant 0.$$

然而当 $1\geqslant t>0$, $y>0$ 时

$$\|T(t)f-\tau_t(x+iy)f\|^2$$
$$=\|(\phi_t(Y)-\phi_t(y)I)f$$
$$+\phi_t(y)(I-\varphi_t(x)\varphi_t(X)^*)f\|^2/t^2$$
$$=\|(\phi_t(Y)-\phi_t(y)I)f\|^2/t^2+2\phi_t(y)\mathrm{Re}((\phi_t(Y)$$
$$-\varphi_t(x)\phi_t(Y)\varphi_t(X)^*)f,f)$$
$$\geqslant\|(\phi_t(Y)-\phi_t(y)I)f\|^2/t^2=\|(Y-yI)f\|^2.$$

因此若 $1\geqslant t>0$, $y>0$, 而且

$$\|(T(t)-\tau_t(x+iy)I)f_n\|\to 0.$$

则必有

$$\|(Y-yI)f_n\|\to 0.$$

于是可知

$$\|(\varphi_t(X)-\varphi_t(x)I)f_n\|\to 0,$$

因此有

$$\|(X-xI)f_n\|\to 0,$$

即有

$$\sigma_a(T(t))\cap R\subset\tau_t(\sigma_a(T(0))\cap R).$$

但是反过来的包含关系显然也成立，因此(I,3.1)成立．就可以应用引理 I,3.1，在(I，3，1—2)中取 $t=1$ 可知

$$\sigma_a(\tau(T))\cap\tau(R)=\tau(\sigma_a(T)\cap R),$$

$$\sigma_r(\tau(T))\cap\tau(R)=\tau(\sigma_r(T)\cap R).$$

而实直线 R^1 经映照 τ 后变成一点 $\tau(R^1)=\{0\}$，由于 $m(Y)=0$，$0\in\sigma(Y)$，所以 $0\in\sigma_a(\tau(T))$．又由(3.3)可知有 $x\in R^1$ 使 $x\in\sigma_a(T)$．即得

$$\sigma_a(\tau(T))\cap\tau(R^1)=\tau(\sigma_a(T)\cap R^1).$$

另一方面如果存在正数 c 使

$$\|\tau(T)x\|\geqslant c\|x\|,\quad x\in\mathscr{H}$$

那么 $\|Yx\|\geqslant c\|x\|$，因此 $Y^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$，即 $0\in\rho(\tau(T))$，得到

$$\sigma_r(\tau(T))\cap\tau(R^1)=\phi.$$

同时由于 $Y\geqslant 0$，从而

$$\sigma(T)\cap R^1=\sigma_a(T)\cap R^1,$$

由此导出

$$\sigma_r(\tau(T))\cap\tau(R^1)=\tau(\sigma_r(T)\cap R^1)=\phi,$$

所以(3.15—16)成立，因此(3.17)也成立．证毕．

第三章　奇异积分算子模型

为了对亚正常算子和半亚正常算子作更加深入的了解，并且为了与经典分析和伪微分算子理论发生联系，本章中我们将建立半亚正常算子和亚正常算子的一种柯西核的奇异积分算子模型. 它可以作为研究这些算子的谱及其它性质的一种工具.

§1　一类奇异积分算子

我们先探讨一类柯西核的奇异积分算子的一些常用性质. 为此我们先叙述向量值函数空间的一些性质.

1. 向量值平方可积函数空间　设M是一集，$\mathfrak{B}$表示由M的某些子集组成的σ代数，μ为可测空间$(M, \mathfrak{B})$上的σ有限测度. 又设$\mathfrak{D}$是一个可析的复 Hilbert 空间，用$(a, b)_{\mathfrak{D}}$表示$\mathfrak{D}$中向量a和b的内积. 设$f(x)$是M上定义的取值于$\mathfrak{D}$的向量值函数(有时我们就称为向量值函数，或$\mathfrak{D}$值函数)，如果对任一$a \in \mathfrak{D}$，复值函数$x \longmapsto (f(x), a)_{\mathfrak{D}}$是$(M, \mathfrak{B})$上可测函数，就称函数$f$是可测的. 当$f$和$g$是$\mathfrak{D}$值可测函数时，$(f(x), g(x))_{\mathfrak{D}}$是$(M, \mathfrak{B})$上的可测函数. 事实上设$e_n$是$\mathfrak{D}$中完备就范直交系(有限或可列个向量组成)，由$(f(x), e_n)$和$(g(x), e_n)$的可测性和 Parseval 等式

$$(f(x), g(x))_{\mathfrak{D}} = \sum_n (f(x), e_n)_{\mathfrak{D}}\overline{(g(x), e_n)_{\mathfrak{D}}},$$

立即可知$(f(x), g(x))_{\mathfrak{D}}$是可测函数，特别地$\|f(x)\|_{\mathfrak{D}}^2$也是可测函数. 设$\mu$为$(M, \mathfrak{B})$上的$\sigma$有限测度，令$\Omega$表示测度空间$(M, \mathfrak{B}, \mu)$，设$f$是$M$上取值于$\mathfrak{D}$的关于$\Omega$可测的平方可积函数(即$\int\|f(x)\|_{\mathfrak{D}}^2 d\mu < \infty$). 我们记这种函数全体为$L^2(\Omega, \mathfrak{D})$. 当$f(\cdot)$，$g(\cdot) \in L^2(\Omega, \mathfrak{D})$时，而且对几乎所有(对测度$\mu$)$x \in M$，$f(x) =$

$g(x)$，就把 $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 看成同一个向量．在 $L^2(\Omega, \mathfrak{D})$ 中按通常的方式定义线性运算．又规定内积如下

$$(f, g) = \int (f(x), g(x))_{\mathfrak{D}} d\mu(x). \tag{1.1}$$

容易看出 $L^2(\Omega, \mathfrak{D})$ 成为内积空间．特别当 $\mathfrak{D}$ 为复数体时，它就是通常的 $L^2(\Omega)$．

定理 1.1 $L^2(\Omega, \mathfrak{D})$ 是一个 Hilbert 空间．

证 我们只要证明完备性．设 $\{f_n(\cdot)\}$ 是 $L^2(\Omega, \mathfrak{D})$ 中的基本序列．设 $\{e_n\}$ 是 $\mathfrak{D}$ 中完备就范直交系．这里我们只要考虑 $\mathfrak{D}$ 为无限维的情况．显然对每个固定的 k，$\{(f_n(\cdot), e_k)_{\mathfrak{D}}\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的基本点列，从而由 $L^2(\Omega)$ 的完备性，存在函数 $g_k \in L^2(\Omega)$，使

$$(f_n(\cdot), e_k)_{\mathfrak{D}} \to g_k, \quad (\text{在 } L^2(\Omega) \text{ 中}).$$

因此对每个自然数 m，有

$$\sum_{k=1}^{m} \int |g_k(x)|^2 d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int |(f_n(x), e_k)_{\mathfrak{D}}|^2 d\mu(x)$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \|f_n\|^2.$$

所以 $\sum_{k=1}^{\infty} \int |g_k(x)|^2 d\mu(x) < \infty$．因此存在一全测度集 $E \in \mathfrak{B}$，使当 $x \in E$ 时，$\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)|^2 < \infty$．作

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) e_k, \quad x \in E,$$
$$f(x) = 0, \quad x \bar{\in} E.$$

那么易知 $f \in L^2(\Omega, \mathfrak{D})$，由于对任一自然数 N

$$\sum_{k=1}^{N} \int |(f_n(x) - f(x), e_k)_{\mathfrak{D}}|^2 d\mu(x)$$
$$\leqslant \lim_{m\to\infty} \int \|f_n - f_m\|_{\mathfrak{D}}^2 d\mu(x),$$

在上式中，令 $N \to \infty$，再令 $n \to \infty$，即知

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

证毕.

设 $R(t)\in\mathscr{L}(\mathfrak{D})$, $(t\in M)$ 是算子值函数,而且对每个 $a\in\mathfrak{D}$, M 上向量值函数 $R(t)a$ 是可测的,则称 $R(\cdot)$ 是可测的. 若 $R(t)$, $(t\in M)$ 又都是 $\mathfrak{D}$ 中投影算子. 则称为投影算子值函数. 例如设

$$\mathfrak{D}_0\subset\mathfrak{D}_1\subset\cdots\subset\mathfrak{D}_n\subset\cdots$$

是 $\mathfrak{D}$ 中一列有限维空间,且

$$\mathfrak{D}_0=\{0\},$$

而又设

$$F_0\subset F_1\subset\cdots\subset F_n\subset\cdots$$

是 $\mathfrak{B}$ 中一列集合, 在 M 上定义投影算子值函数 $R(\cdot)$ 如下: 当 $t\in F_0$ 时, $R(t_0)=0$; 当 $t\in F_n\backslash F_{n-1}(n>0)$ 时, $R(t)$ 为 $\mathfrak{D}$ 到 $\mathfrak{D}_n$ 上的投影算子;又当 $t\bar{\in}\bigcup\limits_n F_n$ 时, $R(t)=I$. 这样的投影算子值函数称为标准的. 它显然是可测的. 我们记

$$\begin{aligned}L^2(\Omega,\mathfrak{D},R(\cdot))=\{f\,|\,f\in L^2(\Omega,\mathfrak{D}),R(\cdot)f(\cdot)\\=f(\cdot)\}.\end{aligned}$$

它作为 Hilbert 空间 $L^2(\Omega,\mathfrak{D})$ 的子空间,也是一个 Hilbert 空间.

设 $0<\mu(M)<\infty$, 当 $f(\cdot)\in L^2(\Omega,\mathfrak{D})$ 时,易知必有 $f_0\in\mathfrak{D}$, 使对每个 $a\in\mathfrak{D}$

$$(f_0,a)_{\mathfrak{D}}=\int(f(x),a)_{\mathfrak{D}}d\mu(x).\tag{1.2}$$

事实上,我们作 $\mathfrak{D}$ 上线性泛函

$$f_0:a\longmapsto\int(a,f(x))_{\mathfrak{D}}d\mu(x),\quad a\in\mathfrak{D}$$

显然

$$\left|\int(a,f(x))_{\mathfrak{D}}d\mu(x)\right|\leqslant\left(\int\|f(x)\|_{\mathfrak{D}}^2d\mu(x)\right)^{1/2}\|a\|\mu(M)^{1/2},$$

所以 f_0 是有界的. 因此有 $f_0\in\mathfrak{D}$ 使 (1.2) 成立. 记

$$f_0=\int f(x)d\mu(x).$$

显然有

$$\left\|\int f(x)d\mu(x)\right\|\leqslant\mu(M)^{1/2}\left(\int\|f(x)\|^2d\mu(x)\right)^{1/2}.\tag{1.3}$$

如果 $\mu(M)=1$，对每个 $a\in\mathfrak{D}$，我们把 a 看作常向量值函数，那么 $a\in L^2(\Omega,\mathfrak{D})$. 因此可以认为

$$\mathfrak{D}\subset L^2(\Omega,\mathfrak{D}).$$

而且内积也一致. 作 $L^2(\Omega,\mathfrak{D})$ 到 $\mathfrak{D}$ 的算子如下:

$$\mathfrak{P}_0: f(\cdot)\longmapsto\int f(x)d\mu(x), \tag{1.4}$$

显然 $\mathfrak{P}_0$ 是 $L^2(\Omega,\mathfrak{D})$ 的线性算子，又由 (1.3)，$\mathfrak{P}_0$ 是有界的. 再则

$$\begin{aligned}(\mathfrak{P}_0 f(\cdot),g(\cdot)) &= \left(\int f(x)d\mu(x),\ g(\cdot)\right)\\ &= \int\left(\int f(x)d\mu(x)\cdot g(y)\right)_{\mathfrak{D}} d\mu(y)\\ &= \iint (f(x),g(y))_{\mathfrak{D}}d\mu(x)d\mu(y)\\ &= (f(\cdot),\mathfrak{P}_0 g(\cdot)).\end{aligned}$$

所以 $\mathfrak{P}_0$ 是自共轭的，显然当 $a\in\mathfrak{D}$ 时，$\mathfrak{P}_0 a=a$. 所以 $\mathfrak{P}_0$ 是 $L^2(\Omega,\mathfrak{D})$ 到 $\mathfrak{D}$ 上的投影算子.

2. 向量值 Fourier 级数 现在我们考察一个特殊情况. 设 C_1 为单位圆周 $\{e^{i\theta}|0\leqslant\theta<2\pi\}$，$\mathfrak{B}$ 为 C_1 中 Borel 集全体 (即包含形如 $\{e^{i\theta}:0\leqslant\theta\leqslant a\}$ 的集的最小 σ 代数). 令 m 为 $(C_1,\mathfrak{B})$ 上如下的 Lebesgue 测度. 它满足

$$m(\{e^{i\theta}|0\leqslant\theta\leqslant a\})=\frac{a}{2\pi},\quad 0\leqslant a\leqslant 2\pi,$$

即 $dm(e^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}d\theta$. 当 $\Omega=(C_1,\mathfrak{B},m)$ 时，简记 $L^2(\Omega,\mathfrak{D})$ 为 $L^2(\mathfrak{D})$ 对每个 $f\in L^2(\mathfrak{D})$，作

$$f_n=\int f(e^{i\theta})e^{-in\theta}dm(e^{i\theta}).$$

称 f_n 为 $f(\cdot)$ 的第 n 个 Fourier 系数. 我们可以用向量值 Fourier 级数来表示 $f(\cdot)$

$$f(e^{i\theta})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f_n e^{in\theta},\quad \|f\|^2=\sum_{-\infty}^{+\infty}\|f_n\|^2_{\mathfrak{D}}. \tag{1.5}$$

即

$$f(e^{i\theta}) = S - \lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} f_n e^{in\theta}. \qquad (1.6)$$

我们考察 $L^2(\mathfrak{D})$ 中一切形如

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{in\theta}$$

的函数所构成的子空间，记之为 $H^2(\mathfrak{D})$. 称它为 Hardy 空间. 这是一个很重要的空间，我们记 $L^2(\mathfrak{D})$ 到 $H^2(\mathfrak{D})$ 上的投影算子为 $\mathfrak{P}$. 当 $f(\cdot) \in H^2(\mathfrak{D})$ 时，作解析函数

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{C_1} \frac{f(\zeta)\zeta}{\zeta - z} dm(\zeta), \quad |z| < 1.$$

显然对每个 r, $0 < r < 1$, 函数 $f(r(\cdot)) \in L^2(\mathfrak{D})$, 而且

$$f(e^{i\theta}) = S - \lim_{r\to 1-0} f(re^{i\theta})^{1)}.$$

事实上，由 $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2 < \infty$, 易知当 $r \to 1-0$ 时，

$$\|f(\cdot) - f(r(\cdot))\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2 (1 - r^{2n}) \to 0.$$

当 $f \in L^2(\mathfrak{D})$, 而且形如 (1.5) 时，显然

$$(\mathfrak{P}f)(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{in\theta}.$$

今证这时成立

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad |z| < 1. \qquad (1.7)$$

事实上，当固定 z, 且 $|z| < 1$ 时，C_1 上函数

$$\zeta \longmapsto \frac{f(\zeta)\zeta}{\zeta - z}$$

属于 $L^2(\Omega, \mathfrak{D})$. 由 (1.3)

1) 根据 Riesz 定理(见 Привалов [1])，我们可以知道对几乎所有的 $e^{i\theta}$,

$$\lim_{r\to 1-0} \|f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})\|_{\mathfrak{D}} = 0.$$

但在本书中，我们并不用到此式.

$$\left\|\mathfrak{P}_0\left(\frac{f(\cdot)(\cdot)}{(\cdot)-z}\right)\right\|_{\mathfrak{D}} \leqslant \left(\int\left\|\frac{f(\zeta)\zeta}{\zeta-z}\right\|^2 dm(\zeta)\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \frac{1}{1-|z|}\|f\|,$$

所以

$$f \longmapsto \mathfrak{P}_0\left(\frac{f(\cdot)(\cdot)}{(\cdot)-z}\right)$$

是 $L^2(\Omega, \mathfrak{D})$ 上的线性有界算子. 又

$$f \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$

也是 $L^2(\Omega, \mathfrak{D})$ 上的线性有界算子,因此要证 (1.7), 只要对形如

$$f(e^{i\theta}) = e^{im\theta} f, \quad f \in \mathfrak{D}$$

的函数来证明. 但对这种函数—(1.7) 是容易直接验证的, 所以 (1.7) 成立. 由此可得

引理 1.2 当 $f \in L^2(\Omega, \mathfrak{D})$ 时,

$$(\mathfrak{P}f)(e^{i\theta}) = S - \lim_{r\to 1-0} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - re^{i\theta}} d\zeta.$$

即 $\mathfrak{P}$ 为柯西核的奇异积分算子.

3. 一类半亚正常算子 设 ν 为 $(C_1, \mathfrak{B})$ 上一个奇异测度,即有一个 $F \in \mathfrak{B}$, $m(F) = 0$ 而且 $\nu(C_1 \backslash F) = 0$. 记 $\mu = m + \nu$, $\Omega = (c_1, \mathfrak{B}, \mu)$. 今后我们考虑 $(c_1, \mathfrak{B})$ 上这种测度 μ. 当 $f \in L^2(\mathfrak{D})$ 时,我们规定当 $e^{i\theta} \in F$ 时, $f(e^{i\theta}) = 0$, 那么 $f \in L^2(\Omega, \mathfrak{D})$, 在这种意义下, 我们把 $L^2(\mathfrak{D})$ 看成 $L^2(\Omega, \mathfrak{D})$ 的一个子空间. 因此可以把 $\mathfrak{P}$ 延拓到 $L^2(\Omega,\mathfrak{D})$ 上,只要规定当 $f \in L^2(\Omega,\mathfrak{D}) \ominus L^2(\mathfrak{D})$ 时,

$$\mathfrak{P}f = 0.$$

设 $R(\cdot)$ 为 Ω 上可测的投影算子值函数,我们把 $L^2(\Omega, \mathfrak{D}, R(\cdot))$ 简记为 $\hat{\mathscr{H}}$. 在 $\hat{\mathscr{H}}$ 中,作酉算子 $\hat{U}$ 如下:

$$\hat{U}f(e^{i\theta}) = e^{i\theta}f(e^{i\theta}), \quad f \in \hat{\mathscr{H}}. \tag{1.8}$$

设 $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ 为 Ω 上取值于 $\mathscr{L}(\mathfrak{D})$ 的一致有界函数, 而且是可测的,又 $\beta(e^{i\theta}) \geqslant 0$ 及

$$R(\cdot)\beta(\cdot)=\beta(\cdot)R(\cdot)=\beta(\cdot),$$
$$R(\cdot)\alpha(\cdot)=\alpha(\cdot)R(\cdot)=\alpha(\cdot). \tag{1.9}$$
再设当 $e^{i\theta}\in F$ 时，$\alpha(e^{i\theta})=0$. 我们定义 $\hat{T}$ 如下
$$(\hat{T}f)(e^{i\theta})=e^{i\theta}[\alpha(e^{i\theta})^*\mathfrak{P}(\alpha(\cdot)f(\cdot))+\beta(e^{i\theta})f(e^{i\theta})],\quad f\in\hat{\mathscr{H}} \tag{1.10}$$
由于 $\mathfrak{P}$ 是奇异积分算子，所以 $\hat{T}$ 也是奇异积分算子. 显然 $\hat{T}\in\mathscr{L}(\hat{\mathscr{H}})$，而且 $\hat{T}=\hat{U}|\hat{T}|$，其中
$$(|\hat{T}|f)(e^{i\theta})=\alpha(e^{i\theta})^*\mathfrak{P}(\alpha(\cdot)f(\cdot))+\beta(e^{i\theta})f(e^{i\theta}),\quad f\in\hat{\mathscr{H}}.$$

定理 1.3 Hilbert 空间 $\hat{\mathscr{H}}$ 上算子 $\hat{T}$ 是半亚正常算子，而且相应的极记号算子[1]为
$$(\hat{T}_{(+)}f)(e^{i\theta})=e^{i\theta}[\alpha(e^{i\theta})^*\alpha(e^{i\theta})+\beta(e^{i\theta})]f(e^{i\theta}),$$
$$(\hat{T}_{(-)}f)(e^{i\theta})=e^{i\theta}\beta(e^{i\theta})f(e^{i\theta}), \tag{1.11}$$
相应的极差算子 $\hat{Q}=|\hat{T}|-\hat{U}|\hat{T}|\hat{U}^*$ 为
$$(\hat{Q}f)(e^{i\theta})=\alpha(e^{i\theta})^*\mathfrak{P}_0(\alpha(\cdot)f(\cdot)). \tag{1.12}$$
其中 $\mathfrak{P}_0$ 即为 $L^2(\Omega,\mathfrak{D})$ 到 $\mathfrak{D}$ 的投影算子.

证 由于
$$(\hat{T}f)(e^{i\theta})=e^{i\theta}[\alpha(e^{i\theta})^*\mathfrak{P}(\alpha(\cdot)f(\cdot))+\beta(e^{i\theta})f(e^{i\theta})],$$
易知 (1.12) 成立. 事实上，若
$$\alpha(\cdot)f(\cdot)=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_ne^{in\theta},$$
则
$$\mathfrak{P}(\alpha(\cdot)f(\cdot))\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{in\theta},$$
$$\mathfrak{P}((\overline{\cdot})\alpha(\cdot)f(\cdot))\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{(n-1)i\theta},$$
所以知 (1.12) 成立. 因此 $\hat{Q}\geqslant 0$，$\hat{T}$ 是半亚正常的.

---

1) 以后简记 $\mathscr{S}^{\pm}_{\hat{U}}(\hat{T})$ 为 $\hat{T}_{(\pm)}$.

由定理 II，2.8 知道 $\hat{T}^{\pm}=\mathscr{S}_{\hat{U}}^{\pm}(\hat{T})$ 存在．要证明 (1.11)，只要对形如

$$f_m(e^{i\theta})=e^{im\theta}f,\quad f\in\mathfrak{D}$$

的函数验证 (1.11) 就好了[1]．这时，

$$(\hat{T}_{(\pm)}f_m)(e^{i\theta})=s-\lim_{n\to\pm\infty}[\hat{U}^{-n+m}\hat{T}\hat{U}^{n-m}f_m](e^{i\theta})$$

$$=s-\lim_{n\to\pm\infty}e^{im\theta}[e^{-in\theta}\alpha^*(e^{i\theta})\mathfrak{P}((\cdot)^n\alpha(\cdot)f)$$

$$+\beta(e^{i\theta})f].$$

设 $\alpha(\cdot)f=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_ke^{ik\theta}$，显然

$$e^{-in\theta}\alpha(e^{i\theta})^*\mathfrak{P}((\cdot)^n\alpha(\cdot)f)=\alpha^*(e^{i\theta})\sum_{k=-n}^{\infty}a_ke^{ik\theta}$$

由此可知

$$s-\lim_{n\to+\infty}[e^{-in\theta}\alpha(e^{i\theta})^*\mathfrak{P}((\cdot)^n\alpha(\cdot)f)]=\alpha(e^{i\theta})^*\alpha(e^{i\theta})f$$

同时

$$s-\lim_{n\to-\infty}[e^{-in\theta}\alpha(e^{i\theta})^*\mathfrak{P}((\cdot)^n\alpha(\cdot)f)]=0.$$

因此 (1.11) 成立．证毕．

对于一般的半亚正常算子 $T=U|T|$，后面我们还要用到它的极记号算子 $\mathscr{S}_U^{\pm}(T)$ 的线性组合

$$T_{(k)}=(1-k)\mathscr{S}_U^-(T)+k\mathscr{S}_U^+(T),\quad 0\leqslant k\leqslant 1.$$

称它为 T 的广义极记号算子．特别对于上述 $\hat{T}$，它的广义极记号算子为

$$(\hat{T}_{(k)}f)(e^{i\theta})=\hat{T}_{(k)}(e^{i\theta})f(e^{i\theta})$$

其中

$$\hat{T}_{(k)}(e^{i\theta})=e^{i\theta}[\beta(e^{i\theta})+k\alpha(e^{i\theta})^*\alpha(e^{i\theta})]. \tag{1.13}$$

由于 $\hat{T}_{(k)}(e^{i\theta})$ 是 $\mathfrak{D}$ 中正常算子，所以 $\hat{T}_{(k)}$ 也是 $\hat{\mathscr{H}}$ 中的正常算子．

---

1) 虽然 f_m 不一定在 $\hat{\mathscr{H}}$ 中，但是 $\hat{T}$ 可以看成 $L^2(\Omega,\mathfrak{D})$ 中的半亚正常算子，而 $\{f_m\}$ 的线性组合全体在 $L^2(\Omega,\mathfrak{D})$ 中稠密．

前面定理 I，1.1 已经说明亚正常算子必是半亚正常算子，即 $H\mathcal{N}\subset SH$. 现在举例说明 HN 是 SH 的真子集.

系 1.4 存在不是亚正常算子的半亚正常算子.

证 我们在定理 1.2 的奇异积分算子中，取 $\mathfrak{D}$ 为一维空间，$\mu = m$. $R(\cdot) = I$，$\alpha(\cdot) = I$，这时 $\hat{Q} = \mathfrak{P}_0$. 因此

$$|\hat{T}|_L = |\hat{T}| - \mathfrak{P}_0.$$

这样，我们有

$$|\hat{T}|^2 - |\hat{T}|_L^2 = |\hat{T}|\mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_0|\hat{T}| - \mathfrak{P}_0.$$

由于对任何 $f\in L^2(\Omega)$，

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{P}_0 f) = \mathfrak{P}_0 f,$$

所以

$$|\hat{T}|\mathfrak{P}_0 f = (1+\beta)\mathfrak{P}_0 f.$$

因此

$$((|\hat{T}|^2 - |\hat{T}|_L^2)f, f) = \|\mathfrak{P}_0 f\|^2 + 2\operatorname{Re}(\mathfrak{P}_0 f, \beta f), \tag{1.14}$$

记 $\beta_n = \int \beta(e^{i\theta})e^{-in\theta}dm$，又取

$$f(e^{i\theta}) = c_0 + c_1 e^{-i\theta},$$

其中 c_0，c_1 是两个常数，那么 (1.14) 成为

$$|c_0|^2(1+2\beta_0) + 2\operatorname{Re}(c_0\overline{c_1\beta_1}). \tag{1.15}$$

取 β，使 $\beta_1 \neq 0$，$\left(\text{例如取 } \beta(e^{i\theta}) = 1+\cos\theta\text{，那么 } \beta(e^{i\theta}) \geqslant 0\text{，而 } \beta_1 = \frac{1}{2}\right)$. 再取 c_1 的幅角使 (1.15) 成为

$$|c_0|^2(1+2\beta_0) - 2|c_0||c_1||\beta_1|.$$

这时，只要取 $|c_0|\neq 0$，而 $|c_1|$ 充分大，就可以使 (1.15) 为负数，从而当 $\beta_1\neq 0$ 时，所得到的半亚正常算子 $\hat{T}$ 就不是亚正常算子. 证毕.

4. 实数直线上的柯西核奇异积分 现在设 R^1 为实数直线，$\mathfrak{B}$ 为 R^1 中 Borel 集全体. m 为 R^1 上 Lebesgue 测度. 记 $\Omega = (R^1, \mathfrak{B}, m)$，令 $\mathfrak{F}$ 为 $L^2(\Omega, \mathfrak{D})$ 上的 Fourier 变换

$$(\mathfrak{F}f)(x) = s - \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N} f(t)e^{itx}dt. \tag{1.16}$$

和 $L^2(\Omega)$ 的情况一样，可知 $\mathfrak{F}$ 是 $L^2(\Omega, \mathfrak{D})$ 中的酉算子. 我们定义 $L^2(\Omega, \mathfrak{D})$ 中如下的算子 $P_{[0,\infty)}$

$$(P_{[0,\infty)}f)(\lambda) = \chi_{[0,\infty)}(x)f(x), \quad f \in L^2(\Omega, \mathfrak{D}), \qquad (1.17)$$

再定义算子

$$P = \mathfrak{F}^{-1}P_{[0,\infty)}\mathfrak{F}. \qquad (1.18)$$

我们先把 P 的形式具体表示出来.

引理 1.5 设 $f \in L^2(\Omega, \mathfrak{D})$，则

$$(Pf)(x) = s - \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(s)ds}{x - (s + i\varepsilon)}. \qquad (1.19)$$

所以 P 也是奇异积分算子.

证 由于当 $\varepsilon > 0$ 时，

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{x - (s + i\varepsilon)} dx = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{i(s+i\varepsilon)t} & t > 0, \end{cases} \qquad (1.20)$$

我们记

$$(T_\varepsilon f)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(s)ds}{x - (s + i\varepsilon)}.$$

令 $\mathscr{M}$ 为 $L^2(\Omega, \mathfrak{D})$ 中在有限区间外函数值为 0 而且一致有界的函数全体. 显然 $\mathscr{M}$ 在 $L^2(\Omega, \mathfrak{D})$ 中是稠密的. 记 M_ε 为 $L^2(\Omega, \mathfrak{D})$ 中乘法算子

$$(M_\varepsilon f)(t) = e^{-\varepsilon|t|}f(t).$$

当 $f \in \mathscr{M}$ 时，利用 (1.20)，容易算出：

$$(\mathfrak{F}T_\varepsilon f)(t) = M_\varepsilon P_{[0,\infty)}\mathfrak{F}f.$$

因此

$$T_\varepsilon f = \mathfrak{F}^{-1}M_\varepsilon P_{[0,\infty)}\mathfrak{F}f, \quad f \in \mathscr{M}.$$

由于 $\mathscr{M}$ 的稠密性可知

$$T_\varepsilon = \mathfrak{F}^{-1}M_\varepsilon P_{[0,\infty)}\mathfrak{F}.$$

然而易知

$$s - \lim_{\varepsilon \to +0} M_\varepsilon = I,$$

由此可知

$$P = S - \lim_{\varepsilon \to 0+} T_\varepsilon.$$

证毕.

我们还可以证明 Plemelj 公式

$$P=-\frac{1}{2}I+\frac{1}{2\pi i}P_c, \tag{1.21}$$

其中 P_c 为 Cauchy 主值积分算子，

$$(P_cf)(x)=S-\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{-\infty}^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{f(s)ds}{x-s}. \tag{1.22}$$

由于暂时尚不用到，故从略．但对普通函数情况，(1.21) 的证明参看 Мусхелишвили [1].

5. 一类亚正常算子 现设 Δ 为实数直线上有界闭集，且 $m(\Delta)>0$．$\mathfrak{B}_\Delta$ 表示 Δ 中 Borel 集全体．同样记 Δ 上 Lebesgue 测度为 m．设 ν 为 $\mathfrak{B}_\Delta$ 上奇异测度，即存在 $F\in\mathfrak{B}_\Delta$，$m(F)=0$，而 $\nu(\Delta\backslash F)=0$．记 $\mu=m+\nu$．设 $\Omega=(\Delta,\mathfrak{B}_\Delta,\mu)$，$\mathfrak{D}$ 为可折复 Hilbert 空间，$R(\cdot)$ 为 Ω 上投影算子值函数，而且是可测的，仍然记 $\hat{\mathscr{H}}=L^2(\Omega,\mathfrak{D},R(\cdot))$．作自共轭算子 $\hat{u}$ 如下

$$(\hat{u}f)(x)=xf(x),\quad f\in\hat{\mathscr{H}}. \tag{1.23}$$

同样地再设 $\alpha(\cdot)$，$\beta(\cdot)$ 为 Ω 上两个一致有界的可测的算子值函数，而且

$$\alpha(\cdot)R(\cdot)=R(\cdot)\alpha(\cdot)=\alpha(\cdot),$$
$$\beta(\cdot)R(\cdot)=R(\cdot)\beta(\cdot)=\beta(\cdot),$$
$$\beta(\cdot)=\beta(\cdot)^*.$$

又设当 $x\in F$ 时，$\alpha(x)=0$．我们同样地把 $\mathscr{H}$ 视为 $L^2(\Omega,\mathfrak{D})$ 的子空间，而将 P 延拓为 $\hat{\mathscr{H}}$ 上算子．这时，我们作线性有界算子 $\hat{T}$ 如下，

$$(\hat{T}f)(x)=(x+i\beta(x))f(x)+i\alpha(x)^*P(\alpha(\cdot)f(\cdot)),\quad f\in\hat{\mathscr{H}} \tag{1.24}$$

我们又记 P_0 为 $\hat{\mathscr{H}}$ 中如下定义的算子：

$$P_0f=\frac{1}{\pi}\int_\Delta fdm. \tag{1.25}$$

我们注意这里的 $P_0=\frac{m(\Delta)}{\pi}\mathfrak{P}_0$，其中 $\mathfrak{P}_0$ 是 (1.4) 中所定义的算

子$\left(\text{但 (1.4) 中}, \mu = \frac{m}{m(\Delta)}\right)$.

定理 1.6 Hilbert 空间 $\hat{\mathscr{H}}$ 上算子 $\hat{T}$ 是亚正常的，而且相应的记号算子[1]为

$$(\hat{T}_{\pm}f)(x) = \hat{T}_{\pm}(x)f(x). \tag{1.26}$$

其中

$$\hat{T}_{+}(x) = x + i[\alpha(x)^*\alpha(x) + \beta(x)],$$
$$\hat{T}_{-}(x) = x + i\beta(x).$$

相应的导算子为

$$(D_{\hat{T}}f)(x) = \alpha(x)^*P_0(\alpha(\cdot)f(\cdot)). \tag{1.27}$$

证 容易看出这时有卡狄生分解 $\hat{T} = \hat{u} + i\theta$，而且虚部 θ 具有形式

$$(\theta f)(x) = \beta(x)f(x) + \alpha(x)^*P(\alpha(\cdot)f(\cdot)).$$

容易验证当 g 在 Δ 外为零时，

$$2i[\hat{u}P(g) - P(\hat{u}g)] = P_0(g),$$

因此当 $f \in \hat{\mathscr{H}}$ 时 (1.27) 成立．由此

$$(D_{\hat{T}}f, f) = \pi\|P_0(\alpha f)\|_{\mathfrak{D}}^2 \geqslant 0,$$

所以 $\hat{T}$ 是亚正常的．

我们再来计算 $\lim\limits_{t\to\pm\infty} e^{i\hat{u}t}P(e^{-i\hat{u}t}f)$．命 L_t 为平移算子

$$(L_tg)(x) = g(x - t),$$

由于

$$\mathfrak{F}(e^{-i\hat{u}t}f) = L_t\mathfrak{F}(f),$$

而且

$$e^{i\hat{u}t}\mathfrak{F}^{-1}(f) = \mathfrak{F}^{-1}(L_{-t}f),$$

因此

$$e^{i\hat{u}t}P(e^{-i\hat{u}t}f) = \mathfrak{F}^{-1}L_{-t}P_{[0,\infty)}L_t\mathfrak{F}(f).$$

我们注意

$$(L_{-t}P_{[0,\infty)}L_t)f(x) = \chi_{[-t,\infty)}f(x).$$

---

1) 这里记 $S_{\hat{0}}^{\pm}(\hat{T})$ 为 $\hat{T}_{\pm}$.

显然

$$\lim_{t\to+\infty} L_{-t}P_{[0,\infty)}L_t = I, \quad \lim_{t\to-\infty} L_{-t}P_{[0,\infty)}L_t = 0.$$

从而导出

$$\lim_{t\to\infty} e^{i\hat{a}t}P(e^{-i\hat{a}t}f) = f, \quad \lim_{t\to\infty} e^{i\hat{a}t}P(e^{-i\hat{a}t}f) = 0.$$

这样就容易得知(1.26)成立. 证毕.

对于一般的亚正常算子 $T = X + iY$，我们后面还要用到它的记号算子 $S_X^{\pm}(T)$ 的线性组合

$$T_k = (1-k)S_X^-(T) + kS_X^+(T), \quad 0 \leqslant k \leqslant 1.$$

称它为 T 的广义记号算子. 特别对上述亚正常算子 $\hat{T}$，广义记号算子

$$\hat{T}_k = (1-k)\hat{T}_- + k\hat{T}_+, \tag{1.28}$$

具有形式

$$(\hat{T}_k f)(x) = \hat{T}_k(x)f(x),$$

其中

$$\hat{T}_k(x) = x + i[\beta(x) + k\alpha(x)^*\alpha(x)]. \tag{1.29}$$

§2 酉算子及与之交换的算子的函数模型

1. 酉算子的函数模型 我们首先给出常用的酉算子的函数模型，设 $\mathscr{H}$ 为可析复 Hilbert 空间，U 为 $\mathscr{H}$ 中的酉算子. 而向量 $x_0 \in \mathscr{H}$，如果

$$\{U^n x_0 \mid n = 0, \pm 1, \cdots\}$$

的线性组合全体在 $\mathscr{H}$ 中稠密，就称 x_0 为 U 在 $\mathscr{H}$ 中的生成元.

引理 2.1 设 U 为 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中酉算子，x_0 为 U 在 $\mathscr{H}$ 中的生成元，那么必有 $(C_1, \mathfrak{B})$ 上有限测度 $\mu = m + \nu$，这儿 m 为 Lebesgue 测度，ν 为奇异测度，又有可测的投影算子值函数 $R(e^{i\theta})$，$R(e^{i\theta})$ 的值域是 $\{0\}$ 或是一维复空间[1]，又有 $\mathscr{H}$ 到 $L^2(\Omega, R(\cdot))$

[1] 实际上 $R(e^{i\theta})$ 可以看成复值函数，取值 0 或 1.

(此地 $\Omega=(C_1, \mathfrak{B}, \mu)$) 上的酉算子$W$使

$$(WUW^{-1}f)(e^{i\theta}) = e^{i\theta}f(e^{i\theta}). \tag{2.1}$$

证 设$U=\int e^{i\theta}dF(e^{i\theta})$是$U$的谱分解式. 作$(C_1, \mathfrak{B})$上测度

$$\mu_1(E)=(F(E)x_0, x_0), \quad E\in\mathfrak{B}.$$

显然存在奇异测度ν和$(C_1, \mathfrak{B}, m)$上可测的非负可积函数x使

$$\mu_1(E)=\int_E x(e^{i\theta})dm(e^{i\theta})+\nu(E).$$

设ν集中在$F\in\mathfrak{B}$上, $m(F)=0$. 同时设x在F上的值为1. 定义一维复空间上投影算子$R(e^{i\theta})$

$$R(e^{i\theta})=\begin{cases}1 & x(e^{i\theta})>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

我们容易看出必有$\mathscr{H}$到$L^2(\Omega, R(\cdot))$上酉算子W使

$$(WU^nx_0)(e^{i\theta})=R(e^{i\theta})e^{in\theta}\sqrt{x(e^{i\theta})},$$
$$n=0, \pm1, \pm2, \cdots$$

这样W自然使(2·1)成立. 证毕.

定理 2.2 设U是可折的复 Hilbert 空间$\mathscr{H}$中的酉算子. 则必有可析复 Hilbert 空间$\mathfrak{D}$, 测度空间$\Omega=(C_1, \mathfrak{B}, \mu)$,其中$\mu=m+\nu$, m为 Lebesgue 测度, ν为奇异测度,(标准的)投影算子值可测函数$R(\cdot)$以及$\mathscr{H}$到$L^2(\Omega, \mathfrak{D}, R(\cdot))$上的酉算子$W$使

$$(WUW^{-1}f)(e^{i\theta})=e^{i\theta}f(e^{i\theta}), \quad f\in\mathscr{H}. \tag{2.2}$$

我们称$\hat{\mathscr{H}}=L^2(\Omega, \mathfrak{D}, R(\cdot))$中的酉算子$\hat{U}=WUW^{-1}$为$\mathscr{H}$中酉算子$U$的函数模型.

证 任取$\mathscr{H}$中稠密点列$\{x_n|n\geq0\}$,并设$x_1\neq0$. 记$x_1'=x_1$, 令

$$\mathscr{H}_1=\bar{V}\{U^nx_1'|n=0, \pm1, \pm2, \cdots\}^{1)}.$$

这时x_1'是U在$\mathscr{H}_1$中的生成元. 由引理 2.1, 存在$\Omega_1=(c_1, \mathfrak{B}, \mu_1)$, ($\mu_1=m+\nu_1$, $\nu_1\perp m$)和$R_1(\cdot)$以及$\mathscr{H}_1$到$L^2(\Omega_1, R_1(\cdot))$

1) 这里$\bar{V}\{\ \}$表示由$\{\ \}$张成的闭线性子空间.

的酉算子 W_1，使 $W_1UW_1^{-1}$ 具有形式(2.2)．设 x_{n_2} 为

$$\{x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$$

中第一个不属于 $\mathscr{H}_1$ 中的向量．令 x_2' 为 x_{n_2} 到 $\mathscr{H}_1^\perp$ 上的投影．利用 x_2' 为生成元，类似于上述手续作出 $\mathscr{H}_2$, W_2 如此等等．因此必有有限个或可列个互相垂直的子空间 $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2 \cdots$ 使

$$\mathscr{H} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathscr{H}_n,$$

又有 $\Omega_n = (c_1, \mathfrak{B}, \mu_n)$, $\mu_n = m + \nu_n$, $\nu_n \perp m$ 和 $\mathscr{H}_n$ 到 $L^2(\Omega_n, R_n(\cdot))$ 上的酉算子 W_n，使 $W_nUW_n^{-1}$ 具有形式(2.2)，令 $\mathfrak{D}$ 为一可析 Hilbert 空间，其维数等于 $\{H_n\}$ 的个数．取

$$\mu = m + \nu, \quad \nu = \sum_n \frac{1}{2^n} \nu_n$$

易知 ν 集中在某个 $F \in \mathfrak{B}$ 上，且 $m(F) = 0$．记 $\Omega = (C_1, \mathfrak{B}, \mu)$，作函数

$$D_n(e^{i\theta}) = \begin{cases} 1, & e^{i\theta} \bar{\in} F, \\ \dfrac{d\nu_n}{d\nu}(e^{i\theta}), & e^{i\theta} \in F, \end{cases}$$

其中 $\dfrac{d\nu_n}{d\nu}$ 表示 ν_n 对 ν 的 Radon-Nikodym 导数．又作函数

$$h(e^{i\theta}) = \sum_{D_n(e^{i\theta})>0} R_n(e^{i\theta})1.$$

作 $\mathfrak{D}$ 的完备就范直交系 $\{e_n\}$，令

$$\mathfrak{D}_n = \bar{V}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}, \quad n \geqslant 1$$

而 $\mathfrak{D}_0 = \{0\}$．则

$$\mathfrak{D}_0 \subset \mathfrak{D}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{D}_n \subset \cdots$$

又令

$$F_n = \{e^{i\theta} | h(e^{i\theta}) \leqslant n\}.$$

然后定义 $R(e^{i\theta})$ 为如前述的标准投影算子值函数．对每个 $e^{i\theta}$，我们把使

$$R_n(e^{i\theta})D_n(e^{i\theta}) > 0$$

的那些指标 n 排成

$$n_1(e^{i\theta}) \leqslant n_2(e^{i\theta}) \leqslant \cdots \leqslant n_k(e^{i\theta}) \leqslant \cdots$$

再作函数

$$N(e^{i\theta}, n) = \sup_{n_k(e^{i\theta}) \leqslant n} k.$$

那么必可作出 $\mathscr{H}$ 上线性映照 W 使

$$WU^k x'_n = D_n(e^{i\theta})^{1/2} e_{N(e^{i\theta}, n)} W_n U^k x'_n,$$

可以证明这个 W 是 $\mathscr{H}$ 到 $L^2(\Omega, \mathfrak{D}, R(\cdot))$ 上的酉算子，而且满足 (2.2). 证毕.

我们仍记 $L^2(\Omega, \mathfrak{D})$ 或 $L^2(\Omega)$ 中的算子 (1.8) 为 $\hat{U}$，则凡是与 $\hat{U}$ 交换的算子必为乘法算子. 即

引理 2.3 设 Q 为 $L^2(\Omega)$ 中有界线性算子，而且

$$Q\hat{U} = \hat{U}Q.$$

则必有 Ω 上有界可测函数 $Q(\cdot)$，使

$$(Qf)(e^{i\theta}) = Q(e^{i\theta})f(e^{i\theta}), \quad f \in L^2(\Omega), \tag{2.3}$$

证 记 $Q(\cdot) = (Q1)(\cdot)$. 令

$$\mathscr{T} = \left\{ f \mid f = \sum_{n=-N}^{N} f_n z^n,\ f_n \text{ 为常数}, N \text{ 是自然数} \right\}$$

由于 $Q\hat{U} = \hat{U}Q$，当 $f \in \mathscr{T}$ 时，

$$\begin{aligned}(Qf)(\cdot) &= (Qf(\hat{U})1)(\cdot) = (f(\hat{U})Q1)(\cdot) \\ &= f(\cdot)Q(\cdot),\end{aligned} \tag{2.4}$$

再由 $\|Qf\| \leqslant \|Q\| \cdot \|f\|$，得

$$\int |Q(e^{i\theta})|^2 |f(e^{i\theta})|^2 d\mu(e^{i\theta}) \leqslant \|Q\|^2 \int |f(e^{i\theta})|^2 d\mu(e^{i\theta}), \tag{2.5}$$

由于可以用三角多项式一致逼近连续函数，从而对一切非负连续函数 $g(e^{i\theta})$ 可得

$$\int |Q(e^{i\theta})|^2 g(e^{i\theta}) d\mu(e^{i\theta}) \leqslant \|Q\|^2 \int g(e^{i\theta}) d\mu(e^{i\theta}). \tag{2.6}$$

再由 Levi 引理可以证明对任何非负可测函数 $g(e^{i\theta})$ 上式也成立，因此可取 $Q(e^{i\theta})$ 使

$$|Q(e^{i\theta})| \leqslant \|Q\|, \quad e^{i\theta} \in C_1.$$

这样一来，由于 $\mathscr{T}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中稠，可知对一切 $f\in L^2(\Omega)$，(2.3) 成立．证毕．

现在再把引理 2.3 推广到较一般的情况．

定理 2.4 设 Q 为 $L^2(\Omega,\mathfrak{D},R(\cdot))$ 中有界线性算子，而且

$$Q\hat{U}=\hat{U}Q.$$

那么必有 C_1 上取值于 $\mathscr{L}(\mathfrak{D})$ 的一致有界可测函数 $Q(\cdot)$ 满足如下条件

$$Q(e^{i\theta})\mathfrak{D}\subset R(e^{i\theta})\mathfrak{D},\quad \|Q(e^{i\theta})\|\leqslant\|Q\|,$$

而且

$$(Qf)(e^{i\theta})=Q(e^{i\theta})f(e^{i\theta}),\quad f\in L^2(\Omega,\mathfrak{D},R(\cdot)).\qquad(2.7)$$

特别当 $Q\geqslant 0$ 时，可取 $Q(e^{i\theta})\geqslant 0$，当 Q 为投影算子时，可取 $Q(e^{i\theta})$ 为 $\mathfrak{D}$ 中投影算子．

证 任取 $\{x_n\}$ 为 $\mathfrak{D}$ 中可列稠子集．$\mathscr{L}$ 表示用 $\{x_n\}$ 中有限个向量的有理复数(即实部与虚部都是有理数)为系数的线性组合全体．那么 $\mathscr{L}$ 是稠的，而且 $\mathscr{L}$ 中有限个向量的有理复数为系数的线性组合仍在 $\mathscr{L}$ 中．我们不妨设 Q 为非负的自共轭算子，不然只要取 Q 的实部或虚部并加上 cI 好了，任意取定 $a,b\in\mathscr{L}$，$\phi\in L^2(\Omega)$．这时

$$\varphi\longmapsto(Q(R(\cdot)\varphi a),\ R(\cdot)\phi b)$$

是 $L^2(\Omega)$ 上有界线性泛函，因此有 $k_{a,b,\phi}(\cdot)\in L^2(\Omega)$ 使

$$(Q(R(\cdot)\varphi a),\ R(\cdot)\phi b)=(\varphi,\ k_{a,b,\phi}).$$

由于

$$(Q\hat{U}^{\pm1}\varphi a)(z)=z^{\pm1}(Q\varphi a)(z),\quad z\in C_1.$$

所以

$$\begin{aligned}(\varphi,\ k_{a,b,\hat{U}^{\pm}\phi})&=(Q(R(\cdot)\varphi a),\ \hat{U}^{\pm}\phi b))\\&=(\hat{U}^{\mp}Q(R(\cdot)\varphi a),\ \phi b)\\&=(Q(\hat{U}^{\mp}R(\cdot)\varphi a),\ \phi b)=(\hat{U}^{\mp}\varphi,\ k_{a,b,\phi})\\&=(\varphi,\ \hat{U}^{\pm}k_{a,b,\phi})\end{aligned}$$

所以

$$k_{a,b,\hat{U}\phi}=\hat{U}k_{a,b,\phi}.$$

即 $L^2(\Omega)$ 中算子

$$\phi \longmapsto k_{a,b,\phi}$$

与 $\hat{Q}$ 可交换，由引理 2.3，存在有界可测函数 $Q_{a,b}(\cdot)$，使

$$k_{a,b,\phi}(\cdot)=\overline{Q_{a,b}(\cdot)}\phi(\cdot),$$

即

$$(Q(R\varphi a),\ \phi b)=(Q_{a,b}\varphi,\ \phi).$$

由 Q 的线性和 $0\leqslant Q\leqslant MI$（M 为正数），易知当固定 $a,b,c\in\mathscr{L}$ 及有理复数 k 时，除去一个 μ 零集外对一切 $z\in C_1$，

$$Q_{ka,b}(z)=kQ_{a,b}(z),\quad Q_{a+b,c}(z)=Q_{a,c}(z)+Q_{b,c}(z),$$

$$0\leqslant Q_{a,a}(z)\leqslant M\|a\|^2,\quad Q_{a,b}(z)=\overline{Q_{b,a}(z)}.\tag{2.8}$$

由于可列个零集的和集是零集，因此有 $E\in\mathfrak{B}$，$\mu(C_1\backslash E)=0$，使得当 $z\in E$ 时，对一切 $a,b,c\in\mathscr{L}$ 及有理复数 k，(2.8) 成立．设 $\mathscr{L}_1$ 为 $\mathscr{L}$ 张成的复数域上的线性空间，当固定 $z\in E$ 时，以 a,b 为变元的二元泛函 $Q_{a,b}(z)$ 可以由 $\mathscr{L}$ 唯一地延拓到 $\mathscr{L}_1$ 上，事实上当 $k_1,\cdots,k_m;\ l_1,\cdots,l_n$ 为复数，$a_1,\cdots,a_m;\ b_1,\cdots,b_n$ 属于 $\mathscr{L}$ 时，定义

$$Q_{\sum\limits_{i=1}^{m}k_ia_i,\sum\limits_{j=1}^{n}l_jb_j}(z)=\sum_{i,j}k_i\bar{l}_jQ_{a_i,b_j}(z).$$

这是 $\mathscr{L}_1$ 上有界埃米泛函，由[夏道行、吴卓人、严绍宗、舒五昌[1]]中第六章 §6 定理 3 有有界自共轭算子 $Q(z)$ 使

$$Q_{a,b}(z)=(Q(z)a,b)_{\mathfrak{D}},\quad a,b\in\mathscr{L}_1,\ z\in E.$$

当 $z\in C_1\backslash E$ 时，规定 $Q(z)=0$．那么对一切 $\varphi,\phi\in L^2(\Omega)$，$a,b\in\mathscr{L}$，

$$\begin{aligned}&(Q(R(\cdot)\varphi a),\ R(\cdot)\phi b)\\&=\int_{C_1}(Q(z)\varphi(z)a,\ \phi(z)b)_{\mathfrak{D}}d\mu(z).\end{aligned}\tag{2.9}$$

然而容易证明

$$\{R(\cdot)\varphi a\,|\,a\in\mathscr{L},\ \varphi\in L^2(\Omega)\},$$

在 $L^2(\Omega,\mathfrak{D},R(\cdot))$ 中稠密，所以由 (2.9)，对一切 $\varphi,\phi\in L^2(\Omega,\mathfrak{D},R(\cdot))$ 成立着

$$(Q\varphi,\psi)=\int_{C_1}(Q(z)\varphi(z),\psi(z))_{\mathfrak{D}}d\mu(z).$$

由此可知(2.7)成立，因此对每个 $a\in\mathscr{L}$，

$$Q(z)a\in R(z)a. \tag{2.10}$$

对几乎所有 $z\in C_1$ 成立，因此有 $F\in\mathfrak{B}$, $\mu(C_1\backslash F)=0$，使得当 $z\in F$ 时，(2.10)对一切 $a\in\mathscr{L}$ 成立. 再由 Q 的有界性可知(2.10)对一切 $a\in\mathfrak{D}$ 成立. 因此只要当 $z\in C_1\backslash F$ 时，改令 $Q(z)=0$，那么 $Q(z)$ 即为所要求的算子值函数. 如果有 $Q^2=Q$，可知对每个 $a\in\mathscr{L}$，

$$Q^2(z)a=Q(z)a, \tag{2.11}$$

对几乎所有 $z\in C_1$ 成立，那么利用前面相同的方法可以在一个零集上把 $Q(z)$ 改为0而使对一切 $z\in C_1$, $Q(z)^2=Q(z)$. 证毕.

类似地，我们可以得到更一般的结果. 设 ν_j, $j=1,2$ 是 $(C_1,\mathfrak{B})$ 上两个有限的奇异测度，$\mu_j=m+\nu_j$, $\Omega_j=(C_1,\mathfrak{B},\mu_j)$ 且 μ_2 关于 μ_1 为绝对连续. $\mathfrak{D}_j$, $j=1,2$ 是可析复 Hilbert 空间，$R_j(\cdot)$ 为取值 $\mathscr{L}(\mathfrak{D}_j)$ 中投影算子值可测函数.

定理 2.5 Q 为 $L^2(\Omega_1,\mathfrak{D}_1,R_1(\cdot))$ 到 $L^2(\Omega_2,\mathfrak{D}_2,R_2(\cdot))$ 的有界线性算子，而且

$$Q\hat{U}=\hat{U}Q^{1)},$$

那么必有 C_1 上取值于 $\mathscr{L}(\mathfrak{D}_1\to\mathfrak{D}_2)$ 的一致有界的算子值强可测函数 $Q(\cdot)$ 使

$$Q(\cdot)R_1(\cdot)\mathfrak{D}_1\subset R_2(\cdot)\mathfrak{D}_2,\quad \|Q(e^{i\theta})\|\leqslant\|Q\|.$$

而使

$$(Qf)(e^{i\theta})=Q(e^{i\theta})\sqrt{\frac{d\mu_2(e^{i\theta})}{d\mu_1(e^{i\theta})}}f(e^{i\theta}). \tag{2.12}$$

§3 *SHU* 算子及 *HN* 算子的模型

1. *SHU* 中算子的奇异积分模型

1) 这里出现的两个 $\hat{U}$ 是不同的两个空间 $L^2(\Omega_j,\mathfrak{D}_j,R_j(\cdot))$, $j=1,2$ 上的两个算子.

定理 3.1 设 $\mathscr{H}$ 为可析的复 Hilbert 空间，$T=U|T|$ 为 $\mathscr{H}$ 上半亚正常算子，而且 U 可以延拓为 $\mathscr{H}$ 中酉算子. 那么必有定理 1.3 前所述的函数空间 $\hat{\mathscr{H}}$ 及其上的算子 $\hat{T}$（而且我们可以取 $\alpha(\cdot)\geqslant 0$, $R(\cdot)$ 为标准的）以及 $\mathscr{H}$ 到 $\hat{\mathscr{H}}$ 上的酉算子 W 使

$$WTW^{-1}=\hat{T},\quad WUW^{-1}=\hat{U}. \tag{3.1}$$

证 我们简记 $|T|_{(\pm)}=\mathscr{S}_U^{\pm}(|T|)$，又记

$$\mathring{\mathscr{D}}=\overline{(|T|_{(+)}-|T|_{(-)})\mathscr{H}}.$$

$\mathring{P}$ 为 $\mathscr{H}$ 到 $\mathring{\mathscr{D}}$ 上的投影算子. 又作 $(|T|_{+}-|T|_{-})\mathscr{H}$ 上双线性埃米泛函

$$\Phi(x,y)=((|T|-|T|_{(-)})(|T|_{(+)}-|T|_{(-)})^{-1/2}x,\ (|T|_{(+)}-|T|_{(-)})^{-1/2}y).$$

由于定理 II, 2.8, $|T|_{(-)}\leqslant|T|\leqslant|T|_{(+)}$, 所以

$$0\leqslant\Phi(x,x)\leqslant\|x\|^2,\ x\in(|T|_{(+)}-|T|_{(-)})\mathscr{H}. \tag{3.2}$$

由此易知 $\Phi(x,y)$ 可以唯一地延拓成 $\mathring{\mathscr{D}}$ 上双线性泛函（仍记为 Φ）而且 (3.2) 也成立. 由夏道行、吴卓人、严绍宗、舒五昌[1] 第六章 §6 定理 4 可知必有 $\mathring{\mathscr{D}}$ 上非负自共轭的压缩算子 B 使

$$(Bx,y)=(|T|-|T|_{(-)})(|T|_{(+)}-|T|_{(-)})^{-1/2}x,\ (|T|_{(+)}-|T|_{(-)})^{-1/2}y),\ x,y\in\mathring{\mathscr{D}} \tag{3.3}$$

我们作 $\mathscr{H}$ 上算子

$$|\mathring{T}|=B\mathring{P}.$$

它也是非负的自共轭的压缩算子，而且 $|\mathring{T}|\mathscr{H}\subset\mathring{\mathscr{D}}$. 这时易知

$$(|T|-|T|_{(-)})\mathring{P}=(|T|_{(+)}-|T|_{(-)})^{1/2}|\mathring{T}|(|T|_{(+)}-|T|_{(-)})^{1/2},$$

然而由 $|T|\leqslant|T|_{+}$, 易知

$$(|T|-|T|_{(-)})(I-\mathring{P})=0,$$

因此

$$|T|=(|T|_{(+)}-|T|_{(-)})^{1/2}|\mathring{T}|(|T|_{(+)}-|T|_{(-)})^{1/2}+|T|_{(-)}. \tag{3.4}$$

作

$$\mathring{T}=U|\mathring{T}|.$$

容易看出 $\mathring{T}$ 也是半亚正常的. 我们作相应于 $\mathring{T}$ 的极记号算子

$$|\mathring{T}|_{(\pm)} = \mathscr{S}_U^{\pm}(|\mathring{T}|), \quad \mathring{T}_{(\pm)} = \mathscr{S}_U^{\pm}(\mathring{T}),$$

由于 $|T|_{(+)} - |T|_{(-)}$ 与 U 可换，可知

$$(|T|_{(+)} - |T|_{(-)})^{1/2}|\mathring{T}|_{+}(|T|_{(+)} - |T|_{(-)})^{1/2}$$
$$= |T|_{(+)} - |T|_{(-)}, \tag{3.5}$$
$$(|T|_{(+)} - |T|_{(-)})^{1/2}|\mathring{T}|_{(-)}(|T|_{(+)} - |T|_{(-)})^{1/2} = 0.$$

但是 $0 \leqslant |\mathring{T}| \leqslant \mathring{P}$，由定理 II, 2.8 及 (3.5) 可知

$$|\mathring{T}|_{(+)} = \mathring{P}, \quad |\mathring{T}|_{(-)} = 0.$$

因此 $\mathring{T}_{(+)} = U\mathring{P}$，$\mathring{T}_{-} = 0$. 由 (3.4) 相应于 $\mathring{T}$ 的极差算子

$$\mathring{Q} = |\mathring{T}| - U|\mathring{T}|U^*,$$

满足

$$Q = (|T|_{(+)} - |T|_{(-)})^{1/2}\mathring{Q}(|T|_{(+)} - |T|_{(-)})^{1/2},$$

其中 $Q = |T| - U|T|U^*$. 由于

$$0 \leqslant Q \leqslant |T|_{(+)} - |T|_{(-)},$$

可知 $\mathring{Q}$ 也是非负自共轭的压缩算子. 我们记

$$\mathscr{H}(\mathring{T}) = \overline{V}\{U^n y \mid y \in \mathring{\mathscr{D}}, n = 0, \pm 1, \cdots\}$$

和 $\mathfrak{D}_1 = \overline{\mathring{Q}\mathring{\mathscr{D}}}$，作

$$\{U^n y \mid y \in \mathring{\mathscr{D}}, n = 0, \pm 1, \cdots\}$$

的线性组合全体到 $L^2(\mathfrak{D}_1)$ 中的算子 W_1 如下，当 $x \in \mathring{\mathscr{D}}$ 时，

$$W_1 U^m x = e^{im\theta}\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-in\theta}\mathring{Q}^{1/2}U^{*n}x,$$

注意 $\{e^{im\theta}\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的就范直交系，其中 $\Omega = (C_1, \mathfrak{B}, m)$.
当 $x, y \in \mathring{\mathscr{D}}$，$m, m'$ 为整数时，可知

$$(W_1 U^m x, W_1 U^{m'} y) = \sum_{n'-n=m'-m} (U^{*n'}\mathring{Q}U^n x, y)$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (U^{*k}\mathring{Q}U^k U^m x, U^{m'} y), \tag{3.6}$$

根据定理 II, 2.8 和定理 II, 2.2 可知

$$\mathring{P} = |\mathring{T}|_{(+)} - |\mathring{T}|_{(-)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} U^{*n}\mathring{Q}U^n$$

所以 (3.6) 又等于

$$(\mathring{P}U^m x, U^{m'}y) = (U^m x, U^{m'}y).$$

所以 W_1 是等距算子. 因此 W_1 可唯一地延拓为 $\mathscr{H}(\mathring{T})$ 到 $L^2(\mathfrak{D}_1)$ 中的等距算子. 记 $\mathscr{H}_1 = W_1\mathscr{H}(\mathring{T})$, P_1 为 $L^2(\mathfrak{D}_1)$ 到 $\mathscr{H}_1$ 上的投影. 则 W_1 为 $\mathscr{H}(\mathring{T})$ 到 $\mathscr{H}_1$ 的酉算子. 由于公式 (II. 2.3), 当 $x, y \in \mathring{\mathscr{D}}$, m, m' 为整数时, 按上述计算方法又有

$$(\mathfrak{P}W_1U^m x, W_1U^{m'}y) = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} e^{ik\theta}\mathring{Q}^{1/2}U^{*k}U^m x,$$

$$\sum_{k'=0}^{\infty} e^{ik'\theta}\mathring{Q}^{1/2}U^{*k'}U^{m'}y\Big) = (\gamma_U^-(\mathring{Q})U^m x, U^{m'}y)$$

$$= (|\mathring{T}|U^m x, U^{m'}y).$$

因此

$$W_1|\mathring{T}|W_1^{-1} = P_1\mathfrak{P}|_{\mathscr{H}_1}. \tag{3.7}$$

作 $L^2(\mathfrak{D}_1)$ 上酉算子 $\hat{U}$, 由于 $\mathscr{H}_1$ 对 $\hat{U}$ 和 $\hat{U}^{-1}$ 不变, 从而

$$P_1\hat{U} = \hat{U}P_1.$$

根据定理 2.4, 有投影算子值可测函数 $P_1(z)$, $z \in C_1$ 使

$$(P_1f)(e^{i\theta}) = P_1(e^{i\theta})f(e^{i\theta}), \quad f \in L^2(\mathfrak{D}_1).$$

我们注意由 $(|\mathring{T}|\mathscr{H}) \subset \mathring{\mathscr{D}}$ 和 $\mathring{T}^* = |\mathring{T}|U^*$ 可知

$$\mathring{T}^*\mathscr{H} \subset \mathring{\mathscr{D}} \subset \mathscr{H}(\mathring{\mathscr{D}}),$$

再由 $\overline{R(\mathring{T})}$[1] $\subset \overline{R(\mathring{T}^*)}$ 可知 $\mathscr{H}(\mathring{T})$ 约化 $\mathring{T}$.

由于 $\mathscr{H}(\mathring{T})$ 约化 U, 所以 $U|_{\mathscr{H}(\mathring{T})^\perp}$ 是 $\mathscr{H}(\mathring{T})^\perp$ 上酉算子, 由定理 2.4, 这时必有可析 Hilbert 空间 $\mathfrak{D}_2$, $(C_1, \mathfrak{B})$ 上测度 $\mu = m + \nu$, ν 集中在 $F \in \mathfrak{B}$ 上, $m(F) = 0$. 又有 $\Omega = (C_1, \mathfrak{B}, \mu)$ 上投影算子值可测函数 $P_2(\cdot)$, $\mathscr{H}(\mathring{T})^\perp$ 到 $L^2(\Omega, \mathfrak{D}_2, P_2(\cdot))$ 上酉算子 W_2 使得

$$W_2U|_{\mathscr{H}(\mathring{T})^\perp}W_2^{-1} = \hat{U}.$$

我们修改 $P_1(\cdot)$, 使当 $z \in F$ 时, $P_1(z) = 0$. 由于 $m(F) = 0$,

---

1) 这里 $R(A)$ 表示 A 的值域.

这样修改是允许的．作

$$\mathfrak{D}=\mathfrak{D}_1\oplus\mathfrak{D}_2,\quad R(\cdot)=P_1(\cdot)\oplus P_2(\cdot).$$

又作 $\mathscr{H}$ 到 $L^2(\Omega,\mathfrak{D},R(\cdot))$ 上酉算子 W 如下：

$$W(x+y)=W_1x+W_2y,\quad x\in\mathscr{H}(\mathring{T}),\ y\in\mathscr{H}(\mathring{T})^{\perp}.$$

这时显然有

$$WUW^{-1}=\hat{U}.$$

作算子

$$\alpha=W(|T|_{(+)}-|T|_{(-)})^{1/2}W^{-1}\geqslant 0,$$

由于 U 与 $(|T|_{(+)}-|T|_{(-)})^{1/2}$ 可以交换，所以 α 与 $\hat{U}$ 可以交换．再利用定理 2.4，有取值于 $\mathscr{L}(\mathfrak{D})$ 中的非负算子值可测函数 $\alpha(\cdot)$ 使

$$(\alpha f)(\cdot)=\alpha(\cdot)f(\cdot),$$

$$\alpha(\cdot)R(\cdot)=R(\cdot)\alpha(\cdot)=\alpha(\cdot).$$

又因为 $\overline{R(\alpha)}\subset\overline{R(T\mathring{\mathscr{D}})}$，所以

$$P_1(\cdot)\alpha(\cdot)=\alpha(\cdot).$$

由此可知当 $z\in F$ 时，

$$\alpha(z)=P_1(z)\alpha(z)=0.$$

类似地有 Ω 上取值于 $\mathscr{L}(\mathfrak{D})$ 中非负的算子值的一致有界的可测函数 $\beta(\cdot)$ 使

$$(W|T|_{(-)}W^{-1}f)(\cdot)=\beta(\cdot)f(\cdot),$$

$$\beta(\cdot)R(\cdot)=R(\cdot)\beta(\cdot)=\beta(\cdot).$$

再由 (3.4) 和 (3.7) 可知 (3.1) 成立．证毕．

半亚正常算子的奇异积分算子模型又称为函数模型．

2. 亚正常算子的模型　利用 Cayley 变换，我们可以从半亚正常算子的函数模型导出亚正常算子的函数模型如下．

定理 3.2　设 $T=u+iv$ 为可析复 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上亚正常算子，那么必有定理 1.6 前所述的函数空间 $\hat{\mathscr{H}}$ 及其上的算子 $\hat{T}$（可取 $\alpha(\cdot)$ 使 $\alpha(\cdot)\geqslant 0$，$R(\cdot)$ 为标准的），$\hat{u}$ 等以及 $\mathscr{H}$ 到 $\hat{\mathscr{H}}$ 上的酉算子 W 使

$$WTW^{-1}=\hat{T},\quad WuW^{-1}=\hat{u}.\tag{3.8}$$

证 作酉算子

$$U=(u+iI)(u-iI)^{-1},$$

不妨设 $V\geqslant mI$, $m>0$. 作算子

$$A=UV.$$

易知此时 $V=|A|_r$, 而且

$$\begin{aligned}|A|_r-|A|_l&=V-UVU^*\\&=(u-iI)^{-1}D_T(u+iI)^{-1}\geqslant 0,\end{aligned}$$

所以 A 为半亚正常的. 根据定理 3.1, 作出函数空间 $\hat{\mathscr{H}}_0=L^2(\Omega_0,\mathfrak{D},R_0(\cdot))$, 其中 $\Omega_0=(C_1,\mathfrak{B},\mu_0)$ 和 $\mathscr{H}$ 到 $\hat{\mathscr{H}}_0$ 的酉算子 W_0 使

$$\hat{A}_0=W_0AW_0^{-1}.$$

具有形式 (1.10). 记 u 的谱集为 Δ, 作变数变换

$$\mathscr{C}:x\longmapsto e^{i\theta}=\frac{x+i}{x-i},$$

显然测度 μ_0 集中在 $\mathscr{C}\Delta$ 中, 由于

$$dx=\frac{d\theta}{2\sin^2\theta/2},$$

作 $(\Delta,\mathfrak{B}_\Delta)$ 上测度

$$\mu_1(E)=\pi\int_{\mathscr{C}E}\frac{d\mu_0(e^{i\theta})}{\sin^2\theta/2}.$$

容易看出 $\mu_1=m+\nu_1$, 此地 m 为直线上 Lebesgue 测度, ν_1 为 R^1 上奇异测度, 又作

$$\Omega_1=(\Delta,\mathfrak{B}_\Delta,\mu_1),\quad R_1(x)=R_0(\mathscr{C}x).$$

记 $\hat{\mathscr{H}}_1=L^2(\Omega_1,\mathfrak{D},R_1(\cdot))$, 我们作 $\hat{\mathscr{H}}_0$ 到 $\hat{\mathscr{H}}_1$ 上酉算子 W_1 如下:

$$(W_1f)(x)=f(\mathscr{C}x)\cdot\pi^{-1/2}(x-i)^{-1}.$$

再记 $W=W_1W_0$, 那么立即可以算出

$$WUW^{-1}=(\hat{u}+i)(\hat{u}-i)^{-1}.$$

再考虑逆 Cayley 变换就得到

$$WuW^{-1}=\hat{u}.$$

再来计算 WvW^{-1}. 设 $a\in\mathfrak{D}$, n 为整数,

$$f(e^{i\theta}) = e^{in\theta}a.$$

由于当 $n \geqslant 0$ 时，

$$(W_1 f)(x) = \frac{(x+i)^n}{(x-i)^{n+1}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

是在下半平面解析的函数的境界值，因此

$$P(W_1 f) = W_1 f,$$

所以从直接计算可知

$$\mathfrak{P} f = W_1^{-1} P W_1 f. \tag{3.9}$$

当 $n < 0$ 时，也可以类似地算出 (3.9) 式. 由于

$$\{ e^{in\theta} a \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, a \in \mathfrak{D} \}$$

张成 $L^2(\Omega_0, \mathfrak{D})$，从而 (3.9) 对一切 $f \in L^2(\Omega_0, \mathfrak{D})$ 成立，由此可知当 $h \in \hat{\mathscr{H}}_1$ 时

$$\begin{aligned} W v W^{-1} h &= W_1 [\alpha \mathfrak{P}(\alpha W_1^{-1} h) + \beta W_1^{-1} h] \\ &= \alpha_1 P(\alpha_1 h) + \beta_1 h, \end{aligned}$$

其中 $\alpha_1(x) = \alpha(\mathscr{C} x)$, $\beta_1(x) = \beta(\mathscr{C} x)$. 这样就得到所要的 T 的函数模型.

例 3.1 我们考察例 I, 2-2 中的亚正常算子——H^2 上的算子 A：

$$(Af)(e^{i\theta}) = e^{i\theta} f(e^{i\theta}), \quad f \in H^2.$$

我们记

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta,$$

(它即是当把 $f(e^{i\theta})$ 看作单位圆内解析函数 $f(z)$ 的在 c_1 上的境界值时，$f(z)$ 在 $z = 0$ 的函数值). 记 A 的实部和虚部为 X 与 Y，那么

$$(Xf)(e^{i\theta}) = \cos\theta f(e^{i\theta}) - \frac{1}{2} e^{-i\theta} f(0)$$

$$(Yf)(e^{i\theta}) = \sin\theta f(e^{i\theta}) - \frac{i}{2} e^{-i\theta} f(0).$$

令 $E = [-1, 1]$. $\mathfrak{B}$ 为 E 上的 Borel 集全体. $\Omega = (E, \mathfrak{B},$

m). 我们作 H^2 到 $L^2(\Omega)$ 的算子W如下:

$$(Wf)(x)=(1-x^2)^{-1/4}[f(x+i\sqrt{1-x^2})\cdot(x+i\sqrt{1-x^2})-f(x-i\sqrt{1-x^2})\cdot(x-i\sqrt{1-x^2})]/\sqrt{2\pi}.$$

可以验证W是酉算子. 记

$$\hat{X}=WXW^{-1},\quad \hat{Y}=WYW^{-1},$$

那么可以验证

$$(\hat{X}g)(x)=xg(x),$$

$$(\hat{Y}g)(x)=-\sqrt{1-x^2}g(x)+\sqrt{2}(1-x^2)^{1/4}\cdot P(\sqrt{2}(1-(\cdot)^2)^{1/4}g(\cdot)).$$

这时 $\hat{A}=WAW^{-1}$ 形如 (1.24), 而且其中

$$\alpha(x)=\sqrt{2}(1-x^2)^{1/4},\quad \beta(x)=-(1-x^2)^{1/2}.$$

当 $|\lambda|<1$ 时, $\hat{A}^*$ 的相应于 λ 的单位特征向量为

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(1-|\lambda|^2)^{1/2}(1-x^2)^{1/4}}{1-2\lambda x+\lambda^2}.$$

我们略说一下这里的 W 是怎样求出来的. 对每个 $x\in[-1,1]$, 求出 X 相应于 x 的广义特征向量 (见 Гельфанд、Веленкин [1]) 它是

$$f_x(e^{i\theta})=\lim_{r\to1+0}(c_x)/[(e^{i\theta}-(x+i\sqrt{1-x^2})r)\cdot(e^{i\theta}-(x-i\sqrt{1-x^2})r)],$$

其中 c_x 为与 x 有关的常数, 那么

$$(Wf)(x)=(f,f_x)_{H^2}.$$

适当挑选 $c_x\left(=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-x)^{1/4}\right)$, 即使$W$成为酉算子了.

我们注意这时广义记号算子 $A_k=(1-k)A_-+kA_+$ 具有形式

$$(\hat{A}_kf)(x)=(x+i(-1+2k)\sqrt{1-x^2})f(x),$$

其中 $\hat{A}_k=WA_kW^{-1}$. 由此易知.

$$\sigma(A_k)=\sigma(\hat{A}_k)=\{x+i(-1+2k)\sqrt{1-x^2})|$$
$$-1\leqslant x\leqslant 1\},$$

而且易知 $\sigma(A)$ 为闭的单位圆. 因此

$$\sigma(A)=\bigcup_{0\leqslant k\leqslant 1}\sigma(A_k). \tag{3.10}$$

这个例子启发我们用广义记号算子的谱来决定亚正常算子的谱.

系 3.3 设 T 为完全非正常的, $\mathscr{H}\neq\{0\}$. 如果 T 是亚正常的或 SHU 算子,则 T 和 $\mathscr{H}$ 的相应的奇异积分算子函数模型中测度 $\nu=0$.

证 我们仅考察半亚正常的情况, 显然这时 T 的模型 $\hat{T}$ 在 $\hat{\mathscr{H}}$ 中也是完全非正常的. 如果 $\nu\neq 0$,而集中在 $F\in\mathfrak{B}$ 上, $m(F)=0$. 那么我们作 $\hat{\mathscr{H}}$ 的子空间

$$\mathscr{N}=\{f|f\in\hat{\mathscr{H}},f(e^{i\theta})=0,\text{ 当 }e^{i\theta}\bar{\in}F\}.$$

当 $f\in\mathscr{N}$ 时, $\alpha f=0$. 因此当 $f\in\mathscr{N}$ 时,

$$(\hat{T}f)(e^{i\theta})=e^{i\theta}\beta(e^{i\theta})f(e^{i\theta}),$$
$$(\hat{T}^*f)(e^{i\theta})=e^{-i\theta}\beta(e^{i\theta})f(e^{i\theta}).$$

这样一来, $\mathscr{N}$ 成为 $\hat{T}$ 的正常子空间, 而且 $\mathscr{N}$ 显然是非平凡的, 这和 $\hat{T}$ 为完全非正常的矛盾. 因此 $\nu=0$. 证毕.

我们在此对"发现"亚正常算子的奇异积分模型的经历赘言几句. 从 Von Neumann 的关于量子力学中 Heisenberg 交换关系的理论和 Wielandt 的有关定理(可参看夏道行 [13] 第 6 章) 看出从 A^*A-AA^* 可能在很大的程度上决定 A. 我们首先考察了 $A^*A-AA^*=D$ 的值域是一维的情况, 利用经典分析解此算子方程对已知 D 解 A (见夏道行 [2]), 发现它的一般解是奇异积分算子. 嗣后发觉这种解法太复杂,特别到了研究半亚正常算子时简直难以用原法, 但幸亏这时已有了记号算子的概念, 著者自然地跟着引进极记号算子的概念,从而有 (II, 2.3) 式. 然而此式与 $H^2(\mathfrak{D})$ 中函数的展开式有些相象,这就启发我们用本节中的证法.

§4 半亚正常算子的函数模型

在 §3 中,我们研究了 SHU 中算子的奇异积分模型. 虽然半

亚正常算子可以延拓成 SHU 中的算子，原则上应能从 SHU 中算子的模型导出一般半亚正常算子的准确模型．但这也不见得直接和显然．这里我们用另一方法给出半亚正常算子的准确的奇异积分模型．但本节要用到附录中的知识．

1. 单向平移算子的情况和一些引理

我们先考察在极分解中等距算子为单向平移算子这样的一个特殊情况．

引理 4.1 设 $T = S|T|$，S 为复可析 Hilbert 空间上单向平移算子[1]．那么必有辅助的 Hilbert 空间 $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{E}$、有界解析函数 $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \Xi(\cdot)\}$[2] 和 $\mathscr{H}$ 到 $H^2(\mathfrak{F})$ 的酉算子 W，使 $\hat{S} = WSW^{-1}$，$|\hat{T}| = W|T|W^{-1}$ 以及 $\hat{Q} = |\hat{T}| - \hat{S}|\hat{T}|\hat{S}^*$ 具有如下的形式：当 $\varphi \in H^2(\mathfrak{F})$ 时，

$$(\hat{S}\varphi)(e^{it}) = e^{it}\varphi(e^{it}), \tag{4.1}$$

$$(|\hat{T}|\varphi)(e^{it}) = \Xi(e^{it})\mathfrak{P}(\Xi(\cdot)^*\varphi(\cdot)), \quad \varphi \in H^2(\mathfrak{F}) \tag{4.2}$$

其中 $\mathfrak{P}$ 为 $L^2(\mathfrak{E})$ 到 $H^2(\mathfrak{E})$ 的投影算子．而且

$$(\hat{Q}\varphi)(\cdot) = \Xi(\cdot)\mathfrak{P}_0(\Xi(\cdot)^*\varphi(\cdot)). \tag{4.3}$$

其中

$$\mathfrak{P}_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})dt.$$

证 由于 S 是单向平移算子，所以有辅助的 Hilbert 空间 $\mathfrak{F}$，和 $\mathscr{H}$ 到 $H^2(\mathfrak{F})$ 的酉算子 W 使 $\hat{S} = WSW^{-1}$ 的形式是 (4.1)．

容易看出这时

$$S - \lim_{n\to\infty} S^{*n} = 0.$$

由定理 II, 2.8，$T \in \mathscr{S}_S^-$．由于当 $x, y \in \mathscr{H}$ 时，

$$(\mathscr{S}_S^-(T)x, y) = \lim_{n\to\infty}(TS^{*n}x, S^{*n}y) = 0$$

1) (见附录 §3) 即存在一个辅助 Hilbert 空间 $\mathfrak{F}$，酉算子 $W: \mathscr{H} \longmapsto H^2(\mathfrak{F})$，使 $(WSW^{-1}f)(e^{it}) = e^{it}f(e^{it})$, $f \in H^2(\mathfrak{F})$.

2) 即当 $|\lambda| < 1$ 时，$\|\Xi(\lambda)\| \leqslant c$，$c$ 与 λ 无关．而且存在境界值函数 $\Xi(e^{it})$，使当 $f \in H^2(\mathfrak{D})$ 时，
$$\lim_{r\to 1-0}\|\Xi(\cdot)f(\cdot) - \Xi(r(\cdot))f(r(\cdot))\|_{H^2(\mathfrak{F})} = 0.$$

即知 $\mathscr{S}_S^-(T)=0$. 又由 (II, 2.3) 得到

$$|T|=\gamma_S^-(|T|-S|T|S^*)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}S^n(|T|-S|T|S^*)S^{*n} \qquad (4.4)$$

仍然和定理 3.1 的证法相同，记 $Q=|T|-S|T|S^*$, $\mathfrak{C}=\overline{Q\mathscr{H}}$, 作 $\mathscr{H}$ 到 $H^2(\mathfrak{C})$ 的算子 J 如下：

$$(Jf)(e^{it})=\sum_{n=0}^{\infty}e^{nit}Q^{1/2}S^{*n}f, \quad f\in\mathscr{H}, \qquad (4.5)$$

由 (4.4) 易知

$$\|Jf\|^2_{H^2(\mathfrak{C})}=(|T|f,f), \quad f\in\mathscr{H}.$$

因此 J 是线性有界算子，而且

$$|T|=J^*J.$$

我们令 U_+ 为 $H^2(\mathfrak{F})$ 中如下的算子，

$$(U_+f)(e^{it})=e^{it}f(e^{it}).$$

那么

$$(U_+^*f)(e^{it})=e^{-it}(f(e^{it})-f(0)),$$
$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{it})dt, \qquad (4.6)$$

由 (4.5—6) 可知 $JS^*=U_+^*J$. 因此

$$SJ^*=J^*U_+. \qquad (4.7)$$

记 $J_1=WJ^*$, 那么由 (4.7) 和 (4.1) 得到

$$\hat{S}J_1=J_1U_+.$$

根据附录引理 3.4，可知必有有界解析函数 $\{\mathfrak{C},\mathfrak{F},\Xi(\cdot)\}$ 使

$$(J_1f)(\cdot)=\Xi(\cdot)f(\cdot),$$

这时

$$(J_1^*f)(\cdot)=\mathfrak{P}(\Xi(\cdot)^*f(\cdot)).$$

因此 $|\hat{T}|=W|T|W^{-1}=J_1J_1^*$ 有如下形式

$$|\hat{T}|f=\Xi\mathfrak{P}(\Xi^*f).$$

由于

$$(\hat{S}^*f)(e^{it})=e^{-it}(f(e^{it})-f(0)),$$

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{it})dt$$

和 $\mathfrak{P}(\Xi(e^{it})^*e^{-it}a)=0$，其中 $a\in\mathfrak{F}$，我们立即可以算出(4.3).证毕.

我们定义 $[\mathfrak{P}_0(\Xi^*\Xi)]^{1/2}\mathfrak{F}$ 到 $\mathscr{H}$ 的线性算子 k_Ξ 如下：当

$$a=[\mathfrak{P}_0(\Xi^*\Xi)]^{1/2}b,\quad b\in\mathfrak{F}$$

时，

$$k_\Xi a=\Xi(\cdot)b. \tag{4.8}$$

这时容易算出

$$\|k_\Xi a\|=\|a\|.$$

因此尽管对一个 a 可能有不同的 b 与之对应，但 $k_\Xi a$ 仍有确定的意义，而且 k_Ξ 是等距算子，因此它可以唯一地延拓成 $\overline{[\mathfrak{P}_0(\Xi^*\Xi)]^{1/2}\mathfrak{F}}$ 到 $\mathscr{H}$ 的等距算子，仍记为 k_Ξ.

引理 4.2 算子 k_Ξ 有如下的性质

$$k_\Xi\overline{[\mathfrak{P}_0(\Xi^*\Xi)]^{1/2}\mathfrak{F}}=\overline{\hat{Q}\mathscr{H}}, \tag{4.9}$$

而且对于 $[0,\|\hat{Q}\|]$ 上任一连续函数 f，当 $f(0)=0$ 时成立着

$$f(\hat{Q})=k_\Xi f(\mathfrak{P}_0(\Xi^*\Xi))k_\Xi^*. \tag{4.10}$$

证 利用(4.8)容易算出，当 $b\in\mathfrak{F}$，$\varphi\in\hat{\mathscr{H}}$ 时，由于

$$(k_\Xi[\mathfrak{P}_0(\Xi^*\Xi)]^{1/2}b,\varphi)=(a,\mathfrak{P}_0(\Xi^*\varphi)),$$

所以

$$[P_0(\Xi^*\Xi)]^{1/2}k_\Xi^*\varphi=\mathfrak{P}_0(\Xi^*\varphi).$$

于是

$$k_\Xi\mathfrak{P}_0(\Xi^*\Xi)k_\Xi^*\varphi=\hat{Q}\varphi. \tag{4.11}$$

这就证明了(4.9). 记 $M=\overline{[\mathfrak{P}_0(\Xi^*\Xi)]^{1/2}\mathfrak{F}}$ 由于 k_Ξ 是等距算子，

$$k_\Xi^*k_\Xi=I|_M.$$

因此由(4.11)知道对一切多项式 f，$f(0)=0$ 成立着(4.10)，所以对满足 $f(0)=0$ 的连续函数(4.10)成立. 证毕.

完全类似地对定理 3.1 中的模型，我们定义 $\mathfrak{P}_0(\alpha^2)^{1/2}\mathfrak{D}$ 到 $\hat{\mathscr{H}}$ 的线性算子 k_α 如下，当 $a=[\mathfrak{P}_0(\alpha\alpha^*)]^{1/2}b$，$a\in\mathfrak{D}$ 时，

$$k_\alpha a = \alpha(\cdot)^* b,$$

这也是等距算子，而且可唯一地延拓成为 $\overline{\mathfrak{P}_0(\alpha^2)^{1/2}\mathfrak{D}}$ 到 $\hat{\mathscr{H}}$ 的等距算子，仍记为 k_α，同样地成立着

引理 4.3 算子 k_α 具有如下的性质：

$$k_\alpha \overline{[\mathfrak{P}_0(\alpha\alpha^*)]^{1/2}\mathfrak{D}} = \overline{\hat{Q}\hat{\mathscr{H}}}. \tag{4.12}$$

对于 $[0, \|\hat{Q}\|]$ 上任一连续函数 f，$f(0) = 0$ 成立着

$$f(\hat{Q}) = k_\alpha(\mathfrak{P}_0(\alpha\alpha^*))k_\alpha^*. \tag{4.13}$$

而且

$$[\mathfrak{P}_0(\alpha\alpha^*)]^{1/2}k_\alpha^* f = \mathfrak{P}_0(\alpha f).$$

我们为了把一般情况分解为 *SHU* 中算子和引理 4.1 的情况，我们先引入如下的简单的引理.

引理 4.4 设 $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$，把 $\mathscr{H}$ 中算子按此分解写成矩阵形式

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

其中 A_{ij} 为 $\mathscr{H}_j$ 到 $\mathscr{H}_i$ 的线性有界算子. 那么 $A \geqslant 0$ 的充要条件是

$$A_{11} \geqslant 0, \quad A_{22} \geqslant 0, \quad A_{21} = A_{12}^*, \tag{4.14}$$

而且存在 $\overline{A_{22}\mathscr{H}_2}$ 到 $\overline{A_{11}\mathscr{H}_1}$ 的压缩算子 B（即 $\|B\| \leqslant 1$）使

$$A_{12} = A_{11}^{1/2} B A_{22}^{1/2}. \tag{4.15}$$

证 条件的充分性是显然的. 设 $A \geqslant 0$，那么 (4.14) 显然成立. 由于当 $x_j \in \mathscr{H}_j$ 时，对任何复数 λ，

$$(A(x_1 \oplus \lambda x_2), x_1 \oplus \lambda x_2) = \|A_{11}^{1/2}x_1\|^2 + |\lambda|^2\|A_{22}^{1/2}x_2\|^2 + 2\operatorname{Re}\lambda(A_{12}x_2, x_1) \geqslant 0$$

立即可知

$$|(A_{12}x_2, x_1)| \leqslant \|A_{11}^{1/2}x_1\| \cdot \|A_{22}^{1/2}x_2\|.$$

记 $B_j = A_{jj}^{1/2}x_j$，定义 $A_{22}^{1/2}\mathscr{H}_2 \times A_{11}^{1/2}\mathscr{H}_1$ 上泛函

$$B(y_2, y_1) = (A_{12}x_2, x_1).$$

它关于 y_2 是线性，关于 y_1 是共轭线性，而且满足条件

$$|B(y_2, y_1)| \leqslant \|y_2\|\|y_1\|.$$

类似于夏，严，吴，舒[1]第6章§6的方法可知存在 $\overline{A_{22}\mathscr{H}_2}$ 到 $\overline{A_{11}\mathscr{H}_1}$ 的线性算子 B 使

$$B(y_2, y_1) = (By_2, y_1),$$

显然 $\|B\| \leqslant 1$，且(4.15)成立．证毕．

2. 奇异积分模型

定理 4.5 设 $T = V|T|$ 为可析 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的半亚正常算子，那么必有定理 3.1 中的 Hilbert 空间 $L^2(\Omega, \mathfrak{D}, R(\cdot))$ 和函数 $\alpha(\cdot)$，$\beta(\cdot)$，引理 4.1 中的 Hardy 空间 $H^2(\mathfrak{F})$ 和有界解析函数 $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \Xi(\cdot)\}$，$\mathfrak{D}$ 到 $\mathfrak{E}$ 的压缩算子 $c(\|c\| \leqslant 1)$，$\mathscr{H}$ 到

$$\hat{\mathscr{H}} = H^2(\mathfrak{F}) \oplus L^2(\Omega, \mathfrak{D}, R(\cdot))$$

的酉算子 W，使 $\hat{V} = WVW^{-1}$ 和 $|\hat{T}| = W|T|W^{-1}$ 具有如下形式：当 $\varphi \oplus f \in \hat{\mathscr{H}}$ 时，

$$(\hat{V}\varphi \oplus f)(e^{it}) = e^{it}\varphi(e^{it}) \oplus e^{it}f(e^{it}), \tag{4.16}$$

$$|\hat{T}|(\varphi \oplus f) = (\Xi(\cdot)\mathfrak{P}(\Xi^*\varphi) + c\alpha f) \oplus [\beta(\cdot)f(\cdot) + \alpha(\cdot)\mathfrak{P}(c^*\Xi^*\varphi + \alpha f)]. \tag{4.17}$$

证 (1) 由于 V 可以延拓为等距算子，由附录§2，$\mathscr{H}$ 可分解为 $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$，使 $S = V|_{\mathscr{H}_1}$ 为单向平移算子，$U = V|_{\mathscr{H}_2}$ 是酉算子．这时 $|T|$ 可以写成矩阵形式

$$|T| = \begin{pmatrix} |T_1|, & T_{12} \\ T_{12}^*, & |T_2| \end{pmatrix}.$$

由于 $|T| \geqslant V|T|V^*$，可知

$$T_1 = S|T_1|$$

满足引理 4.1 的条件，而且 $T_2 = U|T_2| \in SHU$，同时

$$|T| - V|T|V^* = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_1^{1/2}BQ_2^{1/2} \\ Q_2^{1/2}B^*Q_1^{1/2} & Q_2 \end{pmatrix},$$

其中 $Q_1 = |T_1| - S|T_1|S^*$，$Q_2 = |T_2| - U|T_2|U^*$，B 为 $\overline{Q_2\mathscr{H}_2}$ 到 $\overline{Q_1\mathscr{H}_1}$ 的压缩算子．

(2) 根据定理 3.1 或引理 4.1 的证法可知

$$T_{12} = \sum_{n=0}^{\infty} S^n Q_1^{1/2} B Q_2^{1/2} U^{-n}, \tag{4.18}$$

又有酉算子 $W_1: \mathscr{H} \longrightarrow {}_1\hat{\mathscr{H}}_1 = H^2(\mathfrak{F})$, $W_2: \mathscr{H}_2 \longrightarrow \hat{\mathscr{H}}_2 = L^2(\Omega, \mathfrak{D}, R(\cdot))$ 使

$$(\hat{S}\varphi)(e^{it}) = e^{it}\varphi(e^{it}), \quad (\hat{U}f)(e^{it}) = e^{it}f(e^{it}), \tag{4.19}$$

其中 $\hat{S} = W_1 S W_1^{-1}$, $\hat{U} = W_2 U W_2^{-1}$, 而且

$$(W_1 |T_1| W_1^{-1}\varphi)(\cdot) = \Xi(\cdot)\mathfrak{P}(\Xi^*\varphi), \tag{4.20}$$

$$(W_2 |T_2| W_2^{-1}f)(\cdot) = \beta(\cdot)f(\cdot) + \alpha(\cdot)^*\mathfrak{P}(\alpha f). \tag{4.21}$$

其中 $\mathfrak{P}$ 表示 $L^2(\mathfrak{D})$ 到 $H^2(\mathfrak{D})$ 或 $L^2(\mathfrak{E})$ 到 $H^2(\mathfrak{E})$ 的投影. 我们定义算子W 如下,当 $x_j \in \mathscr{H}_j$ 时

$$W: x_1 \oplus x_2 \longmapsto W_1 x_1 \oplus W_2 x_2, \tag{4.22}$$

那么W为 $\mathscr{H}$ 到 $\hat{\mathscr{H}}$ 的酉算子,而且由 (4.19) 及 (4.22) 知 (4.16) 成立. 为了证明 (4.17) 只要研究算子

$$\hat{T}_{12} = W_1 T_{12} W_2^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{S}^n \hat{Q}_1^{1/2} \hat{B} \hat{Q}_2^{1/2} \hat{U}^{-n}, \tag{4.23}$$

其中 $\hat{Q}_j = W_j Q_j W_j^{-1}$, $j = 1, 2$, $\hat{B} = W_1 B W_2^{-1}$.

由 (4.10) 和 (4.13) 可知

$$\begin{aligned}(\hat{Q}_1^{1/2} \hat{B} \hat{Q}_2^{1/2})g &= k_\Xi(\mathfrak{P}_0(\Xi^*\Xi))^{1/2} k_\Xi^* \hat{B} k_\alpha \mathfrak{P}_0(\alpha g) \\ &= \Xi(\cdot) c \mathfrak{P}_0(\alpha g).\end{aligned} \tag{4.24}$$

由 (4.23—24) 立即得到

$$(\hat{T}_{12}f)(e^{it}) = \Xi(e^{it})\mathfrak{P}(c\alpha f), \quad f \in \hat{\mathscr{H}}_2.$$

类似地

$$(\hat{T}_{12}^*\varphi)(e^{it}) = \alpha(e^{it})c^*\mathfrak{P}(\Xi^*\varphi), \quad \varphi \in \hat{\mathscr{H}}_1.$$

所以 (4.17) 成立. 证毕.

最后我们还可以很容易地验证定理 4.5 之逆.

定理 4.6 设 $L^2(\Omega, \mathfrak{D}, R(\cdot))$, $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ 满足定理 2 的条件, $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \Xi(\cdot)\}$ 为 $|\lambda| < 1$ 上有界解析函数, c 为 $\mathfrak{D}$ 到 $\mathfrak{E}$ 的压缩算子 ($\|c\| \leqslant 1$), 又 $\hat{V}$ 和 $|\hat{T}|$ 形如(4.16—17).那么算子 $\hat{T} = \hat{V}|\hat{T}|$ 必为半亚正常的.

由此我们得到了半亚正常算子的准确的奇异积分模型.

注 如果我们改记 $\mathfrak{F}\oplus\mathfrak{D}$ 为 $\mathfrak{D}_1$，令 $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}$，$\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}$ 分别为 $\mathfrak{D}_1$ 到 $\mathfrak{D}$ 和 $\mathfrak{F}$ 的投影算子，又作

$$R_1(\cdot) = P_{\mathfrak{F}} + R(\cdot)P_{\mathfrak{D}},$$
$$\alpha_1(\cdot) = c^*\Xi(\cdot)^*\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} + \alpha(\cdot)P_{\mathfrak{D}},$$
$$\beta_1(\cdot) = \beta(\cdot)\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}, \tag{4.25}$$

令 $f_1(\cdot) = \varphi(\cdot)\oplus f(\cdot)$，那么 (4.16—17) 可改成

$$(\hat{V}f_1)(e^{it}) = e^{it}f_1(e^{it}), \tag{4.26}$$
$$(|\hat{T}|f_1)(e^{it}) = \beta_1(e^{it})f_1(e^{it}) + \alpha_1(e^{it})^*\mathfrak{P}(\alpha_1(\cdot)f_1(\cdot)). \tag{4.27}$$

因此 (4.26—27) 在形式上仍与 §2 和 §3 中 *SHU* 中算子的奇异积分模型一致。然而函数空间却从 $L^2(\Omega, \mathfrak{D}_1, R_1(\cdot))$ 缩小为 $\mathscr{H}$。但除此之外，定理 4.5 的意义还在于把 α_1，β_1 的形式更为细致地刻画为 (4.25)。

第四章　半亚正常算子谱与广义极记号算子谱的关系

决定算子的谱是算子谱理论中的一个首先要解决的问题．本章中就是要用广义记号算子(或广义极记号算子)来决定亚正常算子(相应地半亚正常算子)的谱．由于广义记号算子是正常算子，SHU 中算子的广义极记号算子也是正常算子，而且它们的模型也比较简单，它们的谱较易决定——§1 中我们将给出决定它们的方法．因此用广义记号算子的谱决定亚正常算子的谱是有意义的．

§1　广义记号算子的谱

1. 正常乘算子的谱　为了要决定半亚正常算子和亚正常算子的谱，需要研究广义记号算子的谱，由于亚正常算子和 SHU 中的算子的记号算子都是正常算子，它的谱是较易于定出的．我们仅就奇异积分模型情况下的记号算子来讨论其谱．因此我们要考虑下述情况下的正常算子——乘算子——的谱．

设 $\Omega=(E,\mathfrak{B},\mu)$ 为 σ 有限的完备测度空间．$\mathfrak{D}$ 为一辅助的可析复 Hilbert 空间，$\mathscr{H}=L^2(\Omega,\mathfrak{D},R(\cdot))$，其中 $R(\cdot)$ 为强可测投影算子值函数．设 $M(\cdot)$ 是 Ω 上强可测正常算子值函数，而且 $M(\cdot)$ 一致有界，满足

$$M(\cdot)R(\cdot)=R(\cdot)M(\cdot)=M(\cdot).$$

我们把 $M(x)$ 看成仅是 $R(x)\mathfrak{D}$ 中的正常算子．作 $\mathscr{H}$ 上乘算子

$$(Mf)(x)=M(x)f(x),\quad f\in\mathscr{H} \tag{1.1}$$

容易证明M是 $\mathscr{H}$ 中正常算子．

引理 1.1　设M为 (1.1) 中的乘算子，则

$$\operatorname{dis}(\lambda, \sigma(M))^{1)} = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in E} \operatorname{dis}(\lambda, \sigma(M(x))) \tag{1.2}$$

因此

$$\sigma(M) = \{\lambda \mid \operatorname*{ess\,inf}_{x\in E} \operatorname{dis}(\lambda, \sigma(M(x))) = 0\}.$$

另外若 $R(x) \equiv I$，则

$$\operatorname{dis}(\lambda, \sigma(M)) = \inf_{\|a\|=1} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in E} \|(\lambda I - M(x))a\|. \tag{1.3}$$

证 对任一 $a \in \mathfrak{D}$，$f \in L^2(\Omega)$，我们有 $f(\cdot)R(\cdot)a \in \mathscr{H}$. 由于 $M(x)$ 是正常算子，对任何 $b \in \mathfrak{D}$，

$$\|(\lambda I - M(x))b\|_{\mathfrak{D}} \geqslant \operatorname{dis}(\lambda, \sigma(M(x)))\|b\|,$$

因此

$$\begin{aligned}
\int \|(\lambda I - M(x))R(x)a\|_{\mathfrak{D}}^2 |f(x)|^2 d\mu(x) \\
= \|(\lambda I - M)f(\cdot)R(\cdot)a\|^2 \\
\geqslant \operatorname{dis}(\lambda, \sigma(M)) \int \|R(x)a\|_{\mathfrak{D}}^2 |f(x)|^2 d\mu(x).
\end{aligned}$$

由于 f 的任意性，可知必有 E 中零集 $F_a \in \mathfrak{B}$ 使

$$\|(\lambda I - M(x))R(x)a\|_{\mathfrak{D}} \geqslant \operatorname{dis}(\lambda, \sigma(M))\|R(x)a\|_{\mathfrak{D}}, \quad x \bar{\in} F_a$$

我们取 $\mathfrak{D}$ 中稠密点列 $\{a_n\}$，令 $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{a_n}$，那么由于 $\{R(x)a_n\}$ 在 $R(x)\mathfrak{D}$ 中稠密可知

$$\|(\lambda I - M(x))b\|_{\mathfrak{D}} \geqslant \operatorname{dis}(\lambda, \sigma(M))\|b\|, \quad b \in R(x)\mathfrak{D}, \quad x \bar{\in} F. \tag{1.4}$$

所以由 $M(x)$ 的正常性可知

$$\operatorname{dis}(\lambda, \sigma(M(x))) = \inf_{\|b\|=1, b\in R(x)\mathfrak{D}} \|(\lambda I - M(x))b\| \tag{1.5}$$

因此有 (1.4—5) 得到

$$\operatorname{dis}(\lambda, \sigma(M(x))) \geqslant \operatorname{dis}(\lambda, \sigma(M)), \quad x \in E \backslash F.$$

所以

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x\in E} \operatorname{dis}(\lambda, \sigma(M(x))) \geqslant \operatorname{dis}(\lambda, \sigma(M)). \tag{1.6}$$

---

1) dis(λ, M) 表示 λ 到集 M 之距离.

另一方面，由于 M 是正常的，

$$[\operatorname{dis}(\lambda, \sigma(M))]^2 = \inf_{\substack{\|f\|=1 \\ f\in\mathscr{H}}} \int \|(\lambda I - M(x))f(x)\|^2 d\mu(x)$$

$$\geqslant \inf_{\|f\|=1, f\in\mathscr{H}} \int [\operatorname{dis}(\lambda, \sigma(M(x)))]^2 \|f(x)\|^2 d\mu(x)$$

$$\geqslant \operatorname{ess}\inf_{x\in E} [\operatorname{dis}(\lambda, \sigma(M(x)))]^2$$

把它和 (1.6) 结合起来就得到 (1.2).

再来证 (1.3). 任取一列在 $\mathfrak{D}$ 的单位球面 $\{x \mid \|x\| = 1\}$ 上稠密的单位向量 $\{a_n\}$, 必有零集 $F \subset E$ 使

$$\operatorname{dis}(\lambda, \sigma(M)) = \inf_{x\in E\setminus F} \operatorname{dis}(\lambda, \sigma(M(x)))$$

同时

$$\operatorname{ess}\inf_{x\in E} \|(\lambda I - M(x))a_n\| = \inf_{x\in E\setminus F} \|(\lambda I - M(x))a_n\|.$$

因此

$$\inf_{\|a\|=1} \operatorname{ess}\inf_{x\in E} \|(\lambda I - M(x))a\| = \inf_n \inf_{x\in E\setminus F} \|(\lambda I - M(x))a_n\|$$

$$= \inf_{x\in E\setminus F} \inf_n \|(\lambda I - M(x))a_n\| = \operatorname{dis}(\lambda, \sigma(M)).$$

证毕.

2. 广义记号算子的谱的和集 在下面所考虑的一些命题中，当换算子 T 为与其酉等价的算子时结论不变. 因此我们下面考虑亚正常算子时，只考虑它的奇异积分模型(而且简写 $\hat{T}$ 为 T 等). 那么由定理 III, 3.2 和 (III, 1.29), 我们知道 T_k 为乘算子

$$(T_k f) = T_k(x) f(x), \quad T_k(x) = x + i(\beta(x) + k\alpha(x)^2), \tag{1.7}$$

其中 $\alpha(x) \geqslant 0$. 不妨设

$$\sup_{x\in E} \|\alpha(x)\| \leqslant B, \quad \sup_{x\in E} \|\beta(x)\| \leqslant B \tag{1.8}$$

引理 1.2 设 T 为亚正常算子，则

$$\tau(T) = \bigcup_{0\leqslant k\leqslant 1} \sigma(T_k) \tag{1.9}$$

为闭集.

证 若 $\operatorname{dis}(z, \tau(T)) = 0$, 则存在 k_n, $0 \leqslant k_n \leqslant 1$, $k_n \to k_0$

使

$$\operatorname{dis}(z_0, \sigma(T_{k_n})) \to 0. \tag{1.10}$$

由于

$$\|T_k(x) - T_{k'}(x)\| \leqslant B^2|k - k'|,$$

因此

$$\inf_{\|a\|=1}\|(z_0 I - T_k(x))a\| \leqslant \inf_{\|a\|=1}\|(z_0 I - T_k(x))a\| + B^2|k - k'|.$$

即

$$\operatorname{dis}(z_0, \sigma(T_k(x))) \leqslant \operatorname{dis}(z_0, \sigma(T_{k'}(x)) + B^2|k - k'|.$$

由引理 1.1 可以得到

$$|\operatorname{dis}(z_0, \sigma(T_k)) - \operatorname{dis}(z_0, \sigma(T_{k'}))| \leqslant B^2|k - k'|, \tag{1.11}$$

由 (1.10—11) 立即得到

$$\operatorname{dis}(z_0, \sigma(T_k)) = 0.$$

即 $z_0 \in \tau(T)$. 所以 $\tau(T)$ 是闭的. 证毕.

3. 一类预解式的估计

引理 1.3 设 $z_0 = x_0 + iy_0$, x_0, y_0 为实数, $\eta = \operatorname{dis}(z_0, \tau(T)) > 0$, $K = \eta/6B^2$, 那么必有一数 δ 适合

$$0 < \delta < K\eta^2/3B^2(1 + 2K),$$

$$\delta + (1 + K)(2B\delta + \delta^2) < \frac{\eta}{6}, \tag{1.12}$$

使当 $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap E$ 时,

$$\left(\beta(x) + \frac{1}{2}\alpha(x)^2 - y_0 I\right)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{D}), \tag{1.13}$$

而且

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in[x_0-\delta, x_0+\delta]\cap E}\left\|\alpha(x)\left(\beta(x) + \frac{1}{2}\alpha(x)^2 - y_0 I\right)^{-1}\alpha(x)\right\| \leqslant (K + 1/2)^{-1}, \tag{1.14}$$

证 由引理 1.1, 存在一 μ 零集 F 使当 $x \in E\backslash F$ 时,

$$\operatorname{dis}(z_0, \sigma(T_k(x))) \geqslant \operatorname{dis}(z_0, \sigma(T_k)) \geqslant \eta$$

因此

$$\|(T_k(x)-z_0I)R(x)h\|\geqslant\eta\|R(x)h\|,\quad h\in\mathfrak{D},\quad(1.15)$$

当 $-K<k<1+K$ 时,取 $k'\in[0,1]$ 使 $|k-k'|<K$,取 δ 适合 (1.12). 下面我们将 I 看成 $R(x)\mathfrak{D}$ 中单位算子,由 (1.15),当 $|x-x_0|<\delta$, $|s|<\delta$ 时有

$$\begin{aligned}&\|(\beta(x)+k(\alpha(x)+sI)^2-y_0I)R(x)h\|\\&\quad\geqslant\|(T_{k'}(x)-z_0I)R(x)h\|-\\&\qquad\{|x-x_0|+|k|(2B(|s|+|s|^2)+|k-k'|B^2\}\\&\qquad\cdot\|R(x)h\|\geqslant\frac{2}{3}\eta\|R(x)h\|.\end{aligned}$$

因此

$$(\beta(x)+k(\alpha(x)+sI)^2-y_0I)^{-1}\in\mathscr{L}(R(x)\mathfrak{D}).$$

记

$$\begin{aligned}S(x)=(\alpha(x)+sI)^{-1}(\beta(x)+(\alpha(x)+sI)^2/2\\-y_0I)(\alpha(x)+sI)^{-1},\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}S(x)-\lambda I=(\alpha(x)+sI)^{-1}\Big(\beta(x)\\+\Big(\frac{1}{2}-\lambda\Big)(\alpha(x)+sI)^2-y_0I\Big)(\alpha(x)+sI)^{-1}.\end{aligned}$$

所以当 $|\lambda|\leqslant K+\frac{1}{2}$ 时,$S(x)-\lambda I$ 有逆算子. 由于 $S(x)$ 是自共轭算子,因此

$$\|S(x)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{K+1/2}$$

在上式中令 $s\to0$,并注意

$$\alpha(\cdot)P(\cdot)=P(\cdot)\alpha(\cdot)=\alpha(\cdot)$$

立即得到 (1.14),其中 I 了解为 $\mathfrak{D}$ 中单位算子. 证毕.

§2 一些引理

为了在 §3 中研究亚正常算子的谱,我们需要下面一些引理.

1. 向量值可测函数的一个性质 下面我们要利用复值可测函

数的结构来研究向量可测函数的一个简单性质，它实质上可以导出向量值可测函数的构造.

引理 2.1 设 $\mathfrak{D}$ 是可析复 Hilbert 空间，E 是 R^1 上的可测集，$m(E)>0$. $\Omega=(E,\mathfrak{B},m)$. $f(\cdot)$ 是 $\mathfrak{D}$ 值的且关于 Ω 可测的函数，而且存在正数 B 使

$$\|f(x)\|\leqslant B.$$

那么对任何正数 ε 必有 $F\subset E$, $m(F)>0$, $a\in\mathfrak{D}$, 使 $\|a\|\leqslant B$ 而且

$$\sup_{x\in F}\|f(x)-a\|<\varepsilon \tag{2.1}$$

证 当 $\mathfrak{D}$ 为一维空间时，这个引理可由实可测函数的 Лузин 定理推出. 现在我们把这个引理由一维的 $\mathfrak{D}$ 推广成可列维的 $\mathfrak{D}$ 就行了.

设 $\{e_n\}$ 是 $\mathfrak{D}$ 中完备就范直交系. 记 $f_n(x)=(f(x),e_n)$, 由于

$$\|f(x)\|_{\mathfrak{D}}^2=\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|^2,$$

可测函数列

$$R_N(x)=\sum_{n=N}^{\infty}|f_n(x)|^2$$

在 E 上(关于测度 m)概收敛于零，必有一正整数 N, 可测集 $F_0\subset E$ 使 $\mu(F_0)>0$, 而且

$$\sup_{x\in F_0}R_N(x)>\frac{\varepsilon^2}{8}, \tag{2.2}$$

另一方面，顺次用此引理于 F_0 上复值可测函数 $f_1,\cdots,f_{N-1}$, 可知有 $F\subset F_0$, $m(F)>0$ 及数 $a_1,a_2,\cdots,a_{N-1}$ 使

$$\max_{1\leqslant n\leqslant N-1,}\sup_{x\in F}|f_n(x)-a_n|<\frac{\varepsilon}{3N}. \tag{2.3}$$

作 $a=\sum_{n=1}^{N-1}a_ne_n$, 那么由 (2.2-3) 得到

$$\sup_{x\in F}\|f(x)-a\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 $\|f(x)\|\leqslant B$，适当地修改 a 可以使 (2.1) 成立. 证毕.

2. 正测度集的一个性质 在实变函数论中有如下的全密点概念. 设 F 为直线上有界可测集；而且 $m(F)>0$，x_0 为直线上一点，$\Delta=[x_0-\eta', x_0+\eta]$，如果

$$\lim_{\substack{\eta\to 0+\\ \eta'\to 0+}}\frac{m(F\cap\Delta)}{m(\Delta)}=1,$$

就称 x_0 为 F 的一个全密点. 记 H 为 F 的全密点全体，由陈建功 [1] 的第 229 页可知

$$m(F-H)=0.$$

引理 2.2 设 F 为区间 $[a, b]$ 中的正测度集，ε 为一正数，那么必有区间 $\Delta\subset[a, b]$ 使

$$m(\Delta-F)<m(\Delta)\varepsilon. \tag{2.4}$$

证 设 x_0 为 (a, b) 中 F 的一个全密点，那么必有 $\Delta=[x_0-\eta, x_0+\eta]$，$\eta>0$ 使 $\Delta\subset[a, b]$ 而且

$$\frac{m(F\cap\Delta)}{m(\Delta)}>1-\varepsilon. \tag{2.5}$$

由 (2.5) 立即推出 (2.4). 证毕.

3. 平方可积函数空间中的一个稠密子集

引理 2.3 设 $\Delta=[-1, 1]$，$\mathfrak{B}_\Delta$ 为 Δ 中一切 Borel 集全体所成的 σ 代数，$\Omega_1=(\Delta, \mathfrak{B}_\Delta, m)$，$\mathfrak{F}$ 为 $L^2(\Omega_1)$ 中具有两阶连续导函数而且满足条件

$$h(\pm 1)=h'(\pm 1)=h''(\pm 1)=0$$

的函数 h 全体. 那么 $\mathfrak{F}$ 在 $L^2(\Omega_1)$ 中稠密，而且当 $h\in\mathfrak{F}$ 时

$$\sup_{t\in\Delta}|h(t)|<\infty, \tag{2.6}$$

又

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\Delta}|P(h)(t)|<\infty, \tag{2.7}$$

其中 P 为算子 (III, 1.19).

证 显然 $\mathfrak{F}$ 在 $L^2(\Omega_1)$ 中稠密，而且当 $h\in\mathfrak{F}$ 时，(2.6) 成立.

当 $h\in\mathfrak{H}$ 时，

$$P(h)(t)=h(t)-\frac{1}{2\pi i}\int\frac{h(s)-h(t)}{s-t}ds.$$

显然 (2.7) 也成立.

4. $\mathscr{D}$ 是一维时的 $\sigma_P(T^*)$ 现在考察 $\mathfrak{D}$ 是一维时的奇异积分算子，我们有下述引理.

引理 2.4 设 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 为 $[a,b]$ 上的光滑的实值函数，而且当 $x\in(a,b)$ 时，$\alpha(x)>0$. 作 $L^2[a,b]$ 上奇异积分算子

$$(Tf)(x)=(x+i\beta(x))f(x)+i\alpha(x)P(\alpha f),$$

那么区域

$$\mathscr{M}=\{x-iy\,|\,\beta(x)<y<\beta(x)+\alpha^2(x),\quad x\in(a,b)\}.$$

必含在 $\sigma_P(T^*)$ 中，而且这些特征值都是简单的[1].

证 任取一点 $z_0\in\mathscr{M}$，为书写方便起见，不妨设 $z_0=0$. 今证 $0\in\sigma_P(T^*)$. 这时 $\beta(0)<0<\beta(0)+\alpha(0)^2$，记

$$u_+(x)=x-i\beta(x),$$
$$u_-(x)=x-i\beta(x)-i\alpha^2(x),$$

要证 $0\in\sigma_P(T^*)$ 就是要解奇异积分方程

$$u_+(x)f(x)-i\alpha(x)P(\alpha f)=0. \tag{2.8}$$

记 $\alpha f=g$, $Q=I-P$, 那么 (2.8) 等价于

$$u_+(x)Q(g)+u_-(x)P(g)=0. \tag{2.9}$$

记 $\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{g(s)ds}{s-z}$, $\Psi(x\pm i0)=\lim\limits_{\varepsilon\to0+}\Psi(x\pm i\varepsilon)$ 那么

$$Q(g)(x)=\Psi(x+i0),\quad (Pg)(x)=-\Psi(x-i0)$$

现在我们选取幅角函数

$$\eta(x)=\arg\frac{u_+(x)}{u_-(x)},\quad a\leqslant x\leqslant b$$

的值使之为光滑函数而且

$$\pi<\eta(a)<2\pi,\quad 0<\eta(b)<\pi,$$

---

1) 即当 $\lambda\in\mathscr{M}$ 时，T^* 相应于 λ 的特征子空间是一维.

这是可以做到的．定义

$$\log\frac{u_+(x)}{u_-(x)}=\log\left|\frac{u_+(x)}{u_-(x)}\right|+i\eta(x).$$

作 $\mathbf{C}-[a,b]$ 上解析函数

$$\Phi(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\log\frac{u_+(x)}{u_-(x)}\frac{dx}{x-z}\right\}.$$

由 Plemilj 公式，我们有

$$\frac{\Phi(x+i0)}{\Phi(x-i0)}=\frac{u_+(x)}{u_-(x)},\quad a\leqslant x\leqslant b.\tag{2.10}$$

其中 $\Phi(x\pm i0)=\lim\limits_{\varepsilon\to0+}\Phi(x+i\varepsilon)$．这样一来 (2.9) 等价于

$$\Phi(x+i0)\Psi(x+i0)=\Phi(x-i0)\Psi(x-i0).\tag{2.11}$$

又由于

$$\begin{aligned}|(z-a)\Phi(z)|=\exp\Big\{&\frac{1}{2\pi}(\eta(b)\log|z-b|+\\&(2\pi-\eta(a))\log|z-a|)\\&-\frac{1}{2\pi}\int_a^b\log|x-z|\eta'(x)dx+O(1)\Big\}.\end{aligned}\tag{2.12}$$

所以在 $\mathbf{C}-[a,b]$ 的有界域中，$(z-a)\Phi(z)$ 是有界的．记

$$\Xi(z)=(z-a)\Phi(z)\Psi(z).$$

它在 $z=\infty$ 是解析的，而且由 (2.11) 可知函数 $\Xi(x+i0)-\Xi(\infty)$ 同时是上半平面上 H^2 中解析函数 $\Xi(z)-\Xi(0)$ 的境界值又是下半平面上 H^2 中解析函数 $\Xi(z)$ 的境界值，所以它是零（参看 Привалов [1]）因此有常数 c 使 $\Psi(z)=c/\Phi(z)(z-a)$．即

$$\begin{aligned}g=P(g)+Q(g)&=c\left(\frac{1}{\Phi(x+i0)}-\frac{1}{\Phi(x-i0)}\right)\frac{1}{x-a}\\&=\frac{-ic\alpha(x)^2}{\Phi(x+i0)u_-(x)(x-a)}\end{aligned}$$

即

$$f(x)=\frac{-ic\alpha(x)}{\Phi(x+i0)u_-(x)(x-a)}\tag{2.13}$$

由 (2.12)，我们知道

$$f(x)=O(|x-b|^{-\frac{\eta(b)}{2\pi}}|x-a|^{-\frac{2\pi-\eta(a)}{2\pi}})\in L^2[a,b].$$

所以 f 确是 (2.8) 的解，即 $0\in\sigma_P(T^*)$，而且相应的特征函数必为 (2.13)，即 T^* 的特征值 0 为简单的。

§3 亚正常算子的谱

我们现在给出用广义记号算子的谱来表达亚正常算子谱的公式. 由 §1 我们看到广义记号算子是正常的乘算子，其谱较易决定. 因此这样一来，由下面的公式，亚正常算子的谱也就较易决定了.

1. 定理的陈述及 $\sigma(T)\subset\pi(T)$ 的证明:

定理 3.1 设 T 是亚正常算子，那么

$$\sigma(T)=\bigcup_{0\leqslant k\leqslant 1}\sigma(T_k) \tag{3.1}$$

证 我们分下面五步来证明这个定理.

(1) 不妨设 T 是完全非正常的. 因为根据引理 I, 2.8, $\mathscr{H}=\mathscr{M}\oplus\mathscr{N}$，而 $T|_{\mathscr{M}}$ 是完全非正常的亚正常算子，$T|_{\mathscr{N}}$ 是正常的. 然而正常算子的记号算子是它本身，所以本定理对 $T|_{\mathscr{N}}$ 成立. 因此如果定理对完全非正常的亚正常算子成立，那么由 $\sigma(T)=\sigma(T|_{\mathscr{M}})\cup\sigma(|T|_{\mathscr{N}})$ 就知道本定理对一切亚正常算子成立. 由定理 III, 3.2 和系 III, 3.3，我们不妨只考虑奇异积分模型，而且其中 $\nu=0$. 下一步可假设 $\mathscr{H}=L^2(\Omega,\mathfrak{D},R(\cdot))$，其中 $\Omega=(E,\mathfrak{B},m)$. 而且可取 $R(\cdot)=I$, $E=[a,b]$. 不然的话，我们经过平移使 $R^1\cap\sigma(T)=\phi$. 然后作 $\bar{R}(\cdot)=L-R(\cdot)$. 作

$$\mathscr{H}_1=L^2(\Omega,\mathfrak{D},\bar{R}(\cdot))$$

中算子

$$T_1f_1=xf_1.$$

考察 $L^2(\Omega,\mathfrak{D})$ 中的算子 T_0 如下

$$T_0(f+f_1)=Tf+T_1f_1,\quad f\in\mathscr{H},\ f_1\in\mathscr{H}_1.$$

由于 $\sigma(T_0)=\sigma(T)\cup\sigma(T_1)$，而 $\sigma(T_1)\cap\sigma(T)=\phi$，只要对 T_0 证明好 (3.1)，即知对 T，(3.1) 也成立．总之下面我们可设

$$\mathscr{H}=L^2(\Omega,\mathfrak{D}),\quad \Omega=(E,\mathfrak{B},m),\quad E=[a,b],$$

$$(Tf)(x)=(x+i\beta(x))f(x)+\alpha(x)P(\alpha(\cdot)f(\cdot))$$

(2) 设 $z_0=x_0+iy_0\bar{\in}\tau(T)$（$\tau(T)$ 的意义见(1.9)），其中 x_0,y_0 是实数．今证 $z_0\in P(T)$．用反证法，设 $z_0\in\sigma(T)$，由引理 1.3 有正数 δ 适合 (1.12)，而且当 $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\cap E$ 时，(1.13)成立．记 $\Delta=[x_0-\delta,x_0+\delta]$，令

$$\mathscr{H}_\Delta=\{f\mid f\in\mathscr{H}, 且当 x\bar{\in}\Delta 时, f(x)=0\}.$$

P_Δ 为 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}_\Delta$ 上的投影算子． $T_\Delta=P_\Delta T|_{\mathscr{H}_\Delta}$． 根据分割定理 I, 3.3

$$\{\lambda\mid \mathrm{Re}\,\lambda\in(x_0-\delta,x_0+\delta),\lambda\in\sigma(T)\}\subset\sigma(T_\Delta).$$

因此 $z_0\in\sigma(T_\Delta)$．根据定理 I, 1.1 和定理 I, 2.5

$$\sigma(T_\Delta)=\sigma_a(T_\Delta^*)^*,$$

所以 $\bar{z}_0\in\sigma_a(T_\Delta^*)$，因此有 $\mathscr{H}_\Delta$ 中单位向量列 $\{f_n\}$ 使

$$c_n=\|(T_\Delta^*-\bar{z}_0I)f_n\|\to 0.$$

由于 $0\leqslant P\leqslant I$，我们有

$$\left\|P(f)-\frac{1}{2}f\right\|\leqslant\frac{1}{2}\|f\|. \tag{3.2}$$

记 $Y(x)=\beta(x)+\frac{1}{2}\alpha(x)^2$，那么

$$\begin{aligned}\alpha f_n+\alpha(Y(\cdot)-y_0I)^{-1}\alpha\left(P_\Delta P(\alpha f_n)-\frac{1}{2}\alpha f_n\right)\\ =i\alpha(Y(\cdot)-y_0I)^{-1}((T_\Delta^*-\bar{z}_0I)f_n-(x-x_0)f_n).\end{aligned} \tag{3.3}$$

利用 (1.14) 和 (3.2)，(3.3) 式左边的范数不小于

$$\|\alpha f_n\|(1-(1+2K)^{-1}).$$

由于 (1.15) 和 $\delta<\frac{\eta}{3}$ 可知

$$\|(Y(x)-y_0I)h\|\geqslant\frac{2}{3}\eta\|h\|.$$

因此 (3.3) 式右边的范数不超过

$$3(c_n+\delta)B/2\eta.$$

所以由 (3.3)，我们得到估计式

$$\|\alpha f_n\| \leqslant 3B(c_n+\delta)(1+2K)/4\eta K. \tag{3.4}$$

由于

$$(T_\triangle^* - \bar{z}_0 I)f_n = (T_0(\cdot)^* - \bar{z}_0 I)f_n - i\alpha P(\alpha f_n),$$

因此再由 (1.15)，(3.4) 和 $\|P\| \leqslant 1$ 可得

$$\|(T_\triangle^* - \bar{z}_0 I)f_n\| \geqslant \|(T_0^*(x)^* - \bar{z}_0 I)f_n\| - \|\alpha P(\alpha f_n)\|$$
$$\geqslant \eta - 3B^2(c_n+\delta)(1+2K)/4K\eta.$$

在上式中令 $n\to\infty$ 导出

$$\delta \geqslant K\eta^2/[3B^2(1+2K)],$$

这和 (1.12) 冲突，因此 $z_0\in\rho(T)$，即得 $\sigma(T)\subset\tau(T)$.

2. $\tau(T)\subset\sigma(T)$ 的证明 我们的办法是把所研究的情况归结到复值函数的奇异积分算子的情况. 又分下面三步.

(3) 设 $z_0 = x_0 + iy_0 \in \sigma(T_k)$，其中 $0\leqslant k\leqslant 1$. 今证 $z_0\in\sigma(T)$. 用反证法：设 $z_0\in\rho(T)$，那么有正数 b 使

$$D_b = \{x+iy \mid x, y \text{ 为实数}, |x-x_0|\leqslant b,$$
$$|y-y_0|\leqslant b\}\subset\rho(T) \tag{3.5}$$

作 $\mathfrak{D}$ 上的泛函

$$J(a) = \operatorname*{ess\ inf}_x \|(T_k(x) - z_0 I)a\|,\quad a\in\mathfrak{D}.$$

由于我们取 $R(\cdot) = I$，由 (1.3) 可知

$$\inf_{\|a\|=1} J(a) = \operatorname{dis}(X_0, \sigma(T_k)) = 0.$$

即有 $\mathfrak{D}$ 中一列单位向量 $\{a_n\}$ 使

$$b > J(a_n)\to 0.$$

设 η_n 为收敛于零的一列正数，而且

$$J(a_n) < \eta_n < b.$$

那么必有一列可测集 $E_n\subset E$，$m(E_n) > 0$ 使

$$\sup_{x\in E_n}\|(T_k(x) - z_0 I)a_n\|_{\mathfrak{D}} \leqslant \eta_n.$$

令 $Y_k(x) = \beta(x) + k\alpha^2(x) - y_0 I$，由上式可知不妨设

$$E_n\subset[x_0-\eta_n, x_0+\eta_0]\subset\rho(T),$$

而且

$$\sup_{x\in E_n}\|Y_k(x)a_n\|_{\mathfrak{D}}\leqslant \eta_n. \tag{3.6}$$

由于 $\alpha(x)a_n$, $\alpha(x)^2a_n$ 为强可测 $\mathfrak{D}$ 值函数，而且

$$\|\alpha(x)a_n\|_{\mathfrak{D}}\leqslant B,\quad \|\alpha(x)^2a_n\|_{\mathfrak{D}}\leqslant B^2,$$

利用引理 2.2 有可测集 $F_n\subset E_n$, $m(F_n)>0$ 及向量 e_n, $\nu_n\in\mathfrak{D}$ 使

$$\|e_n\|_{\mathfrak{D}}\leqslant B;\quad \|\nu_n\|_{\mathfrak{D}}\leqslant B^2$$

而且

$$\sup_{x\in F_n}\|\alpha(x)a_n-e_n\|_{\mathfrak{D}}<\eta_n,\quad \sup_{x\in F_n}\|\alpha(x)e_n-\nu_n\|_{\mathfrak{D}}<\eta_n. \tag{3.7}$$

再由 (3.6) 得到

$$\sup_{x\in F_n}\|\beta(x)a_n+k\nu_n-y_0a_n\|_{\mathfrak{D}}<2\eta_n.$$

我们不妨设存在 $\lim\limits_{n\to\infty}\|e_n\|_{\mathfrak{D}}=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}\|\nu_n\|_{\mathfrak{D}}=c$，不然的话，只要挑选一个子列就行了．我们注意这时，

$$\lim_{n\to\infty}(\nu_n, a_n)=a^2.$$

由于

$$\|\alpha(x)a_n\|^2\leqslant\|\alpha(x)^2a_n\|\leqslant B\|\alpha(x)a_n\|,$$

我们有

$$a^2\leqslant c\leqslant Ba. \tag{3.8}$$

由于 $F_n\subset[x_0-\eta_n, x_0+\eta_n]$ 而且 $m(F_m)>0$，由引理 2.2，必有一区间

$$\Delta_n=[x_n-l_n, x_n+l_n]\subset[x_0-\eta_n, x_0+\eta_n],$$

使

$$m(\Delta_n\backslash F_n)<m(\Delta_n)\eta_n^2. \tag{3.9}$$

由 (3.7) 和 (3.9) 我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m(\Delta_n)}\int_{\Delta_n}\|\alpha(x)a_n-e_n\|_{\mathfrak{D}}^2dx\\
&\quad\leqslant\frac{1}{m(\Delta_n)}\int_{F_n}\|\alpha(x)a_n-e_n\|_{\mathfrak{D}}^2dx+(2B)^2\frac{m(\Delta_n\backslash F_n)}{m(\Delta_n)}\\
&\quad\leqslant(1+4B^2)\eta_n^2
\end{aligned} \tag{3.10}$$

类似地有

$$\frac{1}{m(\Delta_n)}\int_{\Delta_n}\|\alpha(x)e_n - \nu_n\|_{\mathfrak{D}}^2 dx \leqslant (1+4B^4)\eta_n^2 \qquad (3.11)$$

$$\frac{1}{m(\Delta_n)}\int_{\Delta_n}\|\beta(x)a_n + k\nu_n - y_0 a_n\|_{\mathfrak{D}}^2 dx$$

$$\leqslant 4 + (2B + |y_0|)^2)\eta_n$$

(4) 我们令 Σ 为区间 $[x_0 - b, x_0 + b]$, T_Σ 为 T 由 Σ 分割出的算子, u, v 分别为算子 T_Σ 的实部和虚部,作算子

$$T_n = (u - x_n)/l_n + i(v - y_0)/b.$$

由亚正常算子的谱映照定理(引理 I, 3.4), 有

$$\rho(T_n) = \left\{\frac{x - x_n}{l_n} + i\frac{y - y_0}{b}\,\middle|\, x + iy \in \rho(T_\Sigma)\right\}$$

由于

$$\rho(T_\Sigma)\cap R_{(x_0-b, x_0+b)} = \rho(T)\cap R_{(x_0-b, x_0+b)},$$

其中

$$R_{(x_0-b, x_0+b)} = \{x + iy \mid x\in (x_0 - b, x_0 + b)\}$$

以及 (3.5) 我们知道

$$\{x + iy \mid |x - x_0| < b, |y - y_0| < b\}\subset\rho(T_\Sigma).$$

即有

$$\left\{\frac{x - x_n}{l_n} + i\frac{y - y_0}{b}\,\middle|\, |x - x_0| < b, |y - y_0| < b\right\}\subset\rho(T_n).$$

因此

$$\{x + iy \mid |x| < 1, |y| < 1\}\subset\rho(T_n).$$

因此 $\mathrm{dis}(0, \sigma(T_n)) \geqslant 1$. 再根据谱半径估计式 (II, 3.12) 可知

$$\|T_n^* f\| \geqslant \|T_n^{*-1}\|^{-1}\|f\| = \mathrm{dis}(0, \sigma(T_n))\|f\| \geqslant \|f\|. \quad (3.12)$$

(5) 现在我们把整个问题化到 $\mathfrak{D}$ 为一维的情况去. 我们引用引理 2.3 中的记号. 任取 $h\in\mathfrak{H}$, 而且 $\|h\| = 1$. 作函数

$$g_n(x) = h\left(\frac{x - x_n}{l_n}\right)\Big/ l_n^{1/2}, \quad f_n(x) = g_n(x)a_n.$$

则 $f_n(\cdot)\in\mathscr{H}$, 而且 $\|f_n\| = 1$. 由 (3.10) 和 (2.6) 得到

$$\|\alpha f_n - e_n g_n\|^2 \leqslant \frac{1}{l_n}\int \|\alpha(x)a_n - e_n\|^2 dx \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\Delta}|h(t)|^2 \to 0,$$

$$(n\to\infty).$$

类似地当 $n\to\infty$ 时，由 (3.11) 等得到

$$\|(\beta-y_0)f_n+kv_ng_n\|\to 0,$$
$$\|\alpha P(\alpha f_n)-v_nP(g_n)\|\to 0.$$

那么通过变数变换 $x=\ln t+x_n$ 得到

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n^*f_n\|^2=\lim_{n\to\infty}\left\|\left(\frac{x-x_n}{l_n}a_n+i\frac{kv_n}{b}\right)g_n-i\frac{v_n}{b}P(g_n)\right\|^2$$
$$=\|th\|^2+2\frac{a^2}{b}\operatorname{Re}i(kh-P(h),th)$$
$$+c^2\left\|\frac{P(h)-kh}{b}\right\|^2. \qquad (3.13)$$

如果 $c=0$，那么由 (3.8)，$a=0$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n^*f_n\|=\|th\|^2.$$

但这时由 (3.12) 得到

$$\|th\|^2\geqslant\|h\|,\quad h\in\mathfrak{F},$$

这是不可能的．因此可设 $c>0$．这时由 (3.12)，(3.13) 得到

$$\left\|\frac{a^2}{c}th+\frac{ic}{b}(Kh-P(h))\right\|^2+\left(1-\frac{a^4}{c^2}\right)\|th\|^2\geqslant\|h\|^2. \quad (3.14)$$

我们考察 $\dim\mathfrak{D}=1$ 的情况．作 $L^2(\Omega_1)$ 中亚正常算子

$$T'h=\frac{a^2t-ick}{c}h+\frac{ic}{b}P(h),$$

根据引理 2.4，我们知道 $\sigma_p(T'^*)$ 必包含

$$\left\{\frac{a^2t+i\dfrac{ck}{b}}{c}-i\frac{c}{b}y\,\middle|\,t\in(-1,1),\ y\in(0,1)\right\},$$

这包含 0 或以 0 为境界点．因此有一列单位向量 $\{h_n\}\subset\mathfrak{F}$ 使

$$\|T'^*h_n\|\to 0. \qquad (3.15)$$

在 (3.14) 中取这样的 h_n，并注意 $\|th_n\|\leqslant 1$，由 (3.15) 可得

$$1\leqslant\left(1-\frac{a^4}{c^2}\right),$$

这样一来就得到 $a=0$，但从 (3.8) 可知 $c=0$．这是矛盾的．因此 $\tau(T)\subset\sigma(T)$．证毕．

由引理 1.1 和定理 3.1 立即可得下面的结论.

例 3.1 设E为直线上闭集，而且不存E的闭的真子集F使$m(E)=m(F)$. 又设$\Omega=(E,\mathfrak{B},m)$，$\alpha(\cdot)$，$\beta(\cdot)$为$E$上的连续函数，而且$\alpha(x)\geqslant 0$，作$L^2(\Omega)$上奇异积分算子

$$(Tf)(x)=(x+i\beta(x))f(x)+i\alpha(x)P(\alpha f),$$

那么

$$\sigma(T)=\{x+i(\beta(x)+k\alpha(x)^2)\mid x\in E, 0\leqslant k\leqslant 1\}.$$

§4 半亚正常算子的谱

现在我们利用亚正常算子的谱的公式和 Cayley 变换导出半亚正常算子谱的公式.

定理 4.1 设T是半亚正常算子，则

$$\sigma(T)=\bigcup_{0\leqslant K\leqslant 1}\sigma(T_{(K)}). \tag{4.1}$$

其中$T_{(K)}$为广义极记号算子$(1-K)\mathscr{S}_{\bar{U}}(T)+K\mathscr{S}_{\bar{U}}^{+}(T)$，而$T=U|T|$为$T$的极分解.

证 (1) 我们先设$T=U|T|\in SHU$，又设$\sigma(U)\neq C_1$. 不妨设$1\bar{\in}\sigma(U)$.（不然易T为$e^{i\alpha}T$就行了）. 作 Cayley 变换

$$A=L^{-1}(U)+i|T|,$$

这时根据定理 II, 2.5，可知

$$A_K=L^{-1}(U)+i|T|_{(K)}.$$

其中$|T|_{(K)}=(1-K)|T|_-+K|T|_+$. 根据定理 3.1

$$\sigma(A)=\bigcup_{0\leqslant K\leqslant 1}\sigma(A_K). \tag{4.2}$$

然而由定理 I, 3.5,

$$\sigma(A)=L^{-1}(\sigma(T)).$$

又由定理 II, 2.6，定理 II, 2.8，$A_K=L^{-1}(T_{(K)})$，$T_{(K)}$为正常的，所以

$$\sigma(A_K)=L^{-1}(\sigma(T_{(K)})).$$

这样由 (4.2) 可得 (4.1).

(2) 下面设 $T=U|T|\in SHU$,然而 $\sigma(U)=C_1$. 设 γ 为 C_1 中任一开弧. $\gamma\neq C_1$, 为简单起见,设 $1\in\bar{\gamma}$. 设 $\{E(\cdot)\}$ 为 U 的谱系. $\mathscr{H}_\gamma=E(\gamma)\mathscr{H}$ 作 T 的分割

$$T_{(\gamma)}=E(\gamma)T|_{\mathscr{H}_\gamma}.$$

而且记

$$\mathfrak{D}_{(\gamma)}=\left\{z\,|\,z\neq 0,\ \frac{z}{|z|}\in\gamma\right\}.$$

由于

$$T(\gamma)_{(K)}=E(\gamma)T_{(K)}|_{\mathscr{H}_\gamma},$$

而 $T(\gamma)$ 适合 (1) 中条件,我们有

$$\sigma(T(\gamma))=\bigcup_{0\leqslant K\leqslant 1}\sigma(T(\gamma)_{(K)}).$$

然而

$$\sigma(T)\cap\mathfrak{D}_\gamma=\sigma(T(\gamma))\cap\mathfrak{D}_\gamma,$$
$$\sigma(T_{(K)})\cap\mathfrak{D}_\gamma=\sigma(T(\gamma)_{(K)})\cap\mathfrak{D}_\gamma.$$

因此有

$$\sigma(T)\cap\mathfrak{D}_\gamma=\bigcup_{0\leqslant K\leqslant 1}(\sigma(T_{(K)})\cap\mathfrak{D}_\gamma).$$

由于 γ 的任意性我们得出

$$\sigma(T)-\{0\}=\bigcup_{0\leqslant K\leqslant 1}(\sigma(T_{(K)})-\{0\}).$$

然而注意由于 U 为酉算子, 及 $0\leqslant|T|_-\leqslant|T|\leqslant|T|_+$ 可知若 $0\in\sigma(T)$, 则 $0\in\sigma(|T|)$, 因此 $0\in\sigma(|T|_-)$, 从而 $0\in\sigma(T_-)$. 反之同样若

$$0\in\sigma((1-K)T_-+KT_+),$$

可知 $0\in\sigma((1-K)|T|_-+K|T|_+)$,易知若 $K\neq 0$, 则 $0\in\sigma(|T|)$, 从而 $0\in\sigma(T)$. 若 $K=0$, 即 $0\in\sigma(T_-)$, 由 (II, 2.13) 可知 $0\in\sigma(T)$ 即这时总有 $0\in\sigma(T)$. 即证这时 (4.1) 成立.

(3) 现在取 $T\in SH\backslash SHU$. 由引理 II, 3.5, 作 $\tilde{\mathscr{H}}$, $\tilde{T}$, $\tilde{T}_{(K)}$ 等,这时 $\tilde{T}\in SHU$, 而且

$$\sigma(\tilde{T}) = \sigma(T)\cup\{0\},\quad \sigma(T_{(K)})\subset\sigma(\tilde{T}_{(K)})\subset\sigma(T_{(K)})\cup\{0\}. \tag{4.3}$$

由于对 $\tilde{T}$, (4.1) 成立. 从而知

$$\sigma(T) - \{0\} = \bigcup_{0\leqslant K\leqslant 1} \sigma(T_{(K)}) - \{0\}.$$

但这时必有 $0\in\sigma(T)$, 而且必有 $f\neq 0$, 使

$$T^*f = 0.$$

即有

$$U|T|U^*f = 0,$$

易知 $|T|_- \leqslant U|T|U^*$, 从而 $|T|_-f = 0$, 从而 $0\in\sigma(T_-)$. 这样证得 (4.1) 成立.

例 4.1 设 E 为 C_1 中闭集, 而且不存在 E 的闭的真子集 F 使 $m(F) = m(E)$. 又设 $\Omega = (E, \mathfrak{B}, m)$, 又 $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ 为 E 上连续函数且

$$\beta(\cdot)\geqslant 0,\quad \alpha(\cdot)\geqslant 0.$$

作 $L^2(\Omega)$ 上奇异积分算子

$$(Tf)(e^{i\theta}) = e^{i\theta}\{\beta(e^{i\theta})f(e^{i\theta}) + \alpha(e^{i\theta})\mathfrak{P}(\alpha f)\},$$

那么

$$\sigma(T) = \{e^{i\theta}(\beta(e^{i\theta}) + K\alpha(e^{i\theta})^2) \mid e^{i\theta}\in E,\quad 0\leqslant K\leqslant 1\}.$$

第五章 精刻函数及表征函数

在算子谱理论中常用联系于算子预解式的抽象解析函数来深入地刻划算子的性质. 本章将引入两类抽象解析函数，Pincus 函数(精刻函数)及表征函数. 它们都联系于算子的奇异积分模型和自共轭算子或正常算子的预解式，而 Pincus 函数则更出人意外的.

§1 一类 Riemann-Hilbert 问题

在本节及下一节中，为了方便起见我们只考察亚正常算子及半亚正常算子的奇异积分模型，这并不失去一般性，首先我们要考察一个二元的抽象解析函数，用它来刻画算子，并引出相应的 Riemann-Hilbert 问题.

1. 决定函数 我们沿用第三章模型中的记号，免去其顶上的标志"∧". 设 $T = u + iv$ 是亚正常算子. 形如定理 III; 1.6 中的算子,但 $\alpha(\cdot) \geq 0$. 联系于 T, 我们作 $\mathfrak{D}$ 到 $\mathscr{H}$ 中线性有界算子 K 如下:

$$Ka = \alpha(\cdot)a, \quad a \in \mathfrak{D}.$$

它的共轭算子 K^*, 作为 $\mathscr{H}$ 到 $\mathfrak{D}$ 中的算子,形如

$$K^*f = \int \alpha(x)f(x)dx, \quad f \in \mathscr{H}.$$

这时 T 的导算子 $D_T = [T^*, T]$ 可表示为

$$D_T = \frac{1}{\pi} KK^*. \tag{1.1}$$

我们作两元的 $\mathscr{L}(\mathfrak{D})$ 值解析函数[1]

1) 这里的解析函数的定义域只是开集,不一定是联络的.

$$E_T(z,l) = I + \frac{1}{2\pi i} K^*(u-z)^{-1}(v-l)^{-1}K,$$
$$z \in \rho(u), \quad l \in \rho(v). \tag{1.2}$$

(有时简记为 $E(\cdot,\cdot)$)，称它为算子 T 的(相应于卡狄生分解)的决定函数，它之所以称为决定函数，是因为由 $E_T(\cdot,\cdot)$ 可以在酉等价的意义下唯一地决定 T，这点我们这里不准备证明，但可以从 §4 中对表征函数的相应的讨论中看出．它有下面的一些性质．

(1) 对一切 $z \in \rho(u)$, $l \in \rho(v)$，函数 $E(z,l)$ 是可逆的，而且

$$E(z,l)^{-1} = E(\bar{z},\bar{l})^*$$
$$= -\frac{1}{2\pi i} K^*(v-l)^{-1}(u-z)^{-1}K. \tag{1.3}$$

这是易于由 (1.2) 直接验证的．

(2) 函数值 $E(z,l)$ 可表示为乘积的形式

$$KE(z,l) = \{u-z, v-l\}K, \tag{1.4}$$
$$E(z,l)K^* = K^*\{(u-z)^{-1}, (v-l)^{-1}\}. \tag{1.5}$$

这里 $\{A,B\} = ABA^{-1}B^{-1}$ 称为 A 和 B 的乘交换子．

(3) 设 $a \in \mathfrak{D}$，记 $f(\cdot;l,a) = (v-l)^{-1}Ka$，那么

$$E(z,l)a = a + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\alpha(\lambda)f(\lambda;l,a)}{\lambda - z}d\lambda. \tag{1.6}$$

设 $F(z)$ 是上半平面(或下半平面)上 $\mathfrak{D}$ 值的解析函数．如果存在 $\mathfrak{D}$ 值的平方可积函数 $F_\pm(x)$, $x \in R^1$ 使

$$\lim_{\varepsilon \to 0+}\int \|F(x \pm i\varepsilon) - F_\pm(x)\|_{\mathfrak{D}}^2 dx = 0,$$

就称 $F_\pm(x)$ 为函数 $F(z)$ 的境界值函数，也记为 $F(x \pm i0)$．由 (1.6) 并且根据 §III, 1 中的讨论，记 $P_- = P$, $P_+ = I - P$，可知

(4) 当 $a \in \mathfrak{D}$，并且 $l \in \rho(v)$ 时，函数 $z \longmapsto E(z,l)a$ 有境界值函数

$$E(x \pm i0, l)a = a \pm P_\pm(\alpha(\cdot)f(\cdot;l,a)). \tag{1.7}$$

2. 解析函数 $R(\cdot,\cdot)$

记 $v_\pm = S_u^\pm(v)$．由 (III, 1.26)，我们有

$$(v_- f)(\lambda) = \beta(\lambda) f(\lambda), \quad (v_+ f)(\lambda) = (\beta(\lambda) + \alpha(\lambda)^2) f(\lambda),$$

根据引理 IV, 1.1，我们可以在一个零集上修改 $\beta(\lambda)$ 的意义使

$$\sigma(\beta(\lambda)) \subset \sigma(v_-).$$

我们可以从 T 的奇异积分算子模型出发引进另一类 $\mathscr{L}(\mathfrak{D})$ 值解析函数．设 λ 为固定的实数，作

$$R(\lambda, l) = I + \alpha(\lambda)(\beta(\lambda) - l)^{-1}\alpha(\lambda), \quad l \in \rho(v_-). \tag{1.8}$$

有时简记为 $R(\cdot, \cdot)$，根据定理 II, 1.3 及系 II, 1.4，我们有

$$(S_u^-((v - l)^{-1})f)(\lambda) = (\beta(\lambda) - l)^{-1} f(\lambda), \tag{1.9}$$

$$(S_u^+((v - l))f)(\lambda) = (\beta(\lambda) + \alpha(\lambda)^2 - l) f(\lambda). \tag{1.10}$$

现在我们来研究 $R(\cdot, \cdot)$ 的性质．由 (1.8—10) 可以算出：

(1) 作为 $L^2(\Omega, \mathfrak{D})$ 上的乘法算子有

$$\alpha(\cdot)R(\cdot, l) = S_u^-(v - l)S_u^-((v - l)^{-1})\alpha(\cdot), \tag{1.11}$$

$$R(\cdot, l)\alpha(\cdot) = \alpha(\cdot)S_u^-(v - l)^{-1}S_u^+(v - l). \tag{1.12}$$

从上述两式 (1.11—12) 可以看出 $R(\cdot, \cdot)$ 在散射理论和算子摄动理论中的意义，但是这里不准备作进一步的讨论．

(2) 当 $l \in \rho(v_+) \cap \rho(v_-)$ 时，$R(\lambda, l)$ 是可逆的，而且

$$R(\lambda, l)^{-1} = I - \alpha(\lambda)(\beta(\lambda) + \alpha(\lambda)^2 - l)^{-1}\alpha(\lambda). \tag{1.13}$$

3. Riemann-Hilbert 问题　现在我们给出函数 $R(\cdot, \cdot)$ 与 $E(\cdot, \cdot)$ 的关系．

定理 1.1　设 T 是亚正常的，那么当 $l \in \rho(v)$ 时，$E(\cdot, l)$ 是下述 Riemann-Hilbert 问题的解：

$$R(\lambda, l)E(\lambda - i0, l) = E(\lambda + i0, l). \tag{1.14}$$

证　由于第 1 段中所述 $f(\cdot; l, a)$ 的意义和 (III, 1.24) 中 v 的表达式可知

$$(\beta(\cdot) - l)f(\cdot; l, a) + \alpha(\cdot)P_-(\alpha(\cdot)f(\cdot; l, a))$$
$$= \alpha(\cdot)a. \tag{1.15}$$

其中 $P_- = P$，在 (1.15) 两边左乘 $\alpha(\beta - l)^{-1}$ 再根据 (1.8) 及 $P_+ = I - P_-$ 立即可得

$$a + P_+(\alpha(\cdot)f(\cdot; l, a)) = R(\cdot, l)$$
$$\cdot (a - P_-(\alpha(\cdot)f(\cdot; l, a))). \tag{1.16}$$

从(1.17)和(1.15)立即得(1.14). 证毕.

当 $R_T(\cdot,\cdot)$ 满足一定条件时,由 Riemann-Hilbert 问题(1.14)解的唯一性,可以由函数 $R_T(\cdot,\cdot)$ 决定 $E_T(\cdot,\cdot)$,因而此时 $R_T(\cdot,\cdot)$ 在酉等价意义下唯一地决定算子 T. 关于这一点我们不打算在此详细讨论.

4. 半亚正常算子的情况

对于 SHU 中的算子 $T=U|T|$,我们取它的奇异积分算子模型,也可以同样地定义

$$Ka=\alpha(\cdot)a,\quad K^*f=\frac{1}{2\pi}\int\alpha(e^{i\theta})f(e^{i\theta})d\theta, \qquad (1.17)$$

以及决定函数

$$E_T(z,l)=I+K^*(I-zU)^{-1}zU(|T|-l)^{-1}K,$$
$$z\in\rho(U),\quad l\in\rho(|T|),$$

它们具有类似的性质, 我们规定境界值函数 $E(e^{i\theta}(1\pm0),l)a$ 为满足

$$\lim_{r\to1\pm0}\int_{C_1}\|E(re^{i\theta},l)a-E(e^{i\theta}(1\pm0),l)a\|_{\mathfrak{D}}^2d\theta=0$$

的函数再定义

$$R_T(e^{i\theta},l)=I+\alpha(e^{i\theta})(\beta(e^{i\theta})-l)^{-1}\alpha(e^{i\theta}),$$

那么 $R(\cdot,\cdot)$ 具有如下的性质

$$\alpha(\cdot)R(\cdot,l)=\mathscr{S}_U^+(|T|-l)\mathscr{S}_U^-((|T|-l)^{-1})\alpha(\cdot),$$
$$R(\cdot,l)\alpha(\cdot)=\alpha(\cdot)\mathscr{S}_U^-((|T|-l)^{-1})\mathscr{S}_U^+(|T|-l).$$

我们同样地有

定理 1.2 设 $T=U|T|\in SHU$, 则当 $l\in\rho(|T|)$ 时, $E_T(\cdot,\cdot)$ 是下述 Riemann-Hilbert 问题的解.

$$R(e^{i\theta},l)E(e^{i\theta}(1-0),l)=E(e^{i\theta}(1+0),l).$$

§2 Pincus 函数

本节中要引进一个算子值函数——它的值是辅助空间中半正

定、压缩算子——来进一步刻划亚正常算子或半亚正常算子.

1. 一些引理 为此我们需要关于算子演算中对数函数和一类解析函数的知识.

下面一个引理的证明需要附录 I 中关于压缩算子的一些定理.

引理 2.1 设 D 是复平面的上半平面 $\mathrm{Im}\, z > 0$. $\Phi(z), z \in D$ 是 $\mathscr{L}(\mathfrak{D})$ 值解析函数,

$$\mathrm{Im}\,\Phi(z) \geqslant 0, \quad \Phi_1(z)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{D}), \tag{2.1}$$

那么必有算子值对数函数 $\ln \Phi_1(z)$, 它在 D 上解析而且

$$0 \leqslant \mathrm{Im} \ln \Phi(z) \leqslant \pi I, \quad z \in D. \tag{2.2}$$

证 当 $\mathrm{Im} A \geqslant 0$ 时, 可以算出

$$(iI + A)^*(iI + A) \geqslant I + A^*A,$$

$$(iI + A)(iI + A)^* \geqslant I + AA^*,$$

所以 $(iI + A)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{D})$. 我们记

$$l(A) = (iI - A)(iI + A)^{-1}.$$

容易算子

$$I - l(A)^* l(A) \geqslant 0,$$

由是可知 $l(A)$ 是压缩算子. 作算子值解析函数

$$\Psi(z) = l(\Phi(z)).$$

它的值是压缩算子. 由于

$$0 \in \sigma(\Phi(z)), \quad \infty \in \sigma(\Phi(z)).$$

而 $l(0) = 1, l(\infty) = -1$, 所以

$$\{1, -1\} \subset \rho(\Psi(z)). \tag{2.3}$$

令 $\Delta = \{\zeta \mid |\zeta| \leqslant 1, \zeta \neq 1, \zeta \neq -1\}$. 作 Δ 上的单值解析函数

$$h(\zeta) = \ln i \frac{1-\zeta}{1+\zeta},$$

由于当 $\zeta \in \Delta$ 时,

$$\mathrm{Im}\, i(1+\zeta)(1-\zeta)^{-1} \geqslant 0,$$

可以取 ln 的单值枝使当 $z \in \Delta$ 时,

$$0 \leqslant \mathrm{Im}\, h(z) \leqslant \pi. \tag{2.4}$$

由于 $\exp h(\zeta) = i\dfrac{1-\zeta}{1+\zeta}$，所以

$$\exp h(\Psi(z)) = i(I - \Psi(z))(I + \Psi(z))^{-1} = \Phi(z).$$

因此

$$h(\Psi(z)) = \ln \Phi(z).$$

由 (2.3)，当 $0 \leqslant r \leqslant 1$，固定 z 时，利用 Riesz 的算子演算可定义 $h(r\Psi(z))$，而且

$$\lim_{r\to 1-0} \|h(\Psi(z)) - h(r\Psi(z))\| = 0. \tag{2.5}$$

由 (2.4)，$\{h(r\zeta) \mid |\zeta| < 1\}$ 含在带状区域

$$\{W \mid 0 \leqslant \operatorname{Im} W \leqslant \pi\} \tag{2.6}$$

中，根据附录 §2 可证，$h(r\Psi(z))$ 的数值域含在 (2.6) 中，由 (2.5) 可知 $h(\Psi(z))$ 的数值域也含在 (2.6) 中，这就是

$$0 \leqslant \operatorname{Im} h(\Psi(z)) \leqslant \pi I. \tag{2.7}$$

这就得到 (2.2)．证毕．

设$[a, b]$是实数直线上的一个区间，令D是复平面(包括无限远点)挖去区间$[a, b]$后所得的单连通区域．如果 $F(z)$，$z \in D$ 是解析函数，当 z 在D中的实数时，$F(z)$ 也是实数．而且当 $\operatorname{Im} z > 0$ 时，

$$\operatorname{Im} F(z) \geqslant 0. \tag{2.8}$$

那么称 $F(\cdot)$ 为典型实照函数．

引理 2.2 设 $F(\cdot)$ 是D中的典型实照函数，$F(\infty) = 0$．而且当 $\operatorname{Im} z > 0$ 时，

$$\operatorname{Im} F(z) \leqslant C \tag{2.9}$$

那么必有区间 $[a, b]$ 上的唯一的可测函数 $f(t)$ 适合条件

$$0 \leqslant f(t) \leqslant \frac{C}{\pi} \tag{2.10}$$

使得

$$F(z) = \int_a^b \frac{f(t)\,dt}{t - z}, \quad z \in D. \tag{2.11}$$

证 不妨设 $F(z)\not\equiv$ 常数. 由于当 x 为实数时，$F(x)$ 也是实数，所以

$$F(z)=\overline{F(\bar{z})}. \tag{2.12}$$

作函数

$$\varphi(z)=(F(z)-i)(F(z)+i)^{-1},$$

则由 (2.8) 当 $\operatorname{Im} z>0$ 时，$|\varphi(z)|\leqslant 1$. 根据解析函数境界值理论(参看 Привалов [1]) 可知对几乎所有的 x,

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\varphi(x+i\varepsilon)$$

存在，而且不等于 1. 这样一来可知对几乎所有的 x

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{\pi}\operatorname{Im} F(x+i\varepsilon)=f(x) \tag{2.13}$$

是有限数. 而且 f 适合 (2.10). 由于当 $x\in R^1-[a,b]$ 时，$F(\cdot)$ 在 x 是解析的，而且 $F(x)$ 是实数，所以这时 $f(x)=0$. 由于当 $\operatorname{Im} z>0$ 时，取 R 充分大，取 $\varepsilon>0$，使 $\operatorname{Im} z>\varepsilon$. 由 Cauchy 积分公式

$$F(z+i\varepsilon)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R}\frac{F(t+i\varepsilon)dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{F(Re^{i\theta}+i\varepsilon)}{Re^{i\theta}-z}e^{i\theta}d\theta,$$

$$0=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R}\frac{F(t-i\varepsilon)}{t-z}dt+\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{F(Re^{i\theta}-i\varepsilon)}{Re^{i\theta}-z}e^{i\theta}d\theta.$$

两式相加得

$$F(z+i\varepsilon)=\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}\frac{\operatorname{Im} F(t+i\varepsilon)}{t-z}dt$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\pi}\left[\frac{F(Re^{i\theta}+i\varepsilon)e^{i\theta}}{Re^{i\theta}-z}+\frac{F(Re^{-i\theta}-i\varepsilon)e^{-i\theta}}{Re^{-i\theta}-z}\right]d\theta$$

由 (2.9) 及 (2.13)，令 $\varepsilon\to 0+$，由 (2.9) 及 Lebesgue 控制收敛定理即得

$$F(z) = \int_a^b \frac{f(t)}{t - z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi \left[\frac{F(Re^{i\theta})e^{i\theta}}{Re^{i\theta} - z} + \frac{F(Re^{i\theta})e^{i\theta}}{Re^{-i\theta} - z} \right] d\theta$$

注意 $F(\infty)=0$，令 $R \to \infty$，后项趋于 0，即得 (2.11)，至于 f 的唯一性可由 (2.11) 证得，当 f，F 满足 (2.11) 时它们必满足 (2.13)。证毕.

证 我们注意如果 $x_0 \in [a, b]$，而且 $F(z)$ 可以从上半平面及下半平面分别解析延拓到 x_0 的环境中得到相同的函数值，那么在 x_0 的环境中，$f(x)$ 必为 0.

2. 亚正常算子的 Pincus 函数 令 $\mathfrak{B}$ 为实数直线上的 Borel 集的全体.

引理 2.3 设 $A, K \in \mathscr{L}(\mathfrak{D})$ 为自共轭算子，且 $K \geqslant 0$. 那么必有 $(R^1, \mathfrak{B})$ 上的 $\mathscr{L}(\mathfrak{D})$ 值的可测函数 $B(\cdot)$，它的支集是有界的使

$$0 \leqslant B(t) \leqslant I, \quad t \in R^1,$$

$$I + K(A - l)^{-1}K = \exp \int \frac{B(t)dt}{t - l}, \quad \text{Im} l > 0. \qquad (2.14)$$

证 记 $\Phi(l) = I + K(A - l)^{-1}K$，当 $\text{Im}\, l > 0$ 时

$$\text{Im}\, \Phi(l) = \frac{\Phi(l) - \Phi(l)^*}{2i} = K(A - l)^{-1}(A - \bar{l})^{-1}K \cdot \text{Im}\, l \geqslant 0.$$

由于 $(A - l)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{D})$，$(A + K^2 - l)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{D})$，所以

$$\Phi(l)^{-1} = I - K(A + K^2 - l)^{-1}K$$

也属 $\mathscr{L}(\mathfrak{D})$. 由引理 2.1 可知，$\ln \Phi(l)$ 是上半平面 $\text{Im} l > 0$ 上的解析函数，而且

$$0 \leqslant \text{Im} \ln \Phi(l) \leqslant \pi I, \quad \text{Im}\, l > 0.$$

另外我们注意当 $|l|$ 充分大 ($|l| \geqslant M$) 时

$$\|K(A - l)^{-1}K\| < 1.$$

因此当 $|l|$ 充分大时，$\ln \Phi(l)$ 是解析函数. 而且

$$\lim_{l\to\infty}\ln\Phi(l)=0.$$

类似地还可证明当 $|l|\geqslant M$ 的实数时，$\ln\Phi(l)$ 是自共轭算子因此可以将 $\ln\Phi(l)$ 进行解析延拓成为下半平面上的算子值解析函数，而且在下半平面中，

$$-\pi I\leqslant \operatorname{Im}\ln\Phi(l)\leqslant 0.$$

任取 $x\in\mathfrak{D}$，作解析函数

$$F_x(l)=(\ln\Phi(l)x,\ x). \tag{2.15}$$

由 $\ln\Phi(l)$ 的性质立即可知 $F_x(l)$ 是典型实照函数，而且

$$\sup_{0<\operatorname{Im}l}\operatorname{Im}F_x(l)\leqslant\pi\|x\|^2.$$

由引理 2.2 可知有唯一的函数 $f_x(t)$ 适合条件

$$0\leqslant f_x(t)\leqslant\|x\|^2. \tag{2.16}$$

而且当 $|t|\geqslant M$ 时，

$$f_x(t)=0. \tag{2.17}$$

使得

$$F_x(l)=\int\frac{f_x(t)\,dt}{t-l}. \tag{2.18}$$

类似于定理 III, 2.2 的证法，可以选取 $f_x(t)$ 的值使当固定 t 时

$$f_{ax}(t)=|a|^2f_x(t),\quad f_{x+y}(t)+f_{x-y}(t)=2(f_x(t)+f_y(t)).$$

其中 a 是复数，$x,y\in\mathfrak{D}$. 利用 (2.16) 及夏、吴、严、舒[1]第六章 §6 可知存在 $\mathfrak{D}$ 中有界自共轭算子 $B(t)$，$0\leqslant B(t)\leqslant I$ 满足

$$f_x(t)=(B(t)x,\ x). \tag{2.19}$$

由 (2.15) 和 (2.18—19) 立即得到 (2.14). 由 (2.16—17) 可知 $B(t)$ 的支集是有界的.

若另有 $0\leqslant B_1(t)\leqslant I$ 使

$$\int\frac{B_1(t)\,dt}{t-l}=\int\frac{B(t)\,dt}{t-l}.$$

那么对任何 $x\in\mathfrak{D}$，

$$\int\frac{(B_1(t)x,\ x)\,dt}{t-l}=\int\frac{(B(t)x,x)\,dt}{t-l}.$$

因此由引理 2.2 可知

$$(B_1(t)x, x) = (B(t)x, x),$$

对几乎所有的 t 成立. 由 $\mathfrak{D}$ 的可析性可证 $B_1(t)$ 与 $B(t)$ 几乎处处相等. 证毕.

现在我们来考察 $T = u + iv \in HN$, 并且考察它的函数模型, 我们来研究 §1 中函数 $R(\cdot, \cdot)$ 的表示.

定理 2.4 (1) 必有唯一的二元 $\mathscr{L}(\mathfrak{D})$ 值可测函数 $B(\lambda, t)$, 它的支集是有界的; 而且

$$0 \leqslant B(\lambda, t) \leqslant I, \tag{2.20}$$

使

$$I + \alpha(\lambda)(\beta(\lambda) - l)^{-1}\alpha(\lambda) = \exp\int \frac{B(\lambda, t)dt}{t - l}. \tag{2.21}$$

成立.

(2) 上述的函数 $B(\lambda, t)$ 有如下的性质: 对于 $\sigma(v)$ 上的任一有界 Baire 函数 ϕ

$$\int \phi(t)B(\lambda, t)dt$$

$$= \alpha(\lambda)\int_0^1 \phi(\beta(\lambda) + k\alpha(\lambda)^2)dk \cdot \alpha(\lambda) \tag{2.22}$$

成立.

证 根据引理 2.3, 我们知道对每个固定的 λ, 必有唯一的 $\mathscr{L}(\mathfrak{D})$ 值可测函数 $B(\lambda, t)$ (以 t 为变元) 适合条件 (2.20—21).

我们注意如果 A 是一有界算子, 而且 $[-\infty, -1] \subset \rho(A)$, 那么

$$\ln(I + A) = \int_0^1 (I + KA)^{-1}AdK. \tag{2.23}$$

另外容易直接验证, 当

$$(\beta - l)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{D}), \quad (\beta + \alpha^2 - l)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{D})$$

时

$$(I + K\alpha(\beta - l)^{-1}\alpha)^{-1} = I - K\alpha(\beta + \alpha^2 - l)^{-1}\alpha. \tag{2.24}$$

以 $\alpha(\beta - l)^{-1}\alpha$ 代入 (2.23), 注意

$$(I + KA)^{-1}A = (I - (I + KA)^{-1})/K.$$

利用 (2.24) 就得到

$$
\begin{aligned}
&\ln(I+\alpha(\lambda)(\beta(\lambda)-l)^{-1}\alpha(\lambda)\\
&=\alpha(\lambda)\int_0^1(\beta(\lambda)+k\alpha(\lambda)^2-l)^{-1}dk\cdot\alpha(\lambda).
\end{aligned}
$$

再由 (2.21) 得到

$$
\begin{aligned}
\int\frac{B(\lambda,t)dt}{t-l}=\alpha(\lambda)\int_0^1(\beta(\lambda)+k\alpha(\lambda)^2-l)^{-1}dk\\
\cdot\alpha(\lambda).
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

上式当 l 在包含 $\sigma(v)$ 的某个有限区间 $[a,b]$ 外成立. 另外注意可取 $[a,b]$，使当 t 在 $[a,b]$ 外，$B(\lambda,t)=0$.设 $\phi(l)$ 是一多项式,将 (2.25) 两边乘以 $\phi(l)$，并且沿一个围绕着 $[a,b]$ 的围道 L 积分立即得知当 ϕ 为多项式时，(2.22) 成立. 再取多项式一致逼近连续函数,可知当 $\phi(\cdot)$ 为 $[a,b]$ 上连续函数时，(2.22) 成立.

我们注意当 ϕ 为有界 Baire 函数时，(2.22)的两边都有意义。我们令 $\mathfrak{F}$ 为使 (2.22) 成立的 $[a,b]$ 上的有界 Baire 函数全体. 那么由刚才所证的知 $C[a,b]\subset\mathfrak{F}$. 如果 $\{\phi_n\}\subset\mathfrak{F}$，而且一致有界的,又对一切 $x\in[a,b]$

$$
\phi(x)=\lim\phi_n(x).
$$

那么由有界控制定理和

$$
\begin{aligned}
S-\lim_{n\to\infty}\int_a^b\phi_n(t)B(\lambda,t)dt=\int_a^b\phi(t)B(\lambda,t)dt\\
S-\lim_{n\to\infty}\phi_n(\beta(\lambda)+k\alpha(\lambda)^2)=\phi(\beta(\lambda)+k\alpha(\lambda)^2)
\end{aligned}
$$

可知 (2.22) 对 ϕ 也成立. 即 $\phi\in\mathfrak{F}$. 由于 $\mathfrak{F}$ 有上述两个性质，利用 Baire 函数族的有关理论,（例如见陈建功 [1]) 可以证明 $\mathfrak{F}$ 包含一切有界 Baire 函数.

另一方面我们可以取一列单调增加的连续函数列 $\phi_n(\cdot)$,其极限函数为

$$
u(x)=\begin{cases}1 & x\leqslant 0\\ 0 & x>0.\end{cases}
$$

我们注意

$$\alpha(\lambda)\int_0^1 \phi_n(\beta(\lambda)+K\alpha(\lambda)^2-tI)dt\alpha(\lambda),$$

显然是 (t,λ) 的二元可测函数列，利用 (2.22) 可知

$$\int_a^t B(\lambda,\tau)d\tau = \lim_{n\to\infty}\alpha(\lambda)\int_0^1 \phi_n(\beta(\lambda)$$
$$+k\alpha(\lambda)^2-tI)dk\cdot\alpha(\lambda).$$

因此它是 (λ,t) 的可测函数．对 t 取偏导数以后即知 $B(\lambda,t)$ 是二元可测函数．证毕．

我们称定理 2.4 中的函数 $B(\cdot,\cdot)$ 为亚正常算子 T 的 Pincus 函数或称为精刻（Mosaic）函数．

3. 半亚正常算子的 Pincus 函数 现在来考察半亚正常算子的情况．设 $T\in SHU$，而且只考察奇异积分算子模型，类似定理 2.4，我们有

定理 2.5 （1）必有唯一的二元 $\mathscr{L}(\mathfrak{D})$ 值可测函数 $B(e^{i\theta},\rho)$ $(e^{i\theta}\in C_1,\ \rho\in[0,\infty))$

$$0\leqslant B(e^{i\theta},\rho)\leqslant I,$$

使

$$I+\alpha(e^{i\theta})(\beta(e^{i\theta})-l)^{-1}\alpha(e^{i\theta})$$
$$=\exp\int_0^\infty \frac{B(e^{i\theta},\rho)d\rho}{\rho-l}. \tag{2.26}$$

（2）如果 ϕ 是有界可测函数，则

$$\int\phi(\rho)B(e^{i\theta},\rho)d\rho=\alpha(e^{i\theta})\int_0^1\phi(\beta(e^{i\theta})$$
$$+k\alpha(e^{i\theta})^2)dk\alpha(e^{i\theta}). \tag{2.27}$$

特别地，

$$\int\frac{B(e^{i\theta},\rho)d\rho}{\rho-l}=\alpha(e^{i\theta})$$
$$\cdot\int_0^1(\beta(e^{i\theta})+k\alpha(e^{i\theta})^2-l)^{-1}dk\alpha(e^{i\theta}). \tag{2.28}$$

§3 决定集与 Putnam 不等式

1. 精刻函数的决定集 我们考察 $B(\cdot,\cdot)$ 的本性支集．设 O

为复平面 C 中的一个开集，如果 O 中存在一个 Lebesgue 零集 F，使当 $x+iy\in O-F$ 时，$B(x,y)=0$，就称 $B(\cdot,\cdot)$ 在 O 中为零. 再作这种开集的和集，就是这种开集中最大的. 它的余集(闭集)就称为 $B(\cdot,\cdot)$ 的本性支集. 我们又称亚正常算子 T 的精刻函数 $B(\cdot,\cdot)$ 的本性支集为 T 的决定集，记为 $D(T)$.

定理 3.1 如果 T 是亚正常算子，那么

$$D(T)\subset\sigma(T) \tag{3.1}$$

如果 T 是完全非正常的亚正常算子，那么

$$D(T)=\sigma(T). \tag{3.2}$$

证 我们仍记

$$\tau(T)=\bigcup_{0\leqslant k\leqslant 1}\sigma(T_k).$$

我们要证

$$D(T)\subset\tau(T),$$

而且当 T 又是完全非正常时，又有

$$\tau(T)\subset D(T).$$

再根据引理 I, 2.8，我们就证明了定理 IV, 3.1 与本定理等价.

(1) 证明 $D(T)\subset\tau(T)$. 设 $\lambda_0+i\mu_0\in\mathbf{C}\backslash\tau(T)$. 有正数 ε 使

$$\inf_{|\mu-\mu_0|\leqslant\varepsilon}\operatorname{dis}(\lambda_0+i\mu,\tau(T))=\delta>0.$$

因此当 $|\mu-\mu_0|\leqslant\varepsilon$, $0\leqslant k\leqslant 1$ 时

$$\operatorname{dis}(\lambda_0+i\mu,\sigma(T_k))\geqslant\delta.$$

由引理 IV, 1.1 可知对几乎所有的 λ 成立着

$$\|(\lambda_0+i\mu-(\lambda+i(\beta(\lambda)+k\alpha(\lambda)^2)))x\|\geqslant\delta\|x\|,\quad x\in\mathfrak{D}$$

不妨设上式对一切 λ 成立. 所以

$$\|(\beta(\lambda)+k\alpha(\lambda)^2-\mu)x\|^2\geqslant(\delta^2-(\lambda-\lambda_0)^2)\|x\|^2.$$

所以当

$$|\lambda-\lambda_0|\leqslant\min\left(\varepsilon,\frac{\delta}{2}\right),\quad |\operatorname{Re}l-\mu_0|\leqslant\varepsilon$$

时，$\beta(\lambda)+k\alpha(\lambda)^2-l$ 是逆的，而且 $(\beta(\lambda)+k\alpha(\lambda)^2-l)^{-1}$ 是 k 的连续函数，同时

$$\|(\beta(\lambda)+k\alpha(\lambda)^2-\ )^{-1}\|\leqslant\frac{2}{\delta}.$$

所以这时 (2.25) 的右边在条形区域

$$\Delta=\{|\mathrm{Re}\, l-\mu_0|<\varepsilon\}$$

中是 l 的解析函数，即对任一 $x\in\mathfrak{D}$,

$$\Phi_x(l)=\int\frac{(B(\lambda,t)x,x)}{t-l}dt$$

是 Δ 中的解析函数. 当 λ,μ,ν 为实数，$|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$，$|\mu-\mu_0|<\varepsilon$ 时，由 Plemelj 公式

$$0=\lim_{\nu\to0+}(\Phi_x(\mu+i\nu)-\Phi_x(\mu-i\nu))$$
$$=2\pi i(B(\mu,\nu)x,x)=0$$

得知存在正数 ε_1，使当 $|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon_1$，$|\mu-\mu_0|<\varepsilon_1$ 时

$$B(\mu,\lambda)=0.$$

因此 $\lambda_0+i\mu_0\bar{\in}D(T)$.

(ii) 再证当 T 又是完全非正常算子时，$\tau(T)\subset D(T)$. 记

$$\Phi(\lambda,l)=\exp\int\frac{B(\lambda,t)}{t-l}dt,$$

若 $\lambda_0+i\mu_0\bar{\in}D(T)$. 则存在正数 ε 使得当 $|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$，$|\mu-\mu_0|<\varepsilon$ 时

$$B(\lambda,\mu)=0.$$

于是可知当 $|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$，$|\mathrm{Re}\, l-\mu_0|<\varepsilon$ 时，$\Phi(\lambda,l)$ 是解析函数. 记

$$D_1=\left\{(\lambda,l)\,\middle|\,|\lambda-\lambda_0|\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\ |\mathrm{Re}\, l-\mu_0|\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\ \mathrm{Im}\, l\neq0\right\},$$

$$M^2=\sup_{(\lambda,l)\in D_1}\left|\frac{\Phi(\lambda,l)-\Phi(\lambda,\bar{l})}{l-\bar{l}}\right|.$$

由于

$$\frac{\Phi(\lambda,l)-\Phi(\lambda,\bar{l})}{l-\bar{l}}=\alpha(\lambda)(\beta(\lambda)-\bar{l})^{-1}(\beta(\lambda)-l)^{-1}\alpha(\lambda).$$

所以当 $(\lambda,l)\in D_1$ 时，

$$\|(\beta(\lambda)-l)^{-1}\alpha(\lambda)x\|\leqslant M\|x\|. \tag{3.3}$$

如果 $\beta(\lambda)$ 的谱分解为

$$\beta(\lambda)=\int t dF(t,\lambda),$$

那么 (3.3) 等价于

$$\int\frac{1}{|t-l|^2}d(F(t,\lambda)\alpha(\lambda)x,\alpha(\lambda)x)\leqslant M^2\|x\|^2,$$

$$x\in\mathfrak{D},\quad(\lambda,l)\in D_1$$

因此当 $|\lambda-\lambda_0|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ 时,

$$f_x(l)=\int\frac{d(F(t,\lambda)\alpha(\lambda)x,\alpha(\lambda)x)}{t-l}.$$

满足条件

$$f_x(\mu+i0)=f_x(\mu-i0),$$

$$\mu\in\left[\mu_0-\frac{\varepsilon}{2},\mu_0+\frac{\varepsilon}{2}\right].$$

因此当 $t\in\left(\mu_0-\frac{\varepsilon}{2},\mu_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 时, $(F(t,\lambda)\alpha(\lambda)x,\alpha(\lambda)x)$ 不依赖于 t. 即

$$\xi(\lambda)\alpha(\lambda)x=0,\tag{3.4}$$

其中 $\xi(\lambda)=F\left(\left(\mu_0-\frac{\varepsilon}{2},\mu_0+\frac{\varepsilon}{2}\right),\lambda\right)$. 可以证明是 $\xi(\cdot)$ 可测的投影算子值函数,由 (3.4) $\xi(\cdot)\alpha(\cdot)=0$. 因此

$$\alpha(\cdot)\xi(\cdot)=\xi(\cdot)\alpha(\cdot)=0.\tag{3.5}$$

然而显然有

$$\xi(\cdot)\beta(\cdot)=\beta(\cdot)\xi(\cdot).\tag{3.6}$$

我们记 $\mathscr{H}'=\{\xi(\cdot)f(\cdot)|f\in\mathscr{H}\}$, 则 (3.5)—(3.6) 可知 $\mathscr{H}'$ 约化 T,而且

$$(T|_{\mathscr{H}'}f)(t)=(t+i\beta(t))f(t).$$

所以 $T|_{\mathscr{H}'}$ 是正常的. 由假设 T 是完全非正常的. 因此 $\mathscr{H}'=\{0\}$. 这样一来

$$\left(\mu_0-\frac{\varepsilon}{2},\mu_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)\subset\rho(\beta(\lambda))$$

记

$$D_2=\left\{(\lambda, l)\,\middle|\,|\lambda-\lambda_0|\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\ |\mathrm{Re}\, l-\mu_0|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

当 $(\lambda, l)\in D_2$ 时，

$$\|(\beta(\lambda)-l)^{-1}\alpha(\lambda)\|\leqslant M.$$

另一方面，当 $l\in\rho(\beta(\lambda))$ 时，

$$(\beta(\lambda)+k\alpha(\lambda)^2-l)(\beta(\lambda)-l)^{-1}\alpha(\lambda)$$
$$=\alpha(\lambda)\Phi(\lambda, l)k+(1-k)).$$

由于当 $|\lambda-\lambda_0|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$，$|\mu-\mu_0|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ 时，$\int\frac{B(\lambda, t)}{t-\mu}dt$ 为有界自共轭算子，而且显然

$$\left\|\int\frac{B(\lambda, t)}{t-\mu}dt\right\|\leqslant M_1<\infty.$$

因此当 $0\leqslant k\leqslant 1$ 时，

$$k\Phi(\lambda, l)+(1-k)\geqslant e^{-M_1}.$$

所以当 $|\lambda-\lambda_0|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$，$|\mu-\mu_0|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ 时，$k\Phi(\lambda, l)+(1-K)$ 是可逆的，而且

$$\|(k\Phi(\lambda, l)+(1-k))^{-1}\|\leqslant e^{M_1}.$$

又由于当 $\mathrm{Re}\, l=\mu$，$|\mu-\mu_0|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ 时，

$$\left\|\int\frac{B(\lambda, t)}{t-l}dt-\int\frac{B(\lambda, t)}{t-\mu}dt\right\|\leqslant|\mathrm{Im}\, l|c.$$

此处 c 为一常数，仅依赖于 ε. 又因为

$$\|e^A-e^B\|\leqslant\|A-B\|e^{\max(\|A\|,\|B\|)},$$

所以存在一个正数 δ 使得当

$$(\lambda, l)\in D_3=\left\{(\lambda, l)\,\middle|\,|\lambda-\lambda_0|\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\right.$$
$$\left.|\mathrm{Re}\, l-\mu|\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\ |\mathrm{Im}\, l|\leqslant\delta\right\}$$

时，$k\Phi(\lambda, l)+(1-k)$ 可逆，而且

$$N = \sup_{(\lambda,l)\in D_3} \|(k\Phi(\lambda, l) + (1-k))^{-1}\| < \infty.$$

于是当 $(\lambda, l)\in D_3$，且 $\operatorname{Im} l \neq 0$ 时，

$$\begin{aligned}
&\|(\beta(\lambda) + k\alpha(\lambda)^2 - l)^{-1}\alpha(\lambda)\| \\
&= \|(\beta(\lambda) - l)^{-1}\alpha(\lambda)(\Phi(\lambda,l)k + (1-K))^{-1}\| \\
&\leqslant NM.
\end{aligned}$$

由前面同样的讨论可知当 $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$ 时

$$\left(\mu_0 - \frac{\varepsilon}{4}, \mu_0 + \frac{\varepsilon}{4}\right)\subset\rho(\beta(\lambda) + K\alpha(\lambda)^2),$$

$$0 \leqslant k \leqslant 1$$

这样一来，$\lambda_0 + i\mu_0 \bar{\in} \tau(T)$. 即 $\tau(T)\subset D(T)$. 证毕.

同样地当 $T\in SHU$ 时，定义它的 Pincus 函数（见定理 2.5）$B(e^{i\theta}, \rho)$（以复数 $\rho e^{i\theta}$ 为自变数）的本性支集为 T 的决定集 $D(T)$. 同样地有

定理 3.2 如果 $T\in SHU$，那么

$$D(T)\subset\sigma(T). \tag{3.7}$$

如果 T 又是完全非正常的，那么

$$D(T) = \sigma(T). \tag{3.8}$$

上述定理的证明完全与定理 3.1 一样.

2. Putnam 不等式 利用精刻函数的决定集，可以得到下面的 Putnam 不等式，它是由 T 的谱的测度估计 T 的导算子.

定理 3.3 设 T 为亚正常算子，则

$$\|[T^*, T]\| \leqslant \frac{1}{\pi} m_2(D(T)). \tag{3.9}$$

此地 m_2 表示平面 Lebesgue 测度.

证 我们不妨只考察奇异积分算子模型. 记 $D_T = [T^*, T]$. 由 (1.1)，当 $f\in \mathscr{H}$ 时，

$$(D_T f)(\lambda) = \frac{\alpha(\lambda)}{\pi}\int \alpha(x)f(x)dx \tag{3.10}$$

另一方面，在 (2.25) 中两边乘以 l，并令 $l\to\infty$ 即得

$$\int B(\lambda, t)dt = \alpha(\lambda)^2.$$

我们注意由 (3.10) 可知形如 $f_a(\cdot)=\alpha(\cdot)a$, $a\in\mathfrak{D}$ 的向量在 $D_T\mathscr{H}$ 中稠密，为了计算 D_T 的范数，只要考察

$$\sup\frac{(D_Tf_a, f_a)}{(f_a, f_a)}$$

即可. 记 $b_a=\left(\int\alpha(\lambda)^2d\lambda\right)^{1/2}a$，那么容易算出

$$\|f_a\|=\|b_a\|_{\mathfrak{D}}.$$

而且

$$\begin{aligned}(D_Tf_a, f_a)&=\frac{1}{\pi}\left\|\int\alpha(\lambda)^2d\lambda a\right\|_{\mathfrak{D}}^2-\frac{1}{\pi}\left\|\left(\int\alpha(\lambda)^2d\lambda\right)^{1/2}b_a\right\|_{\mathfrak{D}}^2\\&=\frac{1}{\pi}\int(\alpha(\lambda)^2b_a, b_a)_{\mathfrak{D}}d\lambda\\&=\frac{1}{\pi}\iint_{D(T)}(B(\lambda, t)b_a, b_a)_{\mathfrak{D}}d\lambda dt.\end{aligned}$$

利用 $B(\lambda, t)\leqslant I$ 即得 (3.9)，证毕.

系 3.4 如果 T 是亚正常的，那么

$$\|[T^*, T]\|\leqslant\frac{1}{\pi}m_2(\sigma(T))^{1)} \tag{3.11}$$

这称为 Putnam 的不等式，它由定理 3.1 从 (3.9) 立即导出，因此 (3.9) 在形式上比 Putnam 不等式更强.

对于 $SH—SHU$ 中算子 T，我们按引理 II, 3.5 把它延拓成 SHU 中算子 $\tilde{T}$. 我们记 $D(\tilde{T})$ 为 $D(T)$，称它为 T 的决定集.

定理 3.5 设 T 是半亚正常的，则

$$\||T|_r-|T|_l\|\leqslant\frac{1}{2\pi}\iint_{\rho e^{i\theta}\in D(T)}d\rho d\theta \tag{3.12}$$

证 我们先考察 $T\in SHU$ 的情况而且只考察它的奇异积分模型. 由于这时

1) 这里 $m_2(E)$ 表示 E 的平面 Lebesgue 测度.

$$((|T|_r - |T|_l)f)(e^{i\theta}) = \frac{\alpha(e^{i\theta})}{2\pi}\int \alpha(e^{i\xi})f(e^{i\xi})d\xi$$

仿照定理 3.3 的证明可知这时 (3.12) 成立.

当 $T \in SH—SHU$ 时，由引理 II, 3.5, 作 $\tilde{T} \in SHU$ 及 $\tilde{U}$ 等，由于 $D(\tilde{T}) = D(T)$ 而且

$$|\tilde{T}|_r - |\tilde{T}|_l = (|T|_r - |T|_l) \oplus O,$$

因此相应于 $\tilde{T}$ 的不等式 (3.12) 立即可导出相应于 T 的不等式 (3.12)，证毕.

我们注意，当 T 为亚正常算子时，它也是半亚正常的；它作为亚正常算子的决定集 $D(T)$ 和作为半亚正常算子的决定集从定义上来说，可能是另一集，但是可以证明这两者实际上相等.

系 3.6 如果 T 为半亚正常算子，那么

$$\||T|_r - |T|_l\| \leqslant \frac{1}{2\pi} \iint_{\rho e^{i\theta} \in \sigma(T)} d\rho d\theta. \tag{3.13}$$

这是 Putnam 不等式对半亚正常情况的推广. 由定理 3.2，和 (3.12) 立即导出.

系 3.7 设 T 为半亚正常算子. 如果 $m_2(T) = 0$ 或 $m_2(\sigma(T)) = 0$，那么 T 为正常的.

证 当 $m_2(D(T)) = 0$ 时，从 (3.13) 可知

$$|T|_r = |T|_l \tag{3.14}$$

即有 $(T^*T)^{1/2} = (TT^*)^{1/2}$，把 (3.14) 式两边平方后即知 T 为正常的.

3. 亚正常算子的直角分割 对于亚正常算子的直角分割，我们从定理 I, 3.3 得到谱分割关系 (I, 3.26). 但是 $\sigma(T_\Delta)$ 的境界情况(在 $\bar{\mathfrak{D}}_\Delta - \mathfrak{D}_\Delta$ 中那部分) 还没有搞清楚. 我们现在要利用系 3.7 来研究它. 我们沿用 §I, 3 中有关的记号.

引理 3.8 设 $T = X + iY$ 为亚正常算子，$X = \int x dE(x)$ 为谱分解，Δ 为实数直线上一个区间，$\mathscr{H}_\Delta = E(\Delta)\mathscr{H} \neq \{0\}$. 如果 T 是完全非正常的，那么 $\mathscr{H}_\Delta$ 中的算子 $T_\Delta = E(\Delta)T|_{\mathscr{H}_\Delta}$ 也

是完全非正常的.

证 用反证法. 如果 T_Δ 不是完全非正常的,那么必有 T_Δ 的约化子空间 $\mathscr{H}_1\subset\mathscr{H}_\Delta$ 使 $\{0\}\neq\mathscr{H}_1\neq\mathscr{H}_\Delta$ 而 $T_\Delta|_{\mathscr{H}_1}$ 为正常的. 这时空间 $\mathscr{H}$ 分解为

$$\mathscr{H}=\mathscr{H}_1\oplus(\mathscr{H}_\Delta\ominus\mathscr{H}_1)\oplus\mathscr{H}_\Delta^\perp \tag{3.15}$$

而 X 和 Y 按分解式 (3.15), 可以写成如下的矩阵形式

$$X=\begin{pmatrix}X_1 & 0 & 0\\ 0 & \cdot & 0\\ 0 & 0 & X_3\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}Y_1 & 0 & L\\ 0 & \cdot & \cdot\\ L^* & \cdot & \cdot\end{pmatrix},$$

而 $X_1Y_1=Y_1X_1$. 因此

$$XY-YX=\begin{pmatrix}0 & 0 & X_1L-LX_3\\ 0 & \cdot & \cdot\\ X_3L-L^*X_1 & \cdot & \cdot\end{pmatrix}.$$

由 $i[X,Y]\geqslant 0$ 立即得到

$$X_1L-LX_3=0. \tag{3.16}$$

今证 $L=0$.

由于 T 为完全非正常的亚正常算子, 由 §I, 1 性质 (4) 和定理 I, 2.9 可知 $\sigma_p(X)=\varnothing$. 因此 $\sigma_p(X_j)\neq\varnothing$, $j=1,3$. 设 Δ 的两个端点为 a 和 b. 由于

$$\sigma(X_1)\subset[a,b],\quad \sigma(X_3)\subset(-\infty,a]\cup[b,\infty). \tag{3.17}$$

那么必有 X_1 的谱投影算子 P_n 使 $\sigma(P_nX_1)\subset\left[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}\right]$ 而且使

$$S-\lim_{n\to\infty}P_n=I_{\mathscr{H}_1}.$$

由 (3.16) 和 (3.17) 易知

$$L=\left(X_1-\frac{a+b}{2}I\right)^m L\left(X_3-\frac{a+b}{2}I\right)^{-m},$$

$$m=1,2,\cdots,$$

而且 $\left\|P_n\left(X_1-\frac{a+b}{2}I\right)\right\|\leqslant\left(\frac{b-a}{2}-\frac{1}{n}\right)$, $\left\|\left(X_3-\frac{a+b}{2}I\right)^{-1}\right\|$

$\leqslant\left(\frac{b-a}{2}\right)^{-1}$. 于是可知

$$\|P_nL\|=\lim_{m\to\infty}\left\|P_n\left(X_1-\frac{a+b}{2}I\right)^m L\right.$$
$$\left.\cdot\left(X_1-\frac{a+b}{2}I\right)^{-m}\right\|=0.$$

再令 $n\to\infty$ 就得 $L=0$. 这样一来, $\mathscr{H}_1$ 约化 T, 而且 $T|_{\mathscr{H}_1}$ 为正常的,这和假设冲突. 所以 T_Δ 是完全非正常的. 证毕.

设 E 是复平面中的一个有界闭集, l 是复平面中一个非空开线段. 如果有一开矩形 $\mathfrak{R}$ (关于 l 对称)包含 l 使

$$l\supset\mathfrak{R}\cap E\neq\varnothing$$

就称 l 是 E 的一个暴露线段.

引理 3.9 设 T 是完全非正常的亚正常算子, 则 $\sigma(T)$ 没有任何暴露线段.

证 用反证法,设 $\sigma(T)$ 有暴露线段 l. 由 §I, 1, 当 $\alpha,\beta\neq0$ 为任意负数时, $\alpha+\beta T$ 也是亚正常的, 当然它也是完全非正常的. 所为不妨设 l 在复平面的虚轴上, 而且实轴上有开区间 $\Delta=(-a,a)$ 使

$$\mathfrak{R}=\{x+iy\,|\,x\in\Delta,\ y\in l\},$$

满足

$$l\supset\mathfrak{R}\cap\sigma(T)\neq\varnothing. \tag{3.18}$$

设 $T=X+iY$, 用 §I, 3 的记号,我们有

$$\sigma(T_\Delta)\cap\mathfrak{D}_\Delta=\sigma(T)\cap\mathfrak{D}_\Delta,\quad \sigma(T_\Delta)\subset\overline{\mathfrak{D}}_\Delta. \tag{3.19}$$

由 (3.18—19) 可知 l 仍是 $\sigma(T_\Delta)$ 的暴露线段,而且

$$l\supset\mathfrak{R}\cap\sigma(T_\Delta)\neq\varnothing. \tag{3.20}$$

由引理 3.8, T_Δ 是完全非正常的. 作 T_Δ 的卡狄生分解 $X'+iY'$. 设 Y' 的谱分解为 $\int y dF(y)$. 我们作 T_Δ 的相应于 Y' 的直角分割

$$\mathscr{H}_{\Delta l}=F(l)\mathscr{H}_\Delta,\quad T_{\Delta l}=F(l)T_\Delta|_{\mathscr{H}_{\Delta l}}.$$

由引理 3.8, $T_{\Delta l}$ 仍是完全非正常的而且由 (3.19) 和定理 I, 3.3 可

知

$$\sigma(T_{\Delta l})\cap\mathfrak{R}=\sigma(T_\Delta)\cap\mathfrak{R}=\sigma(T)\cap\mathfrak{R},\quad \sigma(T_{\Delta l})\subset\overline{\mathfrak{R}}. \tag{3.21}$$

由 (3.20—21) 可知

$$0\neq\sigma(T_{\Delta l})\subset(\overline{\mathfrak{R}}-\mathfrak{R})\cup l.$$

然而 $m_2((\overline{\mathfrak{R}}-\mathfrak{R})\cup l)=0$，由系 3.7 可知 $T_{\Delta l}$ 为正常算子，这是矛盾. 所以 l 不存在. 证毕.

定理 3.10 设 $T=X+iY$ 为亚正常算子，X 与 Y 为自共轭的

$$X=\int xdE(x)$$

为 X 的谱分解，Δ 为实轴上的区间使 $\mathscr{H}_\Delta=E(\Delta)\mathscr{H}\neq 0$. 记 $T_\Delta=E(\Delta)T|_{\mathscr{H}_\Delta}$，那么

$$\sigma(T_\Delta)\subset\sigma(T). \tag{3.22}$$

证 不妨设 Δ 是开区间当 T 是正常算子时，(3.22)显然成立. 根据引理 I, 2.8 易知，只要当 T 为完全非正常的亚正常算子时来证明 (3.22). 由 (3.19) 可知 $\sigma(T_\Delta)\cap\mathfrak{D}_\Delta\subset\sigma(T)$，而且要证 (3.22) 只要证明

$$\sigma(T_\Delta)\cap(\overline{\mathfrak{D}}_\Delta-\mathfrak{D}_\Delta)\subset\sigma(T) \tag{3.23}$$

即可. 记 $\Gamma_\Delta=\overline{\mathfrak{D}}_\Delta-\mathfrak{D}_\Delta$，这是两根直线. 由于 $\Gamma_\Delta-\sigma(T)$ 是一些直线段的和集，如果其中有一个线段与 $\sigma(T_\Delta)$ 相交，那么从 $\sigma(T_\Delta)\subset\overline{\mathfrak{D}}_\Delta$ 可知 $\sigma(T_\Delta)$ 必有一暴露线段 $l\subset L$，由引理 3.9 可知这是矛盾. 因此 (3.23) 成立. 证毕.

§4 表 征 函 数

我们准备着重讨论半亚正常算子（相应于极分解）的表征函数，至于亚正常算子(相应于卡狄生分解)的表征函数也可以类似地讨论，但我们只准备简略地提及. 这里仍然使用奇异积分算子模型，这样比较方便一些.

1. 另一类决定函数 我们引入另一类决定函数. 设 T 属于

$SHU(\mathscr{H})$，$\mathfrak{D}$ 为辅助空间．作算子 K 和 K^* 如(1.17)．这时

$$Q_T = |T|_r - |T|_l = KK^*.$$

作 $\mathscr{L}(\mathfrak{D})$ 值解析函数如下：当 $z \in \rho(U)$，$l \in \rho(T)$ 时，

$$Y_T(z, l) = I + zK^*(I - zU^*)^{-1}(lI - T)^{-1}K, \qquad (4.1)$$

有时把它简记为 $Y(\cdot, \cdot)$．这个函数有如下一些性质．

(1) 对一切 $z \in \rho(U)$，$l \in \rho(T)$，$Y(z, l)$ 是可逆的，而且

$$Y(z, l)^{-1} = I - zK^*(lI - T)^{-1}(I - zU^*)^{-1}K. \qquad (4.2)$$

(2) 函数 $Y(\cdot, \cdot)$ 有如下的乘积表示

$$KY(z, l) = \{(zU^* - I), (T - lI)\}. \qquad (4.3)$$

$$Y(z, l)K^* = \{(zU^* - I)^{-1}, (T - lI)^{-1}\}, \qquad (4.4)$$

(3) 设 $T = U|T| \in SHU(\mathscr{H})$，$T' = U'|T'| \in SHU(\mathscr{H}')$，如果存在酉算子 $V: \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ 使

$$T' = VTV^{-1}, \quad U' = VUV^{-1}, \qquad (4.5)$$

那么必有 $\mathfrak{D}' \to \mathfrak{D}$[1] 的酉算子 S，使当 $z \in \rho(U) = \rho(U')$，$l \in \rho(T) = \rho(T')$ 时

$$Y_T(z, l) = SY_{T'}(z, l)S^{-1}. \qquad (4.6)$$

记 $\mathfrak{P}_- = \mathfrak{P}$，$\mathfrak{P}_+ = I - \mathfrak{P}$．又记

$$f(\cdot; l, a) = (T - lI)^{-1}\alpha(\cdot)a.$$

(4) 当 $a \in \mathfrak{D}$，并且 $l \in \rho(T)$ 时，

$$Y(z, l)a = a - \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\alpha(e^{i\eta})f(e^{i\eta}; l, a)}{e^{i\eta} - z} de^{i\eta},$$

因此它在单位圆周上有境界值

$$Y_\pm(e^{i\theta}, l)a = a \pm e^{i\theta}\mathfrak{P}_\pm(\alpha(\cdot)f(\cdot; l, a)) \qquad (4.7)$$

其中 $Y_\pm(\cdot, l)a = S - \lim\limits_{r \to 1 \pm 0} Y(r(\cdot), l)a$.

2. 表征函数 我们现在引进表征函数如下：设 $T = U|T| \in SHU$．用 $T^\pm$ 表示 T 的极记号算子．记

$$|T|^\pm = U^*T^\pm, \quad B = (|T|^+ - |T|^-)^{1/2}.$$

---

1) 此地 $\mathfrak{D}'$ 是相应于 T'，$\mathscr{H}'$ 的辅助空间．

作 $\rho(T^-)$ 上的 $\mathscr{L}(\mathfrak{D})$ 值解析函数如下.

$$W_T(l) = I + B(T^- - lI)^{-1}UB^{1)} \tag{4.8}$$

或记为 $W(l)$，称之为 T 的表征函数. 它有如下的一些初等性质.

当 $l \in \rho(T^+) \cap \rho(T^-)$ 时，$W(l)$ 为可逆，而且

$$W(l)^{-1} = I - B(T^+ - lI)^{-1}UB \tag{4.9}$$

又

$$W(l)B = B(lI - T^-)^{-1}(lI - T^+),$$
$$BW(l) = (lI - T^+)(lI - T^-)^{-1}B, \tag{4.10}$$

如果用奇异积分算子模型写出，那么

$$(Bf)(e^{i\theta}) = \alpha(e^{i\theta})f(e^{i\theta}),$$

而且 $W_T(l)$（简记为 $W(l)$）是乘算子

$$(W(l)f)(e^{i\theta}) = W_l(e^{i\theta})f(e^{i\theta}),$$

其中

$$W_l(e^{i\theta}) = I + \alpha(e^{i\theta})(\beta(e^{i\theta}) - le^{-i\theta})^{-1}\alpha(e^{i\theta}). \tag{4.11}$$

我们也称 $\mathscr{L}(\mathfrak{D})$ 值的二元函数 $W_l(e^{i\theta})$ 为 T 的表征函数. 它有如下的性质:

(1) 它与 $R(\cdot,\cdot)$ 有如下的关系

$$W_l(e^{i\theta}) = R(e^{i\theta}, le^{-i\theta}). \tag{4.12}$$

(2) 当 $l \in \rho(T^-)$ 时，$W_l(e^{i\theta})$ 是可逆的，而且

$$W_l(e^{i\theta})^{-1} = I - \alpha(e^{i\theta})(\beta(e^{i\theta}) + \alpha(e^{i\theta})^2 - le^{-i\theta})^{-1}\alpha(e^{i\theta}). \tag{4.13}$$

(3) 它有如下的乘积表示，

$$\alpha(\cdot)W_l(\cdot) = (\mathscr{S}_U^+(T - lI))(\cdot)(\mathscr{S}_U^-((T - lI)^{-1}))(\cdot)\alpha(\cdot), \tag{4.14}$$

$$W_l(\cdot)\alpha(\cdot) = \alpha(\cdot)(\mathscr{S}_U^-((T - lI)^{-1}))(\cdot)(\mathscr{S}_U^+(T - lI))(\cdot) \tag{4.15}$$

其中

$$(\mathscr{S}_U^\pm(T - lI))(\cdot) = T^\pm(\cdot) - lI.$$

---

1) 我们也可以把它限制为 $\overline{R_A\mathscr{H}}$ 中的算子.

而 $T^{\pm}(\cdot)$ 的表示见 (III. 1.11).

现在我们引入 Riemann-Hilbert 问题.

定理 4.1 如果 $T\in SHU$, $l\in\rho(T)$, $a\in\mathfrak{D}$, 那么 $Y(\cdot,l)a$ 是 Riemann-Hilbert 问题

$$W_l(e^{i\theta})Y_-(e^{i\theta},l)a=Y_+(e^{i\theta},l)a \tag{4.16}$$

的解.

证 由于 $(T-lI)f(\cdot;l,a)=\alpha(\cdot)a$, 我们有

$$e^{i\theta}(\beta(e^{i\theta})-le^{-i\theta}I)f(e^{i\theta};l,a)$$
$$+e^{i\theta}\alpha(e^{i\theta})\mathfrak{P}_-(\alpha(\cdot)f(\cdot;l,a))=\alpha(e^{i\theta})a$$

将上式两边左乘以 $\alpha(e^{i\theta})(\beta(e^{i\theta})-le^{-i\theta})^{-1}$ 后,并利用 (4.7) 就得到 (4.16). 证毕.

§5 与半亚正常算子有关的 Toeplitz 算子

我们现在要通过表征函数把半亚正常算子的有关谱的问题与 Toeplitz 算子的有关问题联系起来. 但这里的 Toeplitz 算子是拓广了的.

1. Toeplitz 算子

设 $\mathfrak{D}$ 是复的可析 Hilbert 空间. $L^2(\mathfrak{D})$ 是 C_1 上 $\mathfrak{D}$ 值的平方可积函数全体所成的 Hilbert 空间. $H^2(\mathfrak{D})$ 是 Hardy 空间. $\mathfrak{P}$ 是 $L^2(\mathfrak{D})$ 到 $H^2(\mathfrak{D})$ 上的投影算子. 令 $\mathscr{M}$ 为 C_1 上 $\mathscr{L}(\mathfrak{D})$ 值的一致有界的可测函数 $F(\cdot)$ 全体(即存在常数 M 使对一切 $e^{i\theta}\in C_1$ 成立 $\|F(e^{i\theta})\|\leqslant M$) 当 $F(\cdot)\in\mathscr{M}$ 时,我们定义 $H^2(\mathfrak{D})$ 中线性算子如下:

$$\tilde{F}:f(\cdot)\longmapsto\mathfrak{P}(F(\cdot)f(\cdot)),\quad f\in H^2(\mathfrak{D}). \tag{5.1}$$

显然 $\tilde{F}$ 是有界的. 我们称 $\tilde{F}$ 为相应于 F 的 Toeplitz 算子. 我们现在给出 Toeplitz 算子一些初等性质:

(1) 记 $F^*(e^{i\theta})=(F(e^{i\theta}))^*$, 那么

$$\tilde{F}^*=\tilde{F}^*. \tag{5.2}$$

证 这是因为 $f,g\in H^2(\mathfrak{D})$ 时

$$(\tilde{F}f, g) = (\mathfrak{P}(Ff)g) = (Ff, g) = (f, F^*g)$$
$$= (f, \mathfrak{P}(F^*g)) = (f, \tilde{F}^*g).$$

所以(5.2)成立．证毕．

(2) 如果 $F(\cdot) \in \mathscr{M}$ 是单位圆内解析函数 $F(z)$ 的境界值(即又有 $F(\cdot) \in H^2(\mathscr{L}(\mathfrak{D}))$，那么

$$\tilde{F}: f(\cdot) \longmapsto F(\cdot)f(\cdot), \quad f \in H^2(\mathfrak{D}). \tag{5.3}$$

若记 $\|F\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{e^{i\theta} \in C_1} \|F(e^{i\theta})\|$，则

$$\|\tilde{F}\| = \|F\|_\infty. \tag{5.4}$$

如果当 $|z| < 1$ 时，$F(z)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{D})$，而且是一致有界的，记 $F(z)^{-1}$ 的境界值函数 $\lim\limits_{r \to 1+0} F(re^{i\theta})^{-1}$ 为 F^{-1}，那么

$$\tilde{F}^{-1} = \widetilde{F^{-1}}. \tag{5.5}$$

证 (5.3) 是显然的．而且由 (5.3) 立即可知

$$\|\tilde{F}\| \leqslant \|F\|_\infty.$$

今证明相反的不等式．任取 $\mathfrak{D}$ 中的单位向量 a 及复值函数 $f \in H^2$，那么由 $fa \in H^2(\mathfrak{D})$ 得到

$$\frac{1}{2\pi}\int \|F(e^{i\theta})a\| |f(e^{i\theta})|^2 d\theta \leqslant \|\tilde{F}\| \cdot \frac{1}{2\pi}\int |f(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

但是由此可证对任何非负值的可测函数 $g(e^{i\theta})$

$$\int \|F(e^{i\theta})a\| g(e^{i\theta}) d\theta \leqslant \|\tilde{F}\| \int g(e^{i\theta}) d\theta$$

成立．于是可知

$$\|F(\cdot)a\|_\infty \leqslant \|\tilde{F}\|,$$

我们就可进一步得到

$$\|F\|_\infty \leqslant \|\tilde{F}\|.$$

所以 (5.4) 成立．

如果当 $|z| < 1$ 时，$F(z)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{D})$，而且一致有界．那么由解析函数的境界值理论可知它的境界值函数 F^{-1} 存在而且属于 $\mathscr{M}$．对 $0 < r < 1$ 时，我们记

$$F_r(e^{i\theta}) = F(re^{i\theta}), \quad F_r^{-1}(e^{i\theta}) = F(re^{i\theta})^{-1},$$

那么易知 $\widetilde{F}_r F_r^{-1} = \widetilde{F_r^{-1}} \widetilde{F}_r = I$. 由于

$$\sup_{0\leqslant r\leqslant 1} \|F_r\|_\infty < +\infty, \quad \sup_{0\leqslant r\leqslant 1} \|F_r^{-1}\|_\infty < \infty,$$

可知

$$\widetilde{F}\widetilde{F^{-1}} = (S - \lim_{r\to 1-0} \widetilde{F}_r)(S - \lim_{r\to 1-0} \widetilde{F_r^{-1}}) = S$$
$$- \lim \widetilde{F}_r \widetilde{F_r^{-1}} = I.$$

同样地 $\widetilde{F^{-1}}\widetilde{F} = I$. 即 (5.5) 成立. 证毕.

(3) 如果 $F(\cdot) \in \mathscr{M}$ 是单位圆外(包括无限远点)解析函数 $F(z)$ 的境界值函数,而且当 $|z| > 1$ 时, $F(z)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{D})$ 又是一致有界的. 设 $F(z)^{-1}$, $|z| > 1$ 的境界值函数为 F^{-1}, 那么 $F^{-1} \in \mathscr{M}$. $\widetilde{F}^{-1} \in \mathscr{L}(H^2(\mathfrak{D}))$, 而且 (5.5) 成立.

证 作函数

$$G(z) = F\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)^*,$$

那么 $G(z)$ 为单位圆内的解析函数,它在单位圆上的境界值函数是

$$G(\cdot) = F(\cdot)^*, \tag{5.6}$$

因此由 (5.2) 可知

$$\widetilde{F} = (\widetilde{F^*})^* = \widetilde{G}^*, \tag{5.7}$$

根据 (2) 及 (5.5) 可知 $G^{-1} \in \mathscr{M}$, $\widetilde{G}^{-1} \in \mathscr{L}(H^2(\mathfrak{D}))$, 而且 $\widetilde{G}^{-1} = \widetilde{G^{-1}}$, 由 (5.7) 及

$$G^{-1}(\cdot) = F^{-1}(\cdot)^*,$$

可知 $\widetilde{F}^{-1} = (\widetilde{G}^{-1})^* \in \mathscr{L}(H^2(\mathfrak{D}))$ 而且

$$\widetilde{F}^{-1} = (\widetilde{G^{-1}})^* = (\widetilde{F^{-1*}})^*,$$

再由 (5.2) 得到 (5.5). 证毕.

2. 由表征函数所定义的算子 设 $T = U|T| \in SHU$, 现在利用它的由奇异积分算子模型得到的(§4中的)表征函数 $W_l(\cdot)$, $l \in \rho(T^-)$, 我们作出相应的 Toeplitz 算子 $\widetilde{W}_l$. 下面我们要研究算子 $\widetilde{W}_l$ 的谱与 T 的谱之间的关系.

定理 5.1 设 $\lambda \in \rho(T^-)$, (1) $\lambda \in \sigma_p(T)$ (或 $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$) 的充要条件是

$$0 \in \sigma_p(\widetilde{W}_\lambda). \text{（相应地 } 0 \in \sigma_p(\widetilde{W}_\lambda^*)\text{）} \tag{5.8}$$

（2）映射

$$L_\lambda : h \longmapsto (\lambda e^{-i\theta} I - \beta)^{-1} \alpha h, \quad h \in \mathcal{N}(\widetilde{W}_\lambda)^{1)}. \tag{5.9}$$

是 $\mathcal{N}(\widetilde{W}_\lambda)$ 到 $\mathcal{N}(T - \lambda I)$ 上的一对一的线性有界算子．其逆为

$$f \longmapsto \mathfrak{P}(\alpha f).$$

（相应地

$$^*L_\lambda : h \longmapsto (\bar{\lambda} I - \beta e^{-i\theta})^{-1} \alpha h, \quad h \in \mathcal{N}(\widetilde{W}_\lambda^*)$$

是 $\mathcal{N}(\widetilde{W}_\lambda^*)$ 到 $\mathcal{N}(T^* - \lambda I)$ 的线性有界算子．）

（3）当 $\lambda \in \sigma_p(T)$（相应地 $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$）时，$\lambda$（相应地 $\bar{\lambda}$）的重复度与 0 作为算子 $\widetilde{W}_\lambda$（相应地 $\widetilde{W}_\lambda^*$）的特征值的重复度相等．

证 设 $h \in \mathcal{N}(\widetilde{W}_\lambda)$，记

$$f = L_\lambda h \tag{5.10}$$

则

$$\alpha f = (I - W_\lambda) h \tag{5.11}$$

上式两边以 $\mathfrak{P}$ 作用之得

$$\mathfrak{P}(\alpha f) = h. \tag{5.12}$$

由 (5.10) 及 (5.12) 可算出 $f \in \mathcal{N}(T - \lambda I)$，即

$$L_\lambda(\mathcal{N}(\widetilde{W}_\lambda)) \subset \mathcal{N}(T - \lambda I). \tag{5.13}$$

反之对 $f \in \mathcal{N}(T - \lambda I)$，由 (5.12) 作出 h，那么 (5.10) 成立．从而立即导出 (5.6)．再由 (5.11—12) 得知 $h \in \mathcal{N}(\widetilde{W}_\lambda)$．因此

$$\mathcal{N}(T - \lambda I) \subset L_\lambda(\mathcal{N}(\widetilde{W}_\lambda)). \tag{5.14}$$

由 (5.13—14) 即知

$$\mathcal{N}(T - \lambda I) = L_\lambda(\mathcal{N}(\widetilde{W}_\lambda)).$$

再由上面证明过程可知算子

$$f \longmapsto \mathfrak{P}(\alpha f), \quad f \in \mathcal{N}(T - \lambda I),$$

与 L_λ 互为逆算子．证毕．

定理 5.2 设 $\lambda \in \rho(T^-)$，(1) $\lambda \in \sigma_a(T)$（或相应 $\bar{\lambda} \in \sigma_a(T^*)$）的充要条件是

---

1) 此地 $\mathcal{N}(A)$ 表示算子 A 的零空间．

$$0 \in \sigma_a(\widetilde{W}_\lambda), \quad \text{相应地 } 0 \in \sigma_a(\widetilde{W}^*_{\bar{\lambda}}).$$

我们按照 §I,2 中第 4 段办法分别对空间 $\mathscr{H}$ 和 $H^2(\mathfrak{D})$ 作 $\mathfrak{R} \supset \mathscr{H}$, $\mathfrak{R}^2(\mathfrak{D}) \supset H^2(\mathfrak{D})$, 把 $\mathscr{L}(\mathscr{H}) \longrightarrow \mathscr{L}(\mathfrak{R})$ 和 $\mathscr{L}(H^2(\mathfrak{D})) \longrightarrow \mathscr{L}^2(\mathfrak{R}^2(\mathfrak{D}))$ 的映象都记为 π. 称 $\mathscr{N}(\pi(T - \lambda I))$ 的维数为 T 相应于近似点谱 λ 的近似重复度.

(2) 映照 $\pi(L_\lambda)$[1] 是 $\mathscr{N}(\pi(\widetilde{W}_\lambda))$ 到 $\mathscr{N}(\pi(T - \lambda I))$ 上的(相应地 $\pi({}^*L_\lambda)$ 是 $\mathscr{N}(\pi(\widetilde{W}^*_{\bar{\lambda}}))$ 到 $\mathscr{N}(\pi(T^* - \bar{\lambda} I)$ 上的)一对一的线性有界算子,而且它的逆算子也是有界的.

(3) 当 $\lambda \in \sigma_a(T)$ (相应地 $\bar{\lambda} \in \sigma_a(T^*)$) 时, λ (相应地 $\bar{\lambda}$) 的近似重复度即为 0 作为 $\widetilde{W}_\lambda$ (相应地 $\widetilde{W}^*_{\bar{\lambda}}$) 的近似重复度.

注 上述定理可以用 §I.2 第 4 段引理中的 Berberian 技巧仿照定理 5.1 而直接证明. 但我们这里却先把这个定理的意义用原来空间 $\mathscr{H}$ 及 $H^2(\mathfrak{D})$ 中量表达出来,而经读者可以仿定理 5.1 的办法来证明之. 定理 5.3 中 (2)等价于下面的命题(我们只叙述 T 的近似特征向量情况,至于 T^* 的相应情况,完全类似):

设 $\{h_n\}$ 是 $H^2(\mathfrak{D})$ 中单位向量列,而且 $\widetilde{W}_\lambda h_n \to 0$, 那么必有

$$\lim_{n \to \infty} \|L_\lambda h_n\| > 0. \tag{5.15}$$

当 n 充分大后,记 $f_n = L_\lambda h_n / \|L_\lambda h_n\|$, 必有

$$\|(T - \lambda I) f_n\| \to 0. \tag{5.16}$$

反之若 $\{f_n\}$ 是使 (5.16) 成立的一列单位向量,那么必有单位向量列 $h_n \in H^2(\mathfrak{D})$, 使 $\widetilde{W}_\lambda h_n \to 0$, 而且

$$\|f_n - L_\lambda h_n / \|L_\lambda h_n\|\| \to 0.$$

其余证法和定理 5.1 的一样.

定理 5.3 设 $\lambda \in \rho(T^-)$, 那么 $\lambda \in \sigma(T)$ 的充要条件是

$$0 \in \sigma(\widetilde{W}_\lambda). \tag{5.17}$$

证 由定理 I, 2.6 可知 $\lambda \in \rho(T)$ 等价于

$$\lambda \bar{\in} \sigma_a(T), \quad \bar{\lambda} \in \sigma_a(T^*) \tag{5.18}$$

---

1) L_λ 的定义见 (5.14).

再由定理(5.3)可知(5.18)等价于

$$0 \bar{\in} \sigma_e(\widetilde{W}_\lambda), \quad 0 \bar{\in} \sigma_e(\widetilde{W}_\lambda^*). \tag{5.19}$$

然而易知(5.19)等价于 $0 \in \rho(\widetilde{W}_\lambda)$. 证毕.

这样把对 T 和 T^* 的谱的研究转化成等价的与之对应的 $\widetilde{W}_\lambda$ 和 $\widetilde{W}_\lambda^*$ 的有关的问题.

第六章　谱　映　照

本章将建立亚正常算子在一类特殊函数变换

$$X+iY \longmapsto \varphi(X)+i\psi(Y)$$

和半亚正常算子在另一类特殊的函数变换

$$U|T| \longmapsto \varphi(U)\psi(|T|).$$

下的谱映照定理．其所以考察这两类函数变换，是由于亚正常算子(或半亚正常算子)的一些较好性质密切地联系于卡狄生分解或极分解的．但可以看出对更加广泛的函数变换类也能建立类似的理论出现．

§1　亚正常算子的函数变换

1. 一类函数变换　我们熟知正常算子具有极其简单的函数变换．设N是正常算子．它的谱分解式为

$$N=\int_{\sigma(N)}\lambda dE(\lambda).$$

如果 f 是 $\sigma(N)$ 上复值、有界、Baire 函数，那么N的函数变换$f(N)$也是正常算子而且有谱分解式

$$f(N)=\int_{\sigma(N)}f(\lambda)dE(\lambda). \tag{1.1}$$

如果 f 是连续函数，那么

$$\sigma(f(N))=f(\sigma(N)). \tag{1.2}$$

其中 $f(A)=\{f(z)\,|\,z\in A\}$．对于一般的线性有界算子 A，只有当 f 是解析函数时，才有 Riesz 函数演算：

$$f(A)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}f(\lambda)(\lambda I-A)^{-1}d\lambda,$$

这时对应的 (1.2) 也成立.

现在对于亚正常算子和半亚正常算子，我们也要在一类函数演算的情况下讨论 (1.2).

我们先考察亚正常算子. 在这一章中，我们对任何算子 $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$，总以 A_1 和 A_2 分别表示其实部和虚部，对复数 z 用 z_1，z_2 分别表示其实部和虚部. 设 φ_j 为 $\sigma(A_j)$ 上的有界 Baire 函数. 我们作 $\sigma(A_1)\times\sigma(A_2)$ 上的复变函数

$$\varphi(z)=\varphi_1(z_1)+i\varphi_2(z_2).$$

由于 A_j 是自共轭的，我们可类似于 (1.1) 定义函数演算 $\varphi_j(A_j)$. 因此我们也可以定义一类特殊函数演算

$$\varphi(A)=\varphi_1(A_1)+i\varphi_2(A_2). \tag{1.3}$$

本章中我们将不加说明地引用 (1.3) 式. 我们目前只限于讨论形如 (1.3) 的函数演算. 这是由于对更一般的函数演算还难以得到较好的结果. 顺便说一下，§I，3 中所讨论的 Cayley 变换(特别是定理 I，3.5) 可以看作是讨论另一类特殊的函数变换.

2. 一些函数类 为了讨论函数变换，我们将陆续地引进一些函数类.

设 E 为实数直线 R^1 上有界闭集. 令 $M(E)$ 为 E 上的有界的实 Baire 函数全体. 我们用 K_φ 表示由奇异积分核 $K_\varphi(\cdot,\cdot)$ 在 $L^2(E)$ 上定义的奇异积分算子

$$(K_\varphi f)(x)=S-\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi}\int\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-(y+i\varepsilon)}f(y)dy. \tag{1.4}$$

根据奇积分的性质，可证对几乎所有的 x

$$(K_\varphi f)(x)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi}\int_{|x-y|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}f(y)dy.$$

如果我们再考察 $L^2(E)$ 中算子

$$(Xf)(x)=xf(x),$$

和奇异积分算子 P (见 §III，1)，那么

$$K_\varphi=i[\varphi(X),P]. \tag{1.5}$$

特别当 φ 是光滑函数时，作积分核

$$K_\varphi(x, y)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}, & y\neq x,\\ \varphi'(x), & y=x,\end{cases}$$

这时

$$(K_\varphi f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}f(y)dy.$$

令

$$S(E)=\{\varphi|\varphi\in M(E),\quad K_\varphi\geqslant 0\}.$$

这种函数族对于亚正常算子理论来说是重要的.

我们还要考察这样的解析函数 $\varphi(z)$，它在复平面的上半平面是解析的，而且当 $\operatorname{Im} z>0$ 时，

$$\operatorname{Im}\varphi(z)>0,$$

这种函数称为 Pick 函数，Donoghue [1] 证明了：函数 $\varphi(z)$ 为 Pick 函数的充要条件是它有如下的唯一的典型表示

$$\varphi(z)=\alpha z+\beta+\int\left[\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right]d\mu(\lambda),$$

$$\operatorname{Im} z>0, \tag{1.6}$$

其中 $\alpha\geqslant 0$，β 是实数．$\mu(\cdot)$ 是实轴上非负 Borel 测度而且使

$$\int\frac{d\mu(\lambda)}{1+\lambda^2}<+\infty.$$

对于给定的 E，我们需要考察如下的一个子族．令 E^c 是 E 在 R^1 中余集．我们把 (1.4) 中测度 μ 集中在 E^c 上的那种 Pick 函数全体记为 $P(E)$．利用 Cauchy 型积分的知识可以证明当 $\varphi\in P(E)$ 时，对几乎所有 $x\in E$，

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\varphi(x+i\varepsilon)=\alpha x+\beta+\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{|\lambda-x|>\varepsilon}\left[\frac{1}{\lambda-x}-\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right]d\mu(\lambda), \tag{1.7}$$

存在，我们就把此极限记为 $\varphi(x)$，同时我们还可以证明，如果令 $F_\varepsilon(\varepsilon>0)$ 为 R^1 中与 E 的距离 $\geqslant\varepsilon$ 的点的全体．μ_ε 为 μ 在 F_ε 上的限制，即当 M 为 R^1 上的 Borel 集时，

$$\mu_\varepsilon(\mu) = \mu(M \cap F_\varepsilon),$$

记

$$\varphi_\varepsilon(x) = \alpha x + \beta + \int \left[\frac{1}{\lambda - x} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right] d\mu_\varepsilon(\lambda), \quad (1.8)$$

那么当 $\varphi \in M(E)$ 时，作为 $L^2(E)$ 中的算子有

$$\varphi(x) = S - \lim_{\varepsilon \to 0+} \varphi_\varepsilon(x). \quad (1.9)$$

这样得到在 E 上几乎处处有定义的函数，仍记为 $\varphi(\cdot)$. 由解析函数的境界值理论可知，这样得到的 E 上的境界值函数 $\varphi(\cdot)$ 唯一地决定了原来在上半平面定义的函数 $\varphi(\cdot)$ [即 (1.6)]. 因此我们说 $\varphi \in P(E)$ 时，可以把 φ 看成上半平面的解析函数又可把 φ 看成 E 上的函数.

引理 1.1 $M(E) \cap P(E) \subset S(E)$

证 任取 $\varphi \in M(E) \cap P(E)$，由于 φ 有表达式 (1.6). 我们注意函数 $\varphi(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha \geqslant 0$ 显然属于 $S(E)$，又当 $\lambda \in E^c$ 时，若记

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda - x}.$$

那么当 $f \in L^2(E)$ 时，容易算出

$$(K_{\varphi_\lambda} f, f) = \frac{1}{2\pi} \left| \int \frac{f(y)}{\lambda - y} dy \right|^2 \geqslant 0.$$

由于 μ 为非负测度，从 (1.7) 可知 $K_{\varphi_\varepsilon} \geqslant 0$，再由 (1.5) 与 (1.9) 可知

$$K_\varphi = S - \lim_{\varepsilon \to +0} K_{\varphi_\varepsilon}.$$

因此 $K_\varphi \geqslant 0$. 证毕.

可以证明当 E 为区间时，$S(E)$ 中的连续函数全体即为 $P(E)$ 中连续函数全体. (见 Donoghue [1])

3. 亚正常算子类的函数变换 我们首先研究何时函数变换 (1.3) 将 HN 中算子仍变为 HN 中算子.

定理 1.2 设 $T = T_1 + iT_2 \in HN$, $\varphi_j \in S(\sigma(T_j))$, $j = 1, 2$.

则

$$\varphi(T)\in HN.$$

证 我们不妨只考虑T的奇异积分模型(见定理III, 3.2)当$f\in L^2(\Omega,\mathfrak{D},R(\cdot))$时,

$$(T_1f)(x)=xf(x),$$

$$(T_2f)(x)=\beta(x)f(x)+\alpha(x)P(\alpha f).$$

记

$$(P_\varepsilon f)(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(s)}{x-(s+i\varepsilon)}ds,$$

根据(III, 1.19), 我们知道

$$P=S-\lim_{\varepsilon\to 0+}P_\varepsilon.$$

经过计算可知

$$(i[\varphi_1(T_1),T_2]f,f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\iint\frac{\varphi_1(x)-\varphi_1(s)}{x-s-i\varepsilon}\times(\alpha(x)f(x),\alpha(s)f(s))dxds,\tag{1.10}$$

我们首先设$\alpha(x)f(x)=\sum_{j=1}^N a_jg_j(x)$, 其中$a_j\in\mathfrak{D}$, $(a_j,a_k)=\delta_{j,k}$, $g_j\in L^2(\Omega)$. 那末(1.10)化为

$$\sum_{j=1}^N\lim_{\varepsilon\to 0+}\iint\frac{\varphi_1(x)-\varphi_1(s)}{x-s-i\varepsilon}g_j(x)\overline{g_j(s)}dxds$$

$$=\sum_{j=1}^N(K_{\varphi_1}g_j,g_j)\geqslant 0,\tag{1.11}$$

对$g=\alpha f$, 取一列函数$g_N=\sum_{j=1}^N a_jg_{jN}(x)$, $g_{jN}\in L^2(\Omega)$, 使$\|g_N-g\|\to 0$. 那么由于在(1.11)中易g_j为g_{jN}可知(1.11)的值为非负,从而可知对一切f,(1.10)为非负. 由此即得

$$i[\varphi_1(T_1),T_2]\geqslant 0.$$

记$T_2'=\varphi_1(T_1)$, 则$T'=T_2'+iT_2\in HN$. 所以由§I, 1性质1知

$$-T_2+iT_1'=i(T_1'+iT_2)\in HN$$

记$T_1'=-T_2$, 作$\psi(x)=-\varphi_2(-x)$. 那么由$\varphi_2\in S(\sigma(T_2))$易知

$\phi \in S(\sigma(T_1'))$. 因此由已证明的部分可知

$$\phi(T_1') + iT_2' \in HN.$$

因此

$$\varphi_1(T_1) + i\varphi_2(T_2) = -i(\phi(T_1') + iT_2')) \in HN.$$

证毕.

§2 亚正常算子的谱映照定理

本节中将给出在 §1 中所引进的某些函数变换下的谱映照定理.

1. 问题的陈述 设 E 为 R^1 上有界闭集. 令 $\mathscr{T}(E)$ 为 E 上严格单调增加的连续函数. 设 E_j, $j = 1, 2$ 为 R^1 上的两个有界闭集. 当 $\varphi_j \in \mathscr{T}(E_j)$. 那么 φ 表示复变函数

$$\varphi(z) = \varphi_1(z_1) + i\varphi_2(z_2)$$

是 $E_1 \times E_2$ 到 $\varphi_1(E_1) \times \varphi_2(E_2)$ 上的同胚映象. 本章中，在必要时，把 φ 延拓为全平面到它本身的同胚映照，这种延拓显然是存在的.

我们下面要研究当 $T = T_1 + iT_2 \in HN$ 时，$\mathscr{T}(\sigma(T_j))$ 中的函数 φ_j 满足什么附加条件时，才使 $\varphi(T)$ (见 (1.3) 式)具有 HN 中算子所具有的性质(见 (I, 2.3))

$$\sigma_{ja}(\varphi(T)) = \sigma_a(\varphi(T)), \tag{2.1}$$

以及成立谱映象公式

$$\sigma_a(\varphi(T)) = \varphi(\sigma_a(T)), \tag{2.2}$$

$$\sigma_r(\varphi(T)) = \varphi(\sigma_r(T)), \tag{2.3}$$

$$\sigma(\varphi(T)) = \varphi(\sigma(T)). \tag{2.4}$$

当 T 为正常时，(2.1—4) 都显然成立.

2. 一些引理 事实上，四个公式 (2.1—4) 是有一定的联系的. 我们先给出一个引理.

引理 2.1 设 $T = T_1 + iT_2$, $\varphi_j(\cdot) \in \mathscr{T}(\sigma_j(T_j))$. 那么

$$\sigma_{ja}(\varphi(T)) = \varphi(\sigma_{ja}(T)). \tag{2.5}$$

证 任取 $z = z_1 + iz_2 \in \sigma_{ja}(T)$，那么有一列单位向量 $\{f_n\}$ 使

$$\lim_{n\to\infty} \|(T_j - z_j I)f_n\| = 0. \tag{2.6}$$

对任一 $\varepsilon > 0$，取多项式 $P_j(\cdot)$ 使

$$\max_{x\in\sigma(T_j)} |\varphi_j(x) - P_j(x)| \leqslant \varepsilon \tag{2.7}$$

由于 $P_j(\cdot)$ 为多项式，由 (2.6) 可知

$$\lim_{n\to\infty} \|(P_j(T_j) - P_j(z_j)I)f_n\| = 0 \tag{2.8}$$

因此从 (2.7—8) 得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|(\varphi_j(T_j) - \varphi_j(z_j)I)f_n\| \leqslant 2\varepsilon$$

令 $\varepsilon \to 0$，即得 $\varphi(z) \in \sigma_{ja}(\varphi(T))$. 因此

$$\sigma_{ja}(\varphi(T)) \subset \varphi(\sigma_{ja}(T)). \tag{2.9}$$

显然 φ_j 之逆函数 φ_j^{-1} 存在，且为单调增加的连续函数，而且 φ^{-1} 是 φ 的逆映照. 在 (2.9) 中易 φ 为 φ^{-1}，T 为 $\varphi(T)$，就得

$$\sigma_{ja}(T) \subset \varphi^{-1}(\sigma_{ja}(\varphi(T))$$

再将上式两边作用 φ 则得

$$\varphi(\sigma_{ja}(T)) \subset \sigma_{ja}(\varphi(T)).$$

这就得到 (2.5). 证毕.

在证明谱映照定理中，常利用下述关于谱同伦的引理.

引理 2.2 设 $T \in T_1 + iT_2 \in HN$. $\varphi_j(x, t), t \in [0, 1]$ 是 $\sigma(T_j)$ 上一族严格单调的连续函数，而且对每个 $x \in \sigma(T_j)$，$\varphi_j(x, t)$ 是 $t \in [0, 1]$ 上的连续函数. 又设 $\varphi_j(x, 0) = x$. 记

$$T(t) = \varphi_1(T_1, t) + i\varphi_2(T_2, t),$$
$$\tau_t(z_1 + iz_2) = \varphi_1(z_1, t) + i\varphi_2(z_2, t).$$

如果对复平面中某一集 R

$$\sigma_{ja}(T(t)) \cap \tau_t(R) = \sigma_a(T(t)) \cap \tau_t(R), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{2.10}$$

成立，那么当 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时，

$$\sigma_a(T(t)) \cap \tau_t(R) = \tau_t(\sigma_a(T) \cap R), \tag{2.11}$$

$$\sigma_r(T(t)) \cap \tau_t(R) = \tau_t(\sigma_r(T) \cap R), \tag{2.12}$$

成立.
$$\sigma(T(t)) \cap \tau_t(R) = \tau_t(\sigma(T) \cap R) \tag{2.13}$$

证 容易验证 $T(t)$ 是 t 的连续函数而且 τ_t 是同胚照象. 如果我们在 (2.5) 中易 φ_j 为 $\varphi_j(\cdot, t)$, 利用 (2.5) 和定理 I, 2.5 可得 (2.11). 再由引理 I, 3.1 可知 (2.12—13) 也成立. 证毕.

此引理说明在一定条件下, (2.1) 式可推出其余 (2.2—4) 式. 因此下面就着重研究 (2.1) 式.

3. 谱映照定理 现给出亚正常算子的一些谱映照定理.

定理 2.3 设 $T = T_1 + iT_2 \in HN$, $\varphi_1 \in \mathscr{T}(\sigma(T_1))$, $\varphi_2(x) \equiv x$ 或 $\varphi_1(x) \equiv x$, $\varphi_2 \in \mathscr{T}(\sigma(T_2))$. 又设 $\varphi(T) \in HN$. 那么 (2.1—4) 成立.

证 当 $t \in [0, 1]$ 时, 作

$$\varphi_j(x, t) = (1 - t)x + t\varphi_j(x).$$

易知 $\varphi_j(\cdot, t) \in \mathscr{T}(\sigma(T_j))$. 而且固定 x, $\varphi_j(x, t)$ 是 t 的连续函数, 又 $\varphi_j(x, 0) = x$. 当 $\varphi_2(x) \equiv x$ 时,

$$T(t) = (1 - t)T_1 + t\varphi_1(T_1) + iT_2$$

因此

$$[T(t)^*, T(t)] = (1 - t)[T^*, T] + t[\varphi(T)^*, \varphi(T)] \geq 0$$

即 $T(t) \in HN$. 因此由定理 I, 2.5, (2.10) 成立, 其中可取 R 为全平面. 所以 (2.11—13) 成立. 特别取 $t = 1$, 即有 (2.2—4) 成立. 而这时 (2.1) 是显然的. 证毕.

定理 2.4 设 $T = T_1 + iT_2 \in HN$, $\varphi_j \in \mathscr{T}(\sigma(T_j)) \cap S(\sigma(T_j))$. 那么 (2.1—4) 成立.

证 由定理 1.2 可知 $T_1 + i\varphi_2(T_2) \in HN$, 因此由定理 2.3 知当 $\varphi(z) = z_1 + i\varphi_2(z_2)$ 时, (2.2—2.4) 成立. 再把 $T_1 + i\varphi_2(T_2)$ 作为 T, 利用定理 1.2 可知 $\varphi(T) \in HN$, 再用定理 2.3 中 $\varphi_2(x) \equiv x$ 情况即知对 $\varphi(T)$, (2.1—2.4) 成立. 证毕.

当 $\varphi \in \mathscr{T}(E)$ 时, 令

$$M_\varphi = \sup_{x_j \in E, x_1 \neq x_2} \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)}{x_1 - x_2},$$

$$m_\varphi = \inf_{\substack{x_j \in E, \\ x_1 \neq x_2}} \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)}{x_1 - x_2}$$

显然 $0 \leqslant m_\varphi \leqslant M_\varphi \leqslant \infty$. 对于 $\varphi \in \mathscr{T}(E)$，我们可将 φ 延拓为区间到区间的同胚映照而不改变其 M_φ 及 m_φ.

现在我们需要 M_φ 和 m_φ 的平均值和振幅．令

$$\mu_\varphi = \frac{M_\varphi + m_\varphi}{2}, \quad \sigma_\varphi = \frac{M_\varphi - m_\varphi}{2}.$$

定理 2.5 设 $T = T_1 + iT_2 \in HN$，$\varphi_j \in \mathscr{T}(\sigma(T_j))$. 如果

$$\prod_{j=1}^{2} (M_{\varphi_j} - m_{\varphi_j}) < 16 \prod_{j=1}^{2} m_{\varphi_j}, \tag{2.14}$$

那么 (2.1—4) 都成立．

证 (1) 我们首先证明 (2.1). 事实上只要证明

$$\sigma_a(\varphi(T)) \subset \sigma_{ja}(\varphi(T)). \tag{2.15}$$

任取 $a_1 + ia_2 \in \sigma_a(\varphi(T))$，那么存在 z_j 使 $\varphi_j(z_j) = a_j$. 这时

$$\varphi(z) = \varphi(z_1 + iz_2) = a_1 + ia_2,$$

又存在 $\mathscr{H}$ 中一列单位向量 $\{f_n\}$ 使

$$\|(\varphi(T) - \varphi(z)I)f_n\| \to 0, \quad (n \to \infty) \tag{2.16}$$

我们记 $R_j = \varphi_j(T_j) - \varphi_j(z_j)$，

$$R = R_1 + iR_2 = \varphi(T) - \varphi(z).$$

为记号简单起见，不妨设 $z = 0$. 又记 $M_j = M_{\varphi_j}$，$m_j = m_{\varphi_j}$，及 $\mu_j = \mu_{\varphi_j}$，$\sigma_j = \sigma_{\varphi_j}$. 先假设

$$\sigma_2 < 2m_1, \quad \sigma_1 < 2m_2. \tag{2.17}$$

取正常数 $\mathfrak{D} = \min\left(m_1 - \frac{\sigma_2}{2}, m_2 - \frac{\sigma_1}{2}\right)$，今证

$$\operatorname{Re}(Rf, Tf) \geqslant \mathfrak{D}\|Tf\|^2. \tag{2.18}$$

(2) 我们注意对自共轭算子 $A, B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ 和任何正数 K，由于

$$\frac{1}{K^2}A^2 + K^2B^2 - i[A, B]$$

$$= \left(\frac{1}{K}A - iKB\right)^* \left(\frac{1}{K}A - iKB\right) \geqslant 0,$$

所以对任何实数 λ_j 和正数 K_j 有

$$i[R_1, T_2] \geqslant -i\lambda_1[T_1, T_2] - \frac{1}{K_1^2}(R_1 + \lambda_1 T_1)^2 - K_1 T_2^2$$

$$i[T_1, R_2] \geqslant -i\lambda_2[T_1, T_2] - \frac{1}{K_2^2}(R_2 + \lambda_2 T_2)^2 - K_2 T_1^2,$$

这样一来，

$$\frac{1}{2}(T^*R + R^*T) - \mathfrak{D}T^*T = T_1R_1 + T_2R_2$$
$$+ i[R_1, T_2]/2 + i[T_1, R_2]/2 - \mathfrak{D}(T_1^2 + T_2^2$$
$$+ i[T_1, T_2]) \geqslant \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3.$$

其中

$$\Delta_j = T_jR_j - \mathfrak{D}T_j^2 - \frac{1}{2K_j^2}(R_j + \lambda_j T_j)^2 - \frac{K_{j'}^2}{2}T_j^2$$
$$j = 1, 2,$$

其中 $j' = 3 - j$，而

$$\Delta_3 = -i\left(\mathfrak{D} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)[T_1, T_2].$$

由于 $m_jT_j \leqslant R_j \leqslant M_jT_j$，所以

$$\Delta_j \geqslant \delta_j T_j^2, \quad j = 1, 2.$$

其中 $\delta_j = \min(q_j, Q_j) - \mathfrak{D} - \frac{K_{j'}^2}{2}$，而且

$$q_j = m_j - \frac{1}{2K_j^2}(m_j + \lambda_j)^2,$$

$$Q_j = M_j - \frac{1}{2K_j^2}(M_j + \lambda_j)^2.$$

但是 $\min(q_j, Q_j)$ 作为 λ_j 的函数，只有当取 λ_j 使 $q_j = Q_j$ 时，它才取最大值．因此取 $\lambda_j = K_j^2 - \mu_j$，这时

$$\delta_j = \mu_j - \frac{\sigma_j^2}{2K_j^2} - \mathfrak{D} - \frac{K_1^2 + K_2^2}{2}, \quad j = 1, 2.$$

只有当 $K_j = \sqrt{\sigma_j}$ 时，δ_j 才取最大值，这时

$$\delta_1 = m_1 - \frac{\sigma_2}{2} - \mathfrak{D} \geqslant 0, \quad \delta_2 = m_2 - \frac{\sigma_2}{2} - \mathfrak{D} \geqslant 0.$$

而且

$$\Delta_3 = \frac{i}{2}(m_1 - \mathfrak{Y} + m_2 - \mathfrak{Y})[T_1, T_2] \geqslant 0.$$

由是可知

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \geqslant 0$$

即得 (2.18).

(3) 然而 (2.16) 意味着

$$\|Rf_n\| \to 0,$$

由 (2.18) 知 $\|Tf_n\| \to 0$, 即

$$0 \in \sigma_a(T),$$

根据定理 I, 2.5, $0 \in \sigma_{ja}(T)$. 这时有单位向量列 $\{g_n\}$ 使

$$\lim_{n\to\infty} \|T_j g_n\| = 0, \quad j = 1, 2.$$

根据引理 2.1 即知 $0 \in \sigma_{ja}(\varphi(T) - \varphi(0))$. 因此在条件 (2.17) 下证明了 (2.15). 即 (2.1) 式成立.

(4) 现在解除限制 (2.17). 事实上我们易 T 为 $T' = T_1' + iT_2'$, 其中 $T_j' = K_j T_j$ (K_j 为正数), $j = 1, 2$. 这时 $T' \in HN$, 而使

$$\psi_j(x) = \varphi_j\left(\frac{x}{K_j}\right) \quad j = 1, 2,$$

那么

$$\psi(T') = \varphi(T) \tag{2.19}$$

这时

$$M_{\psi_j} = K_j M_{\varphi_j}, \quad m_{\psi_j} = K_j m_{\varphi_j}$$

由 (2.14), 我们有

$$\frac{\sigma_{\varphi_1}}{2m_{\varphi_2}} < \frac{2m_{\varphi_1}}{\sigma_{\varphi_2}}$$

取 K_j 使

$$\frac{\sigma_{\varphi_1}}{2m_{\varphi_2}} < \frac{K_2}{K_1} < \frac{2m_{\varphi_1}}{\sigma_{\varphi_2}},$$

那么立即得到

$$\sigma_{\psi_2} < 2m_{\psi_1}, \quad \sigma_{\psi_1} < 2m_{\psi_2}.$$

因此由已经证明的部分知道

$$\sigma_{ja}(\psi(T')) = \sigma_a(\psi(T')) \tag{2.20}$$

由 (2.19—20) 知道当 φ 满足 (2.14) 时，(2.1) 成立.

(5) 下面类似于定理 2.3 的证明，作函数

$$\varphi_j(x_j, t) = (1-t)x_j + t\varphi_j(x_j) \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

容易算出当 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 且固定 t 时，

$$\frac{M_{\varphi_j(\cdot,t)} - m_{\varphi_j(\cdot,t)}}{m_{\varphi_j(\cdot,t)}} = \frac{t(M_{\varphi_j} - m_{\varphi_j})}{tm_{\varphi_j} + (1-t)} \leqslant \frac{M_{\varphi_j} - m_{\varphi_j}}{m_{\varphi_j}}.$$

因此 $\varphi_j(\cdot, t)$ 也满足条件 (2.14)，所以对 $\varphi(z, t) = \varphi_1(z_1, t) + i\varphi_2(z_2, t)$ (2.1) 也成立，即 (2.10) 对全平面 R 成立. 利用引理 2.2 即知 (2.2—4) 成立. 证毕

系 2.6 设 $T = T_1 + iT_2 \in HN$，$\varphi_j \in \mathscr{T}(\sigma(T_j))$，若 $0 < m_{\varphi_1} \leqslant M_{\varphi_1} < \infty$，$\varphi_2(x) = x$ 或 $\varphi_1(x) = x$，$0 < m_{\varphi_2} \leqslant M_{\varphi_2} < \infty$，那么 (2.1—4) 成立.

证 这时 $\prod_{j=1}^{2}(M_{\varphi_j} - m_{\varphi_j}) = 0$，而 $\prod_{j=1}^{2} m_{\varphi_j} > 0$. 所以 (2.14) 成立. 由定理 2.5 即得系 2.6.

我们用 g^{-1} 表示函数 g 的反函数. 用 $\varphi\circ\psi$ 表示 φ 和 ψ 的复合函数 $\varphi(\psi(\cdot))$. 当 $\varphi \in \mathscr{T}(E)$ 我们定义

$$N(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{g \in \mathscr{T}(E) \cap S(E)} \frac{M_{\varphi\circ g^{-1}} - m_{\varphi\circ g^{-1}}}{4m_{\varphi\circ g^{-1}} + \varepsilon}.$$

系 2.7 设 $T = T_1 + iT_2 \in HN$. $\varphi_j \in \mathscr{T}(\sigma(T_j))$ 而且

$$N(\varphi_1)N(\varphi_2) < 1 \tag{2.21}$$

那么 (2.1—4) 成立.

证 由假设 (2.21)，必有 $g_j \in \mathscr{T}(\sigma(T_j)) \cap S(\sigma(T_j))$，使函数 $\psi_j = \varphi_j \circ g_j^{-1}$ 满足

$$\prod_{j=1}^{2}(M_{\psi_j} - m_{\psi_j}) < 16 \prod_{j=1}^{2} m_{\psi_j},$$

记 $T' = g(T) = g_1(T_1) + ig_2(T_2)$. 由定理1.2和定理2.4有 $T' \in HN$,

$$\begin{aligned} \sigma_a(g(T)) &= g(\sigma_a(T)), \\ \sigma_r(g(T)) &= g(\sigma_r(T)), \\ \sigma(g(T)) &= g(\sigma(T)). \end{aligned} \tag{2.22}$$

再对 T' 和 $\phi(z) = \phi_1(z_1) + i\phi_2(z_2)$ 应用定理2.5再结合(2.22)即知对 T 和 φ, (2.1—2.4)成立. 证毕.

§3 半亚正常算子的谱映照定理

现在转而讨论半亚正常算子的函数变换. 在某些情况下我们利用 Cayley 变换及谱分割的性质把它化到亚正常算子情况,在另一些情况下,我们将直接地进行讨论.

1. 一些函数变换类 设 E 为 $[0, \infty)$ 中的有界闭集. 我们记

$$M_0(E) = \{\varphi \mid \varphi \in M(E), \varphi(x) \geq 0, x \in E \text{ 且 } \varphi(0) = 0\}.$$

同样地记 $S_0(E) = M_0(E) \cap S(E)$, $\mathscr{T}_0(E) = M_0(E) \cap \mathscr{T}(E)$. 对 $|T|$ 进行变换时用到这些函数族.

当 E 为单位圆 C_1 中闭集时, 我们令 $M_0(E)$ 为 E 上取值于 C_1 的复 Baire 函数全体.

设 $T = U|T| \in SHU$, $\xi \in M_0(\sigma(U))$, $\phi \in M_0(\sigma(|T|))$, 记

$$\varphi(T) = \xi(U)\phi(|T|).$$

又作复平面中的映照

$$\varphi(\rho e^{i\theta}) = \xi(e^{i\theta})\phi(\rho),$$

我们要讨论的问题是当 ξ, ϕ 满足什么条件时成立着(2.1—4).

我们用 K_ξ 表示 $L^2(E)$ 上定义的算子

$$(K_\xi f)(e^{i\theta}) = S - \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi} \int_E \frac{1 - \xi(e^{i\theta})\overline{\xi(e^{i\vartheta})}}{1 - e^{i\theta}e^{-i\vartheta}(1 - \varepsilon)} f(e^{i\vartheta}) d\vartheta$$

根据奇异积分的性质可证对几乎所有的 θ, 成立

$$(K_\xi f)(e^{i\theta}) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi} \int_E \frac{1 - \xi(e^{i\theta})\overline{\xi(e^{i\vartheta})}}{1 - e^{i\theta}e^{-i\vartheta}(1 - \varepsilon)} f(e^{i\vartheta}) d\vartheta.$$

如果我们考察 $L^2(E)$ 上的乘算子

$$(Uf)(e^{i\theta}) = e^{i\theta}f(e^{i\theta})$$

和奇异积分算子 $\mathfrak{P}$（见 §III，1），那么

$$K_\xi = \mathfrak{P} - \xi(U)P\xi(U)^*,$$

它是 $L^2(E)$ 上的有界算子．特别当 ξ 是光滑函数时，作积分核

$$K_\xi(e^{i\theta}, e^{i\vartheta}) = \begin{cases} \dfrac{1 - \xi(e^{i\theta})\overline{\xi(e^{i\vartheta})}}{1 - e^{i\theta}e^{-i\vartheta}}, & e^{i\theta} \neq e^{i\vartheta}, \\ \overline{\xi(e^{i\vartheta})}\dfrac{d}{d\vartheta}\xi(e^{i\vartheta}), & e^{i\theta} = e^{i\vartheta}. \end{cases}$$

这时

$$(K_\xi f)(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int K_\xi(e^{i\theta}, e^{i\vartheta})f(e^{i\vartheta})d\vartheta.$$

令

$$S_0(E) = \{\xi \mid \xi \in M_0(E),\ K_\xi \geqslant 0\}.$$

下面考察当 $e^{i\alpha} \bar{\in} E$ 时的情况．如果 $\xi \in M_0(E)$，作

$$\mathfrak{Y} = L^{-1}\circ\xi\circ L, \tag{3.1}$$

其中 L 为 Cayley 变换．

$$L: x \longmapsto e^{i\alpha}(x + i)(x - i)^{-1}.$$

那么 $\mathfrak{Y} \in M(L^{-1}(E))$．由于

$$K_\xi(L(x), L(y)) = K_{\mathfrak{Y}}(x, y)\overline{\left(\frac{x + i}{\mathfrak{Y}(x) + i}\right)}\left(\frac{y + i}{\mathfrak{Y}(y) - 1}\right), \tag{3.2}$$

由此容易证明 $\xi \in S_0(E)$ 的充要条件是 $\mathfrak{Y} \in S(L^{-1}(E))$．但是我们还改变 Cayley 变换为

$$L_1(x) = e^{i\alpha}(x - i)(x + i)^{-1},$$

仍如 (3.1) 作出

$$\zeta = L_1^{-1}\circ\xi\circ L_1, \tag{3.3}$$

这时 (3.2) 改成

$$K_\xi(L_1(x), L_1(y)) = K_\zeta(x, y)\left(\frac{x + i}{\zeta(x) + i}\right)\overline{\left(\frac{y + i}{\zeta(y) + i}\right)},$$

因此 $\xi \in S_0(E)$ 的充要条件仍然是 $\zeta \in S(L_1^{-1}(E))$，但这时我们可导出下面的另一事实．

我们考察 E 上如下的函数 $\xi(e^{i\theta})$，$e^{i\theta}\in E$，它是单位圆内解析函数——仍记为 $\xi(z)$——的境界值，成立

$$\xi(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1-0}\xi(re^{i\theta}), \quad p.p.\ e^{i\theta}\in E.$$

而且这个解析函数适合如下条件，当 $|z|<1$ 时，$|\xi(z)|<1$. 这种函数全体记为 $B_0(E)$. 当 $\xi\in B_0(E)$ 时，作 ζ 如 (3.3) 由于这里取的 $W = L_1(z)$ 将上半平面映到单位圆，因此由 (3.3) 作出的函数必属 $\rho(L_1^{-1}(E))$，从而可知 $\xi(\cdot)\in S_0(E)$. 因此

$$B_0(E)\subset S_0(E).$$

可以证明此事当 $E = C_1$ 时也正确.

设 $E\subset C_1$，又设 $\xi: E\to E$ 的同胚映照，而且保持方向(即当 $e^{i\theta}$ 沿顺时针方向变化时，$\xi(e^{i\theta})$ 也沿顺时针方向变化). 令 $\mathscr{T}_0(E)$ 为这种 ξ 的全体.

2. 谱映照定理 现在作出类似于 §2 的谱映照定理. 但在某些情况下，有相当大的区别. 如定理 3.4.

定理 3.1 设 $T = U|T|\in SHU$，$\xi\in\mathscr{T}_0(\sigma(U))\cap S_0(\sigma(U))$. 又设当 $\sigma(U)\neq C_1$ 时，$\phi\in\mathscr{T}_0(\sigma(|T|))S_0(\sigma(|T|))$；而当 $\sigma(U) = C_1$ 时，$\phi\in S_0([0,\|T\|])\cap S_0([0,\|T\|])$. 记 $\varphi(\rho e^{i\theta}) = \xi(e^{i\theta})\cdot\phi(\rho)$，那么

$$\varphi(T) = \xi(U)\phi(|T|)\in SHU, \tag{3.4}$$

而且 (2.1—4) 成立.

证 (1) 首先设 $\sigma(U)\neq C_1$. 不妨设 $1\bar{\in}\sigma(U)$. 考察 U 的逆 Cayley 变换 $L^{-1}(U) = i(U+I)(U-I)^{-1}$. 作算子

$$T' = L^{-1}(U) + i|T|.$$

考察形如 (I, 1.12) 的变换 τ，但在其中取 $X = L^{-1}(U)$，$Y = |T|$，易 $m(Y) = 0$，即 $\tau(T') = T$. 这时 $T' = \tau^{-1}(T)$ 是亚正常的. 我们作

$$\mathfrak{Y} = L^{-1}\circ\xi\circ L\in S(L^{-1}(\sigma(U))).$$

由定理 1.2，得知

$$T'' = \zeta(T') = \mathfrak{Y}(L^{-1}(U)) + i\phi(|T|)\in HN,$$

由于当 $r \geqslant 0$ 时，$\phi(r) \geqslant 0$，从而 $\phi(|T|) \geqslant 0$. 因此由 §I，1 的第 5 段知 $\tau(T'') \in SHU$. 显然 $\varphi = \tau\circ\zeta\circ\tau^{-1}$. 所以 (3.4) 成立，因此 (2.1) 成立. 利用 Cayley 变换的谱映照定理 I，3.5 以及关于 ζ 的谱映照定理 (2.4) 即知 (2.2—4) 成立.

(2) 下面考察 $\sigma(U) = C_1$ 的情况. 设 U 的谱分解为

$$U = \int_{C_1} e^{i\theta} dE(e^{i\theta}).$$

但由于设 $\mathscr{H}$ 是可析的，故 $\sigma_p(U) \neq C_1$. 不妨设 $1 \bar{\in} \sigma_p(U)$. 作一列圆弧

$$\gamma_n = \left\{ e^{i\theta} \middle| \frac{1}{n} < \theta < 2\pi - \frac{1}{n} \right\}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

那么由于 $1 \bar{\in} \sigma_p(U)$，我们有 $E(\gamma_n) \uparrow I$. 又作

$$\mathscr{H}_n = E(\gamma_n)\mathscr{H}, \quad U_n = U|_{\mathscr{H}_n}, \quad T_n = E(\gamma_n)T|_{\mathscr{H}_n}.$$

那么 $T_n = U_n|T_n| \in SHU$，且

$$|T_n| = E(\gamma_n)|T||_{\mathscr{H}_n}.$$

这时 $\sigma(U_n) \subset \bar{\gamma}_n \neq C_1$，$\sigma(|T_n|) \subset [0, \|T\|]$. 由 (1) 可知

$$\varphi(T_n) = \xi(U_n)\phi(|T_n|) \in SHU,$$

而且成立

$$\sigma_*(\varphi(T_n)) = \varphi(\sigma_*(T_n)). \tag{3.5}$$

其中 σ_* 表示 σ_a，σ_r 或 σ. 由于当 $f \in \mathscr{H}_m$ 时

$$\xi(U_m)^*f = \xi(U)^*f, \quad (\phi(|T_n|)f, f) = (\phi(|T|)f, f),$$

所以当 $n \geqslant m$ 时，

$$\begin{aligned}&((\phi(|T|) - \xi(U)\phi(|T|)\xi(U)^*)f, f) \\ &\quad = ((\phi(|T_n|) - \xi(U_n)\phi(|T_n|)\xi(U_n)^*)f, f) \geqslant 0,\end{aligned} \tag{3.6}$$

再由 $E(\gamma_n) \uparrow I$ 知 $\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathscr{H}_m} = \mathscr{H}$，从 (3.6) 可知

$$\phi(|T|) - \xi(U)\phi(|T|)\xi(U)^* \geqslant 0.$$

即 $\varphi(T)$ 为半亚正常的，又因 $\xi(U)$ 是酉算子，所以 (3.4) 成立.

根据谱分割定理 I，3.2 我们有

$$\sigma_*(T_n) \cap \mathfrak{D}_{\gamma_n} = \sigma_*(T) \cap \mathfrak{D}_{\gamma_n}. \tag{3.7}$$

同样地由于

$$\xi(U)=\int_{C_1}\xi(e^{i\theta})dE(e^{i\theta}).$$

可证明

$$\sigma_*(\varphi(T_n))\cap\mathfrak{D}_{\xi(\gamma_n)}=\sigma_*(\varphi(T))\cap\mathfrak{D}_{\xi(\gamma_0)}. \tag{3.8}$$

由 (3.6—8) 可以知道

$$\sigma_*(\varphi(T))\cap\mathfrak{D}_{\xi(\gamma_n)}=\varphi(\sigma_*(T)\cap\mathfrak{D}_{\gamma_n}). \tag{3.9}$$

令 $\gamma=\{e^{i\theta}:0<0<2\pi\}$. 对 (3.9) 取和集就有

$$\sigma_*(\varphi(T))\cap\mathfrak{D}_{\xi(\gamma)}=\varphi(\sigma_*(T)\cap\mathfrak{D}_{\gamma}). \tag{3.10}$$

类似地，再取另一点 $e^{i\alpha}\bar{\in}\sigma_p(U)(e^{i\alpha}\neq 1)$，作 $\gamma'=\{e^{i\theta}|\alpha<\theta<2\pi+\alpha\}$，那么又有

$$\sigma_*(\varphi(T))\cap\mathfrak{D}_{\xi(\gamma')}=\varphi(\sigma_*(T)\cap\mathfrak{D}_{\gamma'}). \tag{3.11}$$

因此记 $\mu=\mathrm{C}-\{0\}$，那么由于 $\mu=\mathfrak{D}_\gamma\cup\mathfrak{D}_{\gamma'}$，从 (3.10—11) 可知

$$\sigma_*(\varphi(T))\cap\mu=\varphi(\sigma_*(T)\cap\mu)$$

但由于 $\phi(0)=0$，容易看出 $0\in\sigma_a(T)$ 与 $0\in\sigma_c(\varphi(T))$ 等价．于是得到 (2.2—4)．证毕．

仿照定理 2.3 的证明可得下面的定理

定理 3.2 设 $T=U|T|\in SHU$，$\xi\in\mathscr{T}_0(\sigma(U))$，$\phi(x)=x$，或 $\xi(e^{i\theta})=e^{i\theta}$，$\phi\in\mathscr{T}_0(\sigma(|T|))$，又设 $\varphi(T)=\xi(U)\phi(|T|)\in SHU$，那么 (2.1—4) 成立．

3. 另一类谱映照定理 设 $E\subset C_1$ 是一闭集．我们用 $L^2(E)$ 表示 C_1 上关于测度 $dm(e^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}d\theta$ 平方可积而且在 $C_1\backslash E$ 上为零 Baire 函数全体所成的 Hilbert 空间．设 $\xi\in\mathscr{T}_0(E)$，如果存在一个非负数 a 使

$$|(\mathfrak{P}(\xi g),g)+a(\xi g,g)|\leqslant a\|g\|^2+\|\mathfrak{P}g\|^2,\ g\in L^2(E), \tag{3.12}$$

我们就说 $\xi\in\mathscr{A}_0(E)$．而且这时用 δ_φ 表示

$$\min a(1+a)^{-1},$$

其中 a 取为使 (3.12) 成立的各种可能的非负数 a．

虽然对于一个具体函数 ξ，较难判断它是否属于 $\mathscr{A}_0(E)$，但

是我们还是可以举出一些有意思的例子来．首先我们注意 $B_0(E)\subset\mathscr{A}_0(E)$．任取 $\xi\in B_0(E)$，由对任一 $g\in L^2(E)$，由于 $\mathfrak{P}(g)$ 属于 Hardy 空间 H^2，而且 $\xi\mathfrak{P}(g)\in H^2$，从而

$$\xi\mathfrak{P}(g)=\mathfrak{P}(\xi g).$$

即得

$$\begin{aligned}|(\mathfrak{P}(\bar{\xi}g),g)|&=|(\bar{\xi}g,\mathfrak{P}(g))|=|(g,\xi\mathfrak{P}(g))|\\&=|(\mathfrak{P}(g),\xi\mathfrak{P}(g))|\leqslant\|P(g)\|^2\end{aligned}$$

所以这时在 (3.12) 中可取 $a=0$．

例 3.1 设 a_j，$j=0,1,2,\cdots n$ 和 b_j，$j=1,2,\cdots,n$ 为 $2n+1$ 个复数，当 $r=\max\limits_j(|a_j|,|b_j|)$ 充分小时，函数

$$\xi(z)=e^{i\alpha}\prod_{j=0}^{n}\frac{z-a}{1-\bar{a}_jz}\prod_{j=1}^{n}\frac{1-\bar{b}_jz}{z-b_j}$$

(其中 α 是一实数) 属于 $\mathscr{A}_0(C_1)$．容易证明当 r 充分小时，$\xi(\cdot)\in\mathscr{T}_0(C_1)$．利用下面的引理 3.3 可以证明存在正数 a 使(3.12)成立，我们注意这个函数 ξ 在单位圆内有极点．

我们用 CB 表示在单位圆 $|z|<1$ 中解析而在 $|z|\leqslant1$ 中连续的函数全体．令 $\mathscr{K}_0(E)$ 为 $\mathscr{T}_0(E)$ 中满足如下条件的函数 ξ 的全体：存在正数 K 以及 ξ 在 C_1 上的连续延拓 (即延拓为 C_1 上的连续函数，仍记为 ξ) 使

$$\sup_{|W|=1}\inf_{f\in CB}\|(\xi-W)^{-2}(K\xi\bar{W}+K^{-1}W\bar{\xi}-f)\|_\infty\leqslant1.\quad(3.13)$$

在上式中

$$\|\phi\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{z\in C_1}|\phi(z)|.$$

当 $\xi\in\mathscr{K}_0(E)$ 时，令 $\delta_1(\xi)^{1/2}$ 为使 (3.13) 成立的 K 的下界．

引理 3.3 $\mathscr{K}_0(E)\subset\mathscr{A}_0(E)$．而且当 $\xi\in\mathscr{K}_0(E)$ 时，

$$\delta_\xi\leqslant\delta_1(\xi).\quad(3.14)$$

证 设 $\xi\in\mathscr{K}_0(E)$．任取正常 K 使 (3.13) 成立，我们取 $a>0$ 使 $a^{1/2}(1+a)^{-1/2}=K$，今证 (3.12) 成立．如果记 $g_+=\mathfrak{P}(g)$，$g_-=g-g_+$．由于 $\|g\|^2=\|g_+\|^2+\|g_-\|^2$，经过计算可以看出 (3.12) 等价于

$$\inf_{|W|=1}\left\{\frac{1}{K}\|(\xi-W)g_+\|^2+K\|(\xi-W)g_-\|^2\right.$$
$$\left.-2\mathrm{Re}\left(W\left(-K(\bar{\xi}g_+,g_-)+\frac{1}{K}(\bar{\xi}g_-,g_+)\right)\right)\right\}\geqslant 0, \quad (3.15)$$

我们作单位圆 $|z|<1$ 上的解析函数

$$g_W(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}-z}{e^{i\theta}+z}\ln|\xi(e^{i\theta})-W|d\theta\right\}.$$

由于 $|\xi(\cdot)-W|$ 为连续函数，由复变函数论可知 $g_W(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 中是连续的，在 $|z|<1$ 中解析而且

$$|g_W(z)|=|\xi(z)-W|,\quad z\in C_1.$$

记 $h_1(z)=g_W(z)g_+(z)$，那么显然 $h_1(\cdot)\in H^2$，我们注意 $g_-(z^{-1})z^{-1}$ 也属于 H^2. 记

$$h_0(z)=g_W(z)\overline{g_-(\bar{z}^{-1})}z^{-1},$$

那么 $h_0(\cdot)\in H^2$. 然而当 $z\in C_1$ 时

$$|h_0(z)|=|g_W(z)g_-(z)|=|(\xi(z)-W)g_-(z)|,$$
$$|h_1(z)|=|(\xi(z)-W)g_+(z)|.$$

另一方面

$$(\bar{\xi}g_+,g_-)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\bar{\xi}(e^{i\theta})g_+(e^{i\theta})\overline{g_-(e^{i\theta})}d\theta$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\xi(e^{i\theta})}\frac{h_1(e^{i\theta})h_0(e^{i\theta})e^{i\theta}}{g_W(e^{i\theta})^2}d\theta.$$

又因为

$$\mathrm{Re}\,W(\bar{\xi}g_-,g_+)=\mathrm{Re}\,\overline{W}(\xi g_+,g_-),$$

因此 (3.15) 等价于

$$\inf_{|W|=1}\left\{K\|h_0\|^2+\frac{1}{K}\|h_1\|^2-2\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdot\int_{|z|=1}\phi(z)g_W(z)^{-2}h_0(z)h_1(z)dz\right\}\right\}\geqslant 0, \qquad (3.16)$$

其中 $\phi(z)=K\overline{W}\xi(z)+\frac{1}{K}W\overline{\xi(z)}$.

当 ξ 满足条件 (3.13) 时，对任何 $\varepsilon>0$，取 $f\in CB$，那么由于

$$\int f(z)g_W(z)^{-2}h_0(z)h_1(z)dz = 0,$$

我们得到

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \phi(z)g_W(z)^{-2}h_0(z)h_1(z)dz\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{\phi(z)-f(z)}{g_W(z)^2}h_0(z)h_1(z)dz\right| \\
&\leqslant \frac{1+\varepsilon}{2\pi}\int |h_0(e^{i\theta})|\cdot|h_1(e^{i\theta})|d\theta \\
&\leqslant (1+\varepsilon)\left(\frac{1}{K}\|h_0\|^2 + K\|h_1\|^2\right).
\end{aligned}$$

在上式中令 $\varepsilon\to 0$ 就得到(3.16)，因此也就得到(3.12)，所以对满足不等式(3.13)的K所作出的 $a=\dfrac{K^2}{1-K^2}$ 满足(3.12)，这样就得到(3.14)．证毕．

引理3.3提供给我们一个判断函数 $\varphi\in\mathscr{A}_\bullet(E)$ 的一个充分条件．

对于任何一个自共轭算子 $A\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$，我们令

$$m(A)=\inf_{\|f\|=1}(Af,f).$$

当 $T=U|T|\in SHU$ 时，我们记 $|T|_\pm=\mathscr{S}_U^\pm(|T|)$．如果 $0\bar{\in}\sigma(T)$，那么显然 $|T|_\mp^{-1/2}\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$，由于

$$|T|_+\leqslant\|T\|I,\quad |T|_-^{-1}=|T^{-1}|_+\leqslant\|T^{-1}\|I.$$

所以

$$m(|T|_+^{-1/2}|T|_-|T|_+^{-1/2})=\inf_{\|f\|=1}\frac{(|T|_-f,f)}{(|T|_+f,f)}.$$

然而由于 $\mathscr{S}_U^-(T)=U|T|_-$ 为正常算子，所以有实数 θ 使

$$e^{i\theta}m(|T|_-)\in\sigma(\mathscr{S}_U^-(T))\subset\sigma(T),$$

因此由系 I，3.7 得到

$$m(|T|_-)\geqslant\inf_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|=\|T^{-1}\|^{-1}.$$

同样地可证

$$\sup_{\|f\|=1}(|T|_+f,f)=\|T\|.$$

这样一来，

$$m(|T|_+^{-1/2}|T|_-|T|_+^{-1/2}) \geq \|T\|^{-1}\|T^{-1}\|^{-1} = \frac{\inf\limits_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|}{\sup\limits_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|}.$$

定理 3.4 设 $T = U|T| \in SHU$. 如果 $\xi \in \mathscr{A}_0(\sigma(U))$，而且

$$\delta_\xi \leqslant m(|T|_+^{-1/2}|T|_-|T|_+^{-1/2})^{1)}, \tag{3.17}$$

$\psi \in \mathscr{T}_0(\sigma(|T|))$，再设 $\psi(t)/t$ 是单调下降的，如果记 $\varphi(\rho e^{i\theta}) = \xi(e^{i\theta})\psi(\rho)$，那么 (2.1—2) 成立.

如果又有函数族 $\xi_t(\cdot) \in \mathscr{A}_0(\sigma(U))$，$t \in [0, 1]$，它们都满足不等式 (3.17)，使对每个 $z \in \sigma(U)$，$\xi_t(z)$ 为 $t \in [0, 1]$ 的连续函数，而且 $\xi_0(z) = z$，$\xi_1(z) = \xi(z)$. 那么 (2.3—4) 也成立.

证 (1) 首先我们要证明当 $f \in \mathscr{H}$，$|W| = 1$ 时

$$\mathrm{Re}((|T| - W|T|\xi(U)^*)f, f) \geqslant 0. \tag{3.18}$$

记 $a = \delta_\xi(1 - \delta_\xi)^{-1}$. 我们不妨只考察奇异积分模型. 设 $\{e_n\}$ 是 $\mathfrak{D}$ 的完备就范直交系. 记 $g_n(\cdot) = (\alpha(\cdot)f(\cdot), e_n)$. 由 (3.12) 可知

$$\mathrm{Re}\{(\mathfrak{P}((1 - W\overline{\xi(\cdot)})g_n(\cdot)), g_n(\cdot)) + a((1 - W\overline{\xi(\cdot)})g_n(\cdot), g_n(\cdot))\} \geqslant 0,$$

在上式对 n 求和后就得到

$$\mathrm{Re}\{(\mathfrak{P}((1 - W\overline{\xi(\cdot)})\alpha(\cdot)f(\cdot)), \alpha(\cdot)f(\cdot)) + a((1 - W\overline{\xi(\cdot)})\alpha(\cdot)f(\cdot), \alpha(\cdot)f(\cdot))\} \geqslant 0,$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}((|T| - W|T|\xi(U)^*)f, f) &= \mathrm{Re}\{(\beta(\cdot)(1 - W\overline{\xi(\cdot)})f(\cdot), f(\cdot)) \\ &\quad + (\mathfrak{P}(1 - W\overline{\xi(\cdot)})\alpha(\cdot)f(\cdot), \alpha(\cdot)f(\cdot))\} \\ &\geqslant \mathrm{Re}\{(\beta(1 - W\bar{\xi})f, f) - a((1 - W\bar{\xi})\alpha f, \alpha f)\}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

---

1) 如果 $\delta_\xi < \inf\limits_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda| / \sup\limits_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|$，那么(3.17)成立.

记 $g = \mathrm{Re}(1 - W\xi)f$，(3.19) 的右边大于或等于

$$
\begin{aligned}
&(|T|_- g, g) - a((|T|_+ - |T|_-)g, g) \\
&\quad = (1 + a)[(|T|_- g, g) - \delta(|T|_+ g, g)] \\
&\quad \geqslant (1 + a)(m(|T|_+^{-1/2}|T|_-|T|_+^{-1/2}) \\
&\qquad - \delta_\xi)(|T|_+ g, g) \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

这就证明了(3.18).

(2) 作 $B = \xi(U)|T|$，和 $b = \xi(e^{i\theta})\rho$，显然有

$$
\begin{aligned}
\|(B - bI)f\|^2 &= \|(|T| - \rho I)f\|^2 \\
&\quad + 2\rho\,\mathrm{Re}((|T| - \xi(e^{i\theta})|T|\xi(U)^*)f, f).
\end{aligned}
$$

由 (3.18) 可知

$$
\|(B - bI)f\|^2 \geqslant \|(|T| - \rho I)f\|^2. \tag{3.20}
$$

设 $|T|$ 的谱分解为

$$
|T| = \int_{\sigma(|T|)} s\,dQ(s).
$$

记 $m = m(|T|)$，$M = \|T\|$. 则 $\sigma(|T|) \subset [m, M]$. 由 (3.20)，当 $\rho \neq 0$ 时，我们有

$$
\begin{aligned}
\|(\varphi(T) - \varphi(\rho e^{i\theta})I)f\| &= \left\|\left(\xi(U)\phi(|T|) - \frac{\phi(\rho)}{\rho}|T|\right)f\right. \\
&\quad \left. + \frac{\phi(\rho)}{\rho}(B - bI)f\right\| \geqslant \frac{\phi(\rho)}{\rho}\left\{\|(|T| - \rho I)f\|\right. \\
&\quad \left. - \left\|\left(\frac{\rho}{\phi(\rho)}\phi(|T|) - |T|\right)f\right\|\right\} \\
&= \frac{\phi(\rho)\rho}{\Delta}\int u(s, \rho)\,d(Q(s)f, f).
\end{aligned}
$$

其中

$$
u(s, \rho) = \left(1 - \frac{\phi(s)}{\phi(\rho)}\right)\left(1 - \frac{s}{\rho} + \left(\frac{\phi(s)}{s} - \frac{\phi(\rho)}{\rho}\right)\frac{s}{\phi(\rho)}\right),
$$

而且

$$
\Delta = \|(|T| - \rho I)f\| + \|(\rho\phi(|T|)/\phi(\rho) - |T|)f\|.
$$

我们注意由于 $\phi(s)$和 $s/\phi(s)$ 是 s 的单调增函数. 所以当 $0 < s \leqslant \rho - \delta$ 时

$$u(s,\rho) \geqslant \left(1 - \frac{\phi(\rho-\delta)}{\phi(\rho)}\right)\frac{\delta}{\rho},$$

当 $s \geqslant \rho + \delta$ 时

$$u(s,\rho) \geqslant \left(\frac{\phi(\rho+\delta)}{\phi(\rho)} - 1\right)\frac{\delta}{\rho}.$$

因此对任何正数 $\delta < \rho$，存在正数 ε 使

$$\inf_{|s-\rho|\geqslant\delta} u(s,\rho) > \varepsilon.$$

另一方面

$$\Delta \leqslant c\|f\|,$$

因此当 $\|f\| = 1$ 时，

$$\begin{aligned}\|(|T| - \rho I)f\|^2 &= \int (s-\rho)^2 d(Q(s)f,f) \\ &\leqslant \delta^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_{|s-\rho|\geqslant\delta} u(s,\rho)d(Q(s)f,f) \\ &\leqslant \delta^2 + \frac{c}{\phi(\rho)\rho\varepsilon}\|(\varphi(T) \\ &\qquad - \varphi(\rho e^{i\theta})I)f\|.\end{aligned} \tag{3.21}$$

若 $\varphi(\rho e^{i\theta}) \in \sigma_a(\varphi(T))$，且 $\rho \neq 0$，存在 $\{f_n\}$ 为 $\mathscr{H}$ 中单位向量列使

$$\lim_{n\to\infty}\|(\varphi(T) - \varphi(\rho e^{i\theta})I)f_n\| = 0, \tag{3.22}$$

由 (3.21) 可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|(|T| - \rho I)f_n\| \leqslant \delta,$$

令 $\delta \to 0$ 即知 $\|(|T| - \rho I)f_n\| \to 0$，再由 (3.20) 可知

$$\|(U - e^{i\theta}I)f_n\| \to 0.$$

即 $\rho e^{i\theta} \in \sigma_{ja}(T)$. 所以 (2.1—2) 成立.

定理的其余部分可由前面类似的方法得到. 证毕.

系 3.5 设 $T = U|T| \in SHU$，$\xi \in S_0(\sigma(U)) \cap \mathscr{T}_0(\sigma(U))$，$\phi \in \mathscr{T}_0(\sigma(|T|))$，而且 $\phi(s)/s$ 是单调减少函数，那么 (2.1—4) 成立.

4. 半亚正常算子的角状分割 现在我们要作出谱映照定理的

一个应用，就是类似于定理 V，3.10，对半亚正常算子在角状分割下证明 $\sigma(T_\gamma)\subset\sigma(T)$. 为此我们引进联系半亚正常算子与亚正常算子的一种变换 τ_0.

引理 3.6 设 $T=U|T|\in SHU$，记 $\tau_0(T)=U|T|^{1/2}$，$\tau_0(\rho e^{i\theta})=\sqrt{\rho}\,e^{i\theta}$. 那么 (1) $\tau_0(T)\in HN$，(2) 有关系式

$$\sigma_a(\tau_0(T))=\tau_0(\sigma_a(T)),\quad \sigma_r(\tau_0(T))=\tau_0(\sigma_r(T)),$$
$$\sigma(\tau_0(T))=\tau_0(\sigma(T)).\tag{3.23}$$

而且 (3) T 为完全正常算子的充要条件是 $\tau_0(T)$ 为完全正常算子.

证 (1) 由于 $\tau_0(T)^*\tau_0(T)-\tau_0(T)\tau_0(T)^*=|T|-U|T|U^*\geqslant 0$ 立即知 $\tau_0(T)\in HN$. (2) 由系 3.5 (取 $\phi(s)=\sqrt{s}$) 可知 (3.23) 成立. 而 (3) 是显然的. 证毕.

仿照引理 V, 3.8 立即得到

引理 3.7 设 $T=U|T|\in SHU$，$U=\int e^{i\theta}dE(e^{i\theta})$，$\gamma$ 是 C_1 的弧，$\mathscr{H}_\gamma=E(\gamma)\mathscr{H}\neq\{0\}$，$T_\gamma=E(\gamma)T|_{\mathscr{H}_\gamma}$. 如果 T 是完全非正常的，那么 T_γ 也是完全非正常的.

引理 3.8 设 $T=U|T|$ 是完全非正常的半亚正常算子. 那么 $\sigma(T)$ 没有形如 $\{\rho e^{i\theta}|0<a<\rho<b\}$ 的暴露线段.

证 不妨设 $T\in SHU$. 如果 $\sigma(T)$ 含有暴露线段 $l=\{\rho e^{i\theta}|0<a<\rho<b\}$，那么由引理 3.6—7，对完全非正常的亚正常算子 $\tau_0(T)$，$\sigma(\tau_0(T))$ 包含暴露线段

$$\tau_0(l)=\{\rho e^{i\theta}|0<\sqrt{a}<\rho<\sqrt{b}\}$$

这和引理 V, 3.9 冲突. 所以上述 l 不存在. 证毕.

定理 3.9 设 $T=U|T|\in SHU$，γ 是 C_1 的弧，

$$U=\int e^{i\theta}dE(e^{i\theta}),$$

$\mathscr{H}_\gamma=E(\gamma)\mathscr{H}\neq\{0\}$，$T_\gamma=T|_{\mathscr{H}_\gamma}$. 那么

$$\sigma(T_\gamma)\subset\sigma(T).\tag{3.24}$$

证 由于相应于 γ 端点的 U 的特征子空间必为 T 的特征子空

间，由 §I，2.1（5）可知它约化 T．因此不妨设 γ 是开弧．对于正常算子 T，(3.24) 是显然的．对于完全非正常的 T，由定理 I，3.2 可知如果 $\sigma(T_\gamma)\not\subset\sigma(T)$ 那么 $\sigma(T_\gamma)$ 必有暴露线段在 $\overline{\mathfrak{D}}_\gamma-\mathfrak{D}_\gamma$ 中．但这和引理 3.8 冲突．因此 (3.24) 成立．证毕．

定理 3.10 设 T 是半亚正常算子，那么

$$\Pi_\rho(\sigma(T))\supset\sigma(|T|). \tag{3.25}$$

证 不妨设 $T=U|T|\in SHU$．我们取单位圆周上的弧

$$\gamma_n=\left\{e^{i\theta}\,\middle|\,\frac{1}{n}\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\frac{1}{n}\right\}.$$

沿用定理 3.9 中的记号，记 $\mathscr{H}_n=\mathscr{H}_{\gamma_n}$，$T_n=T_{\gamma_n}$，

$$U_n=U|_{\mathscr{H}_n},\quad |T|_n=E(\gamma_n)|T||_{\mathscr{H}_n}$$

因此 $\sigma(U_n)\neq C_1$．由 (I，3.6) 知

$$\Pi_\rho(\sigma_a(U_n|T|_n))=\sigma(|T|_n). \tag{3.26}$$

由于当 $n\to\infty$ 时，$S-\lim\limits_{n\to\infty}E(\gamma_n)=I$，我们有

$$S-\lim_{n\to\infty}T_n=T,\quad S-\lim_{n\to\infty}|T|_n^m=|T|^m,\ m=1,2.$$

设 $\rho\in\sigma(|T|)$．记 $d_n=\operatorname{dis}(\rho,\sigma(|T|_n))$，那么由

$$(|T|-\rho I)^2=S-\lim_{n\to\infty}(|T|_n-\rho I)^2,$$

可知 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,d_n^2\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\|(|T|_n-\rho I)f\|^2=\|(|T|-\rho I)f\|^2$，其中 $\|f\|=1$．因此

$$\lim_{n\to\infty}d_n=0.$$

必有 $\rho_n\in\sigma(|T|_n)$ 使 $\rho_n\to\rho(n\to\infty)$．然而由 (3.26)，存在 $e^{i\theta_n}$，$|e^{i\theta_n}|=1$ 使

$$\rho_ne^{i\theta_n}\in\sigma_a(T_{\mathscr{H}_n}).$$

再由 (3.24) 可知 $\rho_ne^{i\theta_n}\in\sigma(T)$．必有 $\{e^{i\theta_n}\}$ 的子列 $\{e^{i\theta_{k_n}}\}$ 使 $\rho_{k_n}e^{i\theta_{k_n}}\to\rho e^{i\theta_0}$．由于 $\sigma(T)$ 为闭集可知 $\rho e^{i\theta_0}\in\sigma(T)$，即 $\rho\in\Pi_\rho(\sigma(T))$．证毕．

我们注意在一般情况下 (3.25) 未必能成为等式：

$$\Pi_\rho(\sigma(T))=\sigma(|T|). \tag{3.27}$$

例如在例 I, 2.1 中，我们取

$$\lambda_n = 0, \ (n < 0), \qquad \lambda_n = 1 \ (n \geq 0)$$

这时的 T 具有性质

$$\sigma(|T|) = \{0, 1\} \text{ 而 } \sigma(T) = \{z \mid |z| \leqslant 1\}.$$

因此 (3.27) 不成立.

§4 预解式的估计

1. 亚正常算子经函数变换后的预解式 对于亚正常算子，前面我们已经给出预解式的准确估计. 现在我们要给出亚正常算子经过函数变换后所得到的算子的预解式估计. 首先我们注意对于任何 $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$,

$$r_{sp}(A) \leqslant \|A\|.$$

因此对任何 $\lambda \in \rho(A)$, 我们有

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \geqslant \frac{1}{\operatorname{dis}(\lambda, \sigma(A))}. \tag{4.1}$$

这是因为

$$r_{sp}((\lambda I - A)^{-1}) = \sup_{W \in \sigma((A-\lambda I)^{-1})} |W| = \frac{1}{\inf\limits_{z \in \sigma(A)} |z - \lambda|}.$$

由 (4.1) 知道，我们只需估计 $\|(\lambda I - A)^{-1}\|$ 的上界.

定理 4.1 设 $T = T_1 + iT_2 \in HN$, $\varphi_j \in \mathscr{T}(\sigma(T_j))$, 如果

$$\prod_{j=1}^{2} (M_{\varphi_j} - m_{\varphi_j}) < 16 \prod_{j=1}^{2} m_{\varphi_j},$$

记 $A = \varphi(T) = \varphi_1(T_1) + i\varphi_2(T_2)$. 那么存在常数 c 仅依赖于 φ_1, φ_2 使得当 $\lambda \in \rho(A)$ 时成立

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant c \frac{1}{\operatorname{dis}(\lambda, \sigma(A))}. \tag{4.2}$$

证 我们利用定理 2.5 的证明，在 (4) 中取 $K_1 = 1$.

$$K_2 = (2m_{\varphi_1} + \sigma_{\varphi_1})/(2m_{\varphi_2} + \sigma_{\varphi_2}),$$

$$\psi_j = K_j\varphi_j, \quad \psi(z) = \psi_1(z_1) + i\psi_2(z_2).$$

那么

$$\eta = 2m_{\phi_2} - \sigma_{\phi_1} = 2m_{\phi_1} - \sigma_{\phi_2} = (4m_{\varphi_1}m_{\varphi_2} - \sigma_{\varphi_1}\sigma_{\varphi_2})/(2m_{\varphi_2} + \sigma_{\varphi_2}).$$

记 $T' = T_1 + iK_2^{-1}T_2$，$z' = \phi^{-1}(\lambda)$，这时 $A = \psi(T')$，而相应于 ϕ_i 的不等式 (2.18) 化为

$$\mathrm{Re}((\lambda I - A)f, (z'I - T')f) \geqslant \eta\|(z'I - T')f\|^2.$$

令 $f = (zI - A)^{-1}g$，由上式得到

$$\|(z'I - T')(\lambda I - A)^{-1}g\|^2 \leqslant \frac{1}{\eta}\mathrm{Re}(g, (z'I - T')(\lambda I - A)^{-1}g) \leqslant \frac{1}{\eta}\|g\|\|(z'I - T')(\lambda I - A)^{-1}g\|,$$

所以

$$\|(z'I - T')(\lambda I - A)^{-1}g\| \leqslant \frac{1}{\eta}\|g\|.$$

这样一来，

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant \|(z'I - T')^{-1}\|\|(z'I - T')(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\eta}\|(z'I - T')^{-1}\|.$$

再由 T' 是亚正常算子和 (I, 3.12) 可知

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\eta}\cdot\frac{1}{\mathrm{dis}(z', \sigma(T'))}.$$

记 $z = \varphi^{-1}(\lambda)$，对谐映照 ϕ 的 (2.4) 式知

$$\mathrm{dis}(\lambda, \sigma(A)) = \inf_{W' \in \sigma(T')} |\phi(z') - \phi(W')| \leqslant \max(M_{\phi_1}, M_{\phi_2})\,\mathrm{dis}(z', \sigma(T')).$$

因此 (4.2) 成立，其中 $c = \max(M_{\phi_1}, M_{\phi_2})/\eta$ 即

$$c = \max(M_{\varphi_1}(2m_{\varphi_2} + \sigma_{\varphi_1}), M_{\varphi_2}(2m_{\varphi_1} + \sigma_{\varphi_1}))/(4m_{\varphi_1}m_{\varphi_2} - \sigma_{\varphi_1}\sigma_{\varphi_2}), \tag{4.3}$$

它确实仅依赖于 φ_i，$i = 1, 2$.

2. 半亚正常算子的预解式 关于半亚正常算子的预解在一般情况下的准确估计尚是一个有待研究的问题．这里在部分情况下给出一个类似于 (4.2) 的估计．为此我们先介绍一个引理．

引理 4.2 设 $T = X + iY \in HN$，φ，ϕ 为 $\sigma(X)$ 上有界实值连续函数而且 $\varphi(x) \neq 0$，作复平面上的映象

$$\tau: x + iy \longmapsto x + i(\varphi(x)^2 y + \phi(x)).$$

记 $T' = X + i(\varphi(X)Y\varphi(X) + \phi(X))$，那么

$$\sigma(T') = \tau(\sigma(T)). \tag{4.4}$$

证 不妨设 T 是完全非正常的. 显然 $T' \in HN$，而且它的记号算子是

$$S_X^{\pm}(T') = X + i(\varphi(X)S_X^{\pm}(Y)\varphi(X) + \phi(X)).$$

作广义记号算子 T_k，我们仅考察奇异积分算子模型得 (I, 1.29). 那么相应于 T' 的广义记号算子 $T'_k = (1-k)S_X^-(T') + kS_X^+(T')$ 表示为

$$(T'_k f)(x) = (x + i[(\beta(x) + k\alpha(x)^2)\varphi(x)^2 + \phi(x)])f(x).$$

设 $z_0 = x_0 + iy_0 \in \sigma(T)$，则由定理 IV，3.1 有 $0 \leqslant k \leqslant 1$ 使 $z_0 \in \sigma(T_k)$. 因此

$$\operatorname*{ess\,inf}_x \{(x - x_0)^2 + \|\beta(x) + k\alpha(x)^2 - y_0\|^2\} = 0.$$

所以对任何正数 δ，有正测度集 E_δ 使

$$(x - x_0)^2 + \|\beta(x) + k\alpha(x)^2 - y_0\|^2 < \delta^2, \quad x \in E_\delta.$$

设 $M = \max(\varphi(x)^2, 1) > 0$. 那么对任何 $\varepsilon > 0$，取正数 $\delta < \varepsilon/4M$ 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时，

$$|\phi(x) - \phi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{8}, \quad |y_0||\varphi(x)^2 - \varphi(x_0)^2| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

这样一来，当 $x \in E_\delta$ 时，

$$(x - x_0)^2 + \|\varphi(x)^2(\beta(x) + k\alpha(x)^2) + \phi(x) - (\varphi(x_0)^2 y_0 + \phi(x_0))\|^2 < \varepsilon^2.$$

因此 $\tau(z_0) \in \sigma(T'_k)$，由定理 IV，3.1 可知 $\tau(\sigma(T)) \subset \sigma(T')$. 如果我们考察 τ^{-1} 又可得 $\sigma(T') \subset \tau(\sigma(T))$. 因此 (4.4) 成立.

现在给出半亚正常算子在部分情况下预解式的估计

定理 4.3 设 $T = U|T| \in SHU$，$\sigma(U) \subset \{e^{i\theta} | \alpha_0 + \alpha \leqslant \theta \leqslant \pi + \alpha_0 - \alpha\}$，其中 $0 < \alpha < \pi$，$\lambda = \rho e^{i\eta}$，$\rho \geqslant 0$，$\alpha_0 + \alpha + \varepsilon \leqslant \eta \leqslant 2\pi + \alpha_0 - \alpha - \varepsilon$，其中 $\varepsilon > 0$，那么必有正数 C (仅依赖于 α

和 ε) 使

$$\|(T-\lambda I)^{-1}\| \leqslant C/\mathrm{dis}(\lambda, \sigma(T)). \tag{4.5}$$

证 不妨设 $\sigma(U) \subset \{e^{i\theta} | \alpha \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \alpha\}$. 此处 $0 < \alpha < \pi$. 我们考察逆 Cayley 变换 $X = L^{-1}(U)$, 那么

$$\sigma(X) \subset \left[-\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}, \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\right].$$

记 $\lambda = \rho e^{i\varphi}$, $\rho \geqslant 0$, 由于

$$(T-\lambda I) = (-i)U(X^2+I)^{-1/2}A(X^2+I)^{-1/2}. \tag{4.6}$$

其中

$$A = (\sin\varphi(I-X^2) + 2X\cos\varphi) + iY,$$

而

$$Y = (X^2+I)^{1/2}|T|(X^2+I)^{1/2} - \rho(\cos\varphi(X^2-I) + 2X\sin\varphi).$$

由于 $X + i|T| \in HN$, 所以 $X + iY \in HN$. 又因为函数

$$\xi(x) = ((1-x^2)\sin\varphi + 2x\cos\varphi)\rho$$

属于 $\mathscr{T}(\sigma(X))$, 而且 $M_\varphi < \infty$,

$$m_\varphi \geqslant 2\rho\left(\cos\varphi - \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}|\sin\varphi|\right) > 0.$$

由定理 4.1 可知

$$\|A^{-1}\| \leqslant c_\xi \cdot \frac{1}{\mathrm{dis}(0, \sigma(X+iY))}. \tag{4.7}$$

由引理 4.2 和定理 I, 3.5 可知

$$\begin{aligned}\sigma(X+iY) &= \{(x+1)^{1/2}y(x^2+1)^{1/2} - \rho(\cos\varphi(x^2-1) \\ &\quad + 2x\sin\varphi) | x+iy \in \sigma(X+i|T|)\} \\ &= \left\{ie^{-i\theta}(re^{i\theta}-\lambda)\cos^{-2}\frac{\theta}{2} \,\middle|\, re^{i\theta} \in \sigma(T)\right\}.\end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{dis}(0, \sigma(X+iY)) \geqslant \mathrm{dis}(\lambda, \sigma(T))/\cos^2\frac{\alpha}{2}. \tag{4.8}$$

从 (4.6—8) 我们得到 (4.5). 证毕.

§5 拟亚正常算子

1. Putnam 不等式的推广 以上的一些谱映照定理都可以用来推广 Putnam 不等式. 我们仅举一种情况来说明如何推广, 其余的情况都从略.

定理 5.1 设 $T\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$, 而且存在一数 $\alpha\geqslant\frac{1}{2}$ 使

$$(T^*T)^\alpha-(TT^*)^\alpha\geqslant 0 \tag{5.1}$$

那么

$$\|(T^*T)^\alpha-(TT^*)^\alpha\|\leqslant\frac{\alpha}{\pi}\iint_{\sigma(T)}\rho^{2\alpha-1}d\rho d\theta.$$

特别当 $\sigma(T)$ 的平面 Lebesgue 测度为零时, T 为正常的.

注意当 $\alpha=1$ 或 $\alpha=1/2$ 时, 就是 § V, 3 所讨论过的亚正常或半亚正常的情况. 这里遗留下如下的问题, 定理 5.4 中的条件 $\alpha\geqslant\frac{1}{2}$ 是否可以放宽为 $\alpha>0$.

证 设 T 的极分解为 $T=U|T|$. 其中 U 为 $\overline{T^*\mathscr{H}}$ 到 $\overline{T\mathscr{H}}$ 的部分等距算子. 令

$$A=U|A|,\quad |A|=|T|^{2\alpha}.$$

由 (5.1) 易知 $A\in SH$. 由定理 V, 3.5 知

$$\|(A^*A)^{1/2}-(AA^*)^{1/2}\|\leqslant\frac{1}{2\pi}\iint_{\sigma(A)}drd\theta \tag{5.2}$$

我们不妨设 $A\in SHU$, 不然的话, 我们延拓 A 成为 $\widetilde{A}=\widetilde{U}(|A|\oplus 0)$, 使 $\widetilde{A}\in SHU$. 而后用系 3.5, 取 $\xi(e^{i\theta})=e^{i\theta}$, $\psi(\rho)=\rho^{\frac{1}{2\alpha}}$ 这时

$$\varphi(A)=U\psi(|A|)=T.$$

由于 $\frac{1}{2\alpha}-1\leqslant 0$, $\psi(t)/t=t^{\frac{1}{2\alpha}-1}$ 是单调减少函数, 从而由系 3.5 可知

$$\sigma(T)=\varphi(\sigma(A)). \tag{5.3}$$

在 (5.2) 中做变数变换 $r=\rho^{2\alpha}$，由 (5.2—3) 即得 (5.1)． 证毕．

事实上按照上面的方法，由 § 2—3 中每个谱映照定理可以得 Putnam 不等式的一个相应的推广．

2. 拟亚正常算子类 以上的一些函数变换启发我们研究下面的类似于亚正常算子的算子族．

设 φ 为实数直线$(-\infty,+\infty)$(或半直线 $[0,+\infty)$) 上严格单调增加的连续函数，满足条件

$$\lim_{t\to\pm\infty}\varphi(t)=\pm\infty \quad (\text{相应地 } \varphi(0)=0,\ \lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=+\infty),$$

则称 φ 为标函数(相应地称为模标函数)，其全体记为 SF (相应地记为 MSF)．当 φ 为 C_1 到 C_1 的同胚映照而且保持定向时称 φ 为幅角标函数，其全体记为 ASF．

对 $T\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$，我们把它的卡狄生分解记为 $T=T_1+iT_2$，其中 T_i 是自共轭算子．设 φ_j，$j=1,2$ 是两个固定的标函数，我们记 $\varphi(x_1+ix_2)=\varphi_1(x_1)+i\varphi_2(x_2)$．作

$$\varphi: T\longmapsto\varphi(T)=\varphi_1(T_1)+i\varphi_2(T_2).$$

那么算子族 $\varphi(HN)=\{\varphi(T)\,|\,T\in HN\}$ 类似于算子族 HN．例如当 m 为奇数时，$\varphi_1(t)=t^{1/m}$，$\varphi_2(t)=t$ 时，$\varphi(HN)$ 中算子即为别的数学家 Istrătescu[3, 7] 所研究过的"m 阶亚正常算子"，这就是适合条件

$$i[T_1^m, T_2]\geqslant 0$$

的算子 $T=T_1+iT_2$．可以证明它是 HN 的子族．然而如果取一数 α，$1<\alpha$，$\varphi_1(t)=|t|^\alpha\operatorname{sign}t$，$\varphi_2(t)=t$，那么 $\varphi(HN)$ 就比 HN 大．

我们还可以拓广半亚正常算子族 SH，设 φ_1，φ_2 分别为幅角标函数和模标函数．当算子 $A=U|A|$ 的极分解中 U 延拓成等距算子时，作

$$\varphi(A)=\varphi_1(U)\varphi_2(|A|).$$

其中 $\varphi_1(U)$ 可如下地定义．根据引理 II, 3.5，作 $\tilde{\mathscr{H}}\supset\mathscr{H}$ 及 U 延拓为酉算子 $\tilde{U}$，取定 $\tilde{U}$ 后，作

$$\varphi_1(U) = \varphi_1(\tilde{U})|_{\mathscr{H}}.$$

又记 $\varphi(\rho e^{i\theta}) = \varphi_1(e^{i\theta})\varphi_2(\rho)$. 我们也要考察算子族

$$\varphi(SH) = \{\varphi(T) | T \in SH\}.$$

当 $\varphi_1(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$, $\varphi_2(t) = t^{1/2m}$ 时，有人叫 $\varphi^{-1}(SH)$ 为 m-亚正常算子(见藤井[1]).

对各式各样的 φ，上述一切 $\varphi(HN)$ 和 $\varphi(SH)$ 中算子都称为拟亚正常算子.

3. 拟亚正常算子的一些性质 对于拟亚正常算子，我们可以类似于前面对亚正常算子或半亚正常算子的讨论，列举出它们的一些性质:

(1) 若 $T \in \varphi(SH)$, $0 \bar{\in} \sigma(T)$, $\varphi(\rho e^{i\theta}) = \varphi_1(e^{i\theta})\varphi_2(\rho)$, 记

$$\tilde{\varphi}_2(\rho) = \varphi_2(\rho^{-1})^{-1}, \quad \tilde{\varphi}(\rho e^{i\theta}) = \varphi_1(e^{i\theta})\tilde{\varphi}_2(\rho),$$

则 $T^{-1} \in \tilde{\varphi}(SH)$.

(2) 如果 $T = U|T| \in \varphi(SH)$，那么 U 的特征子空间约化 T. 如果 U 为酉算，而且 $\sigma(U) \neq C_1$，那么 $|T|$ 的特征子空间也约化 T.

如果 $T = T_1 + iT_2 \in \varphi(HN)$，那么 T_1 或 T_2 的特征子空间约化 T.

(3) 设标函数 φ_j 满足 Lipschitz 条件，$T = X + iY \in \varphi(HN)$，那么

$$\Pi_x(\sigma_{ja}(X + iY)) = \sigma(X),$$
$$\Pi_y(\sigma_{ja}(X + iY)) = \sigma(Y).$$

设幅角标函数及模标函数 φ_j 满足 Lipschitz 条件，如果 $T = U|T| \in \varphi(SHU)$，那么

$$\Pi_\theta(\sigma_{ja}(U|T|)/\{0\}) = \sigma(U),$$

又当 $\sigma(U) \neq C_1$ 时，

$$\Pi_\rho(\sigma_{ja}(U|T|)) = \sigma(|T|).$$

(4) 当 $T = T_1 + iT_2 \in \varphi(HN)$ 时，我们定义记号算子

$$T_\pm = S^{\pm}_{\varphi_1^{+}(T_1)}(T)$$

和广义记号算子 $T_k = (1-k)T_- + kT_+$. 如果标函数 φ_j 满足

谱映照定理中条件，那么当 $T \in \varphi(HN)$ 时，

$$\sigma(T) = \bigcup_{0 \leqslant k \leqslant 1} \sigma(T_k), \quad \sigma_{ja}(T) = \sigma_a(T).$$

同样地成立着

$$\|\varphi^{-1}(T)^*\varphi^{-1}(T) - \varphi^{-1}(T)\varphi^{-1}(T)^*\| \leqslant \frac{1}{\pi}\iint_{\sigma(T)} d\varphi_1^{-1}(x)d\varphi_2^{-1}(y).$$

特别当 $\sigma(T)$ 的测度为 0 时，T 为正常.

当 $T = U|T| \in \varphi(SH)$ 时，我们定义极记号算子

$$T^{\pm} = \mathscr{S}^{\pm}_{\varphi_1^{-1}(U)}(T)$$

和广义极记号算子 $T_{(k)} = (1 - k)T^- + kT^+$. 如果标函数满足谱映照定理中的条件，那么当 $T \in \varphi(SH)$ 时，

$$\sigma(T) = \bigcup_{0 \leqslant k \leqslant 1} \sigma(T_{(k)}), \quad \sigma_{ja}(T) = \sigma_a(T).$$

而且

$$\||\varphi^{-1}(T)|_r - |\varphi^{-1}(T)|_l\| \leqslant \frac{1}{2\pi}\iint_{\sigma(T)} d\varphi_1^{-1}(e^{i\theta})d\varphi_2^{-1}(\rho).$$

特别当 $\sigma(T)$ 的测度为 0 时，T 为正常的.

第七章　主函数、迹与行列式

本章将研究精刻函数的迹——主函数，并且介绍与此有关的迹公式和行列式公式.

§1　迹

关于 Hilbert 空间中算子的迹的理论，已经是熟知的，但这里为了避免读者查阅别的书，我们介绍必要的有关迹的概念和基本性质.

1. 迹的定义　设 $\mathfrak{D}$ 为一复的可析 Hibert 空间，对于 $\mathfrak{D}$ 中的任何半正定有界算子 B，我们可以定义它的迹，任取 $\mathfrak{D}$ 中一列完备就范直交系 $\{e_n\}$，令

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(B)=\sum_{n=1}^{\infty}(Be_n,\ e_n). \tag{1.1}$$

那么 $0\leqslant \mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(B)\leqslant +\infty$. 称 $\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(B)$ 为算子 B 的迹.

如果 $\{g_n\}$ 是 $\mathfrak{D}$ 中另一组完备就范直交系，记 $C=B^{1/2}$. 那么由 Parsevel 等式

$$(Be_n,e_n)=\|Ce_n\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|(Ce_n,\ g_k)|^2,$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(B)&=\sum_{n,k}|(Ce_n,\ g_k)|^2=\sum_{k}\|Cg_k\|^2\\&=\sum_{k}(Bg_k,\ g_k).\end{aligned}$$

所以 $\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(B)$ 的定义与 $\mathfrak{D}$ 中完备就范直交系的选取无关.

对于 $\mathfrak{D}$ 中的有界自共轭算子 B，作 B^2 的半正定平方根 $|B|$.

再令

$$B_{\pm}=\frac{|B|\pm B}{2},$$

那么 $B_{\pm}\geqslant 0$，而且 $B=B_{+}-B_{-}$. 当 $\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(B_{\pm})<+\infty$ 时，我们说 B 属于迹类，这时规定 B 的迹为

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(B)=\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(B_{+})-\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(B_{-}). \tag{1.2}$$

设 B 为 $\mathfrak{D}$ 中线性有界算子，如果 B 的卡狄生分解 $B=B_1+iB_2$ 中自共轭算子 B_1 和 B_2 都属于迹类，那么就说 B 也属于迹类，并且定义 B 的迹为

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(B)=\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(B_1)+i\,\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(B_2).$$

$\mathfrak{D}$ 中迹类算子全体记为 $c_1(\mathfrak{D})$ 或简记为 c_1. 但是当 B 为自共轭算子而且 $\mathrm{tr}(B_{+})$ 和 $\mathrm{tr}(B_{-})$ 中至少有一个是有限时，不管 B 是否属于迹类，我们总是定义 B 的迹 $\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(B)$ 为 (1.2). 但这时 $B\in c_1$ 的充要条件是按上面的定义有意义，而且 $\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(B)$ 是有限数.

2. 迹的性质

(1) $c_1(\mathfrak{D})$ 中算子是全连续的. $c_1(\mathfrak{D})$ 是线性空间. $\mathrm{tr}(\cdot)$ 是 c_1 上的线性泛函. 当 $A\in c_1(\mathfrak{D})$ 时，$A^*\in c_1(\mathfrak{D})$，而且

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(A^*)=\overline{\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(A)}$$

我们可以在 $c_1(\mathfrak{D})$ 上定义一个迹范数为

$$\|A\|_1=(\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(A^*A))^{1/2},\quad A\in c_1(\mathfrak{D})$$

这时，$c_1(\mathfrak{D})$ 按 $\|\cdot\|_1$ 成为 Banach 空间，而且当 $B\in\mathscr{L}(\mathfrak{D})$，$A\in c_1(\mathfrak{D})$ 时，

$$\|BA\|\leqslant\|B\|\|A\|_1,\quad \|AB\|_1\leqslant\|A\|_1\|B\|$$

(2) 设 A 是 $\mathfrak{D}$ 到 $\mathfrak{D}_1$ 的线性有界算子，

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(A^*A)<+\infty \tag{1.3}$$

那么 $\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}_1}(AA^*)<+\infty$，而且

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}_1}(AA^*)=\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(A^*A). \tag{1.4}$$

证 作 A 的极分解 $A=V|A|$，其中 $|A|\geqslant 0$，V 是 $\overline{|A|\mathfrak{D}}$ 到 $\overline{A\mathfrak{D}}$ 的部分等距算子. 因此 $A^*A=|A|^2$，且 $AA^*=V|A|^2V^*$.

设 $\{e_n\}$ 是 V^* 的始域中的完备就范直交系，我们再添加一组就范直交系 $\{g_n\}$ 使 $\{e_n\}\cup\{g_n\}$ 成为 $\mathfrak{D}_1$ 中完备就范直交系，那么由于 $V^*g_n=0$ 我们得到

$$\operatorname{tr}_{\mathfrak{D}_1}(AA^*)=\sum_n(|A|^2V^*e_n, V^*e_n) \tag{1.5}$$

然而 $\{V^*e_n\}$ 为 V^* 的终域，即 $|A|\mathfrak{D}$ 中完备就范直交系．我们再添加一就范直交系 $\{h_n\}$ 使 $\{V^*e_n\}\cup\{h_n\}$ 成为 $\mathfrak{D}$ 中的完备就范直交系，那么由于 $h_n\perp V^*e_k$，所以 $h_n\perp\overline{|A|\mathfrak{D}}$，即 $|A|h_n=0$．从而

$$\operatorname{tr}(|A|^2)=\sum_n(|A|^2V^*e_n,\ V^*e_n),$$

由此和 (1.5) 立即导出 (1.4)．证毕．

(3) 设 B 为 $\mathscr{L}(\mathfrak{D})$ 中自共轭算子，则 $B\in c_1$ 的充要条件是对 $\mathfrak{D}$ 中每一组完备就范直交系 $\{e_n\}$，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(Be_n,\ e_n) \tag{1.6}$$

收敛，而且当 (1.6) 收敛时，(1.9) 的和即为 $\operatorname{tr}_{\mathfrak{D}}(B)$．

证　条件的必要性是显然的．今证充分性．记 $B=B_+-B_-$．由于 $\overline{B_+\mathfrak{D}}\perp\overline{B_-\mathfrak{D}}$．作 $\overline{B_\pm\mathfrak{D}}$ 中的完备就范直交系 $\{e_n^\pm\}$．那么 $\{e_n^+\}\cup\{e_n^-\}$ 为 $\mathfrak{D}$ 中完备就范直交系．作 $e_{2n}=e_n^+$，$e_{2n-1}=e_n^-$．那么 $\{e_n\}$ 是完备就范直交系．因此级数 (1.9) 收敛．然而当改变 $\{e_n\}$ 次序时，仍为 $\mathfrak{D}$ 的完备就范直交系．因此级数 (1.9) 中任意改变各项次序时，仍收敛．因此 (1.9) 必为绝对收敛．这就说明

$$\sum_n(B_+e_n^+, e_n^+)+\sum_n(B_-e_n^-, e_n^-)$$

$$=\sum_n|(Be_n, e_n)|<\infty.$$

所以 $\operatorname{tr}_{\mathfrak{D}}(B_+)<\infty$，$\operatorname{tr}_{\mathfrak{D}}(B_-)<\infty$．即 $B\in c_1$．证毕．

(4) 设 $A\in c_1(\mathfrak{D})$，$B\in\mathscr{L}(\mathfrak{D})$，则 AB，BA 都属于 $c_1(\mathfrak{D})$，而且

$$\operatorname{tr}_{\mathfrak{D}}(AB)=\operatorname{tr}_{\mathfrak{D}}(BA) \tag{1.7}$$

证 不妨设 $A\geqslant 0$，不然的话先把 A 分解成实部和虚部，再把实部和虚部分别分解为正部分和负部分就行了。

任取 $\mathfrak{D}$ 中完备就范直交系 $\{e_n\}$，由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(ABe_n, e_n)|=\sum_{n=1}^{\infty}|(A^{1/2}Be_n, A^{1/2}e_n)|$$

$$\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|A^{1/2}e_n\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|A^{1/2}Be_n\|^2\right)^{1/2}. \tag{1.8}$$

然而 $\sum_{n=1}^{\infty}\|A^{1/2}e_n\|^2=\sum_n(Ae_n, e_n)=\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(A)<\infty$。记 $C=B^*A^{1/2}$，设 $\{g_n\}$ 为 $\mathfrak{D}$ 中完备就范直交系，而且

$$Ag_n=\lambda_n g_n,$$

那么

$$\mathrm{tr}(C^*C)=\sum_n(A^{1/2}B^*BA^{1/2}g_n, g_n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\|Bg_n\|^2<\infty,$$

由性质 (2)，我们知道

$$\sum_n\|A^{1/2}Be_n\|^2=\mathrm{tr}(CC^*)<\infty.$$

由是 (1.8) 中级数收敛，由性质 (3) 可知 $BA\in c_1$，同样地 $AB\in C_1$。因此

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(AB)=\sum_n(ABg_n,g_n)=\sum_n(Bg_n,Ag_n)$$

$$=\sum_n\lambda_n(Bg_n, g_n)=\sum_n(B\lambda_n g_n, g_n)$$

$$=\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(BA).$$

证毕。

由性质 (4) 可知，只要 A，B 中有一个为迹类，则

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}([A,B])=0.$$

(5) 设 V 为 $\mathfrak{D}$ 到 $\mathfrak{D}_1$ 上的酉算子，$C\in c_1(\mathfrak{D})$，则 $VCV^{-1}\in$

$C_1(\mathfrak{D}_1)$，而且

$$\operatorname{tr}_{\mathfrak{D}_1}(VCV^{-1}) = \operatorname{tr}_{\mathfrak{D}}(C). \tag{1.9}$$

证 不妨设 $C \geqslant 0$，令 $A = C^{1/2}V^{-1}$，则由性质 (2) 推出性质 (5).

(6) 设 $\{A_n\} \in \mathscr{L}(\mathfrak{D})$，而且 $0 \leqslant A_1 \leqslant A_2 \leqslant \cdots \leqslant A_n \leqslant \cdots$，$A \in \mathscr{L}(\mathfrak{D})$ 而且

$$A = S - \lim_{n\to\infty} A_n$$

那么

$$\operatorname{tr}_{\mathfrak{D}}(A) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{tr}_{\mathfrak{D}}(A_n). \tag{1.10}$$

证 由于 $A \geqslant A_n$，因此 $\operatorname{tr}_{\mathfrak{D}} = (A) \geqslant \operatorname{tr}_{\mathfrak{D}}(A_n)$. 从而

$$\operatorname{tr}_{\mathfrak{D}}(A) \geqslant \lim_{n\to\infty} \operatorname{tr}_{\mathfrak{D}}(A_n). \tag{1.11}$$

另一方面，任取 $\mathfrak{D}$ 中一列完备就范直交系 $\{e_n\}$，则

$$\sum_{n=1}^{N} (Ae_n e_n) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (A_m e_n, e_n) \leqslant \lim_{m\to\infty} \operatorname{tr}_{\mathfrak{D}}(A_m).$$

再令 $N \to \infty$ 即得

$$\operatorname{tr}_{\mathfrak{D}}(A) \leqslant \lim_{m\to\infty} \operatorname{tr}_{\mathfrak{D}}(A_m).$$

把它和 (1.11) 结合即得 (1.10).

§2 主函数与迹公式

1. 亚正常算子 在第五章我们研究过亚正常算子 T 的精刻函数 $B_T(\cdot,\cdot)$，由于 $B_T(\cdot,\cdot) \geqslant 0$，对任何固定的 λ 和 t，$\operatorname{tr}_{\mathfrak{D}}(B(\lambda, t))$ 有意义，我们定义

$$g(\lambda, t) = \operatorname{tr}_{\mathfrak{D}}(B(\lambda, t)).$$

那么 $0 \leqslant g(\lambda, t) \leqslant \infty$. 称 $g(\cdot,\cdot)$ 为亚正常算子 T 的主函数 (Principle function). 有的文献中也称这为 Pincus 函数由于

$$g(\lambda, t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (B(\lambda, t)e_n, e_n),$$

而 $B(\cdot,\cdot)$ 是二元可测函数，所以 $g(\cdot,\cdot)$ 也是二元可测函数. 由于 $g(\lambda,t)=0$ 等价于 $B(\lambda,t)=0$，由定理 V，3.2，$g(\cdot,\cdot)$ 的本性支集含在 $\sigma(T)$ 中，而且当 T 为完全非正常的亚正常算子时，$g(\cdot,\cdot)$ 的本性支集就是 $\sigma(T)$.

定理 2.1 设 T 为亚正常算子，则 T 的主函数 $g_T(\cdot,\cdot)$ 与 T 的具体模型的选取无关. 若 T 和 T_1 是两个相互酉等价的亚正常算子，那么

$$g_T(\lambda,t)=g_{T_1}(\lambda,t). \tag{2.1}$$

证 我们不妨设 T 和 T_1 都是完全非正常的. U 为酉算子，而 $T_1=UTU^{-1}$. 我们把 T 与 T_1 的卡狄生分解记为

$$T=X+iY,\quad T_1=X_1+iY_1.$$

那么由 $X_1=UXU^{-1}$ 可知 $\sigma(X_1)=\sigma(X)$. 所以 T 与 T_1 的奇异积分模型中函数的自变数都在 $E=\sigma(X)=\sigma(X_1)$ 中. 我们把 T_1 的模型中相应的量都附以足标 1，如 $\mathfrak{D}_1$，$\alpha_1(\cdot)$，$\beta_1(\cdot)$，$\cdots$ 等，由于

$$X_1U=UX,$$

类似于引理 III，2.3，我们可以证明存在酉算子值的可测函数 $U(x)$ 使

$$(Uf)(x)=U(x)f(x).$$

因为 $US_x^-(Y)U^{-1}=S_{x_1}^{-1}(Y_1)$，$U(S_x^+(Y)-S_x^-(Y))U^{-1}=S_{x_1}^+(Y_1)-S_{x_1}^-(Y_1)$，我们得到

$$U(x)\beta(x)U(x)^{-1}=\beta(x),\quad U(x)\alpha(x)U(x)^{-1}=\beta_1(x).$$

这样一来，由 (V，2.27)，

$$\begin{aligned}\int\phi(t)B_1(\lambda,t)dt&=\alpha_1(\lambda)\int_0^1\phi(\beta_1(\lambda)+k\alpha_1(\lambda)^2)dk\alpha_1(\lambda)\\&=U(\lambda)\left[\alpha(\lambda)\int_0^1\phi(\beta(\lambda)+k\alpha(\lambda)^2)dk\alpha(\lambda)U(\lambda)^{-1}\right.\\&=\int\phi(t)U(\lambda)B(\lambda,t)U(\lambda)^{-1}dt.\end{aligned}$$

因此我们得到

$$B_1(\lambda,t)=U(\lambda)B(\lambda,t)U(\lambda)^{-1}, \tag{2.2}$$

从 (1.9) 知道

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}_1}(B_1(\lambda,t))=\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(B(\lambda,t)).$$

定理的其余部分可立即知道。证毕.

从 §VI, 1 知道，当 $\varphi\in P(E)$ 时，φ 有表达式 (VI, 1.7)，现在我们考察 $P(E)$ 中如下的函数 φ：它不但形如 (VI, 1.7)，而且

$$\varphi'(t)=\alpha+\int\frac{d\mu(x)}{(t-x)^2}<+\infty. \tag{2.3}$$

这种函数全体记为 $PM(E)$. 我们注意当 E 是开集时，$P(E)=PM(E)$.

定理 2.2 设 $X=X_1+iX_2\in HN$. 如果 $\varphi_j(\cdot)\in PM(\sigma(x_j))$, $j=1,2$. 而且是有界的. 那么

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}_{\mathscr{H}}(i[\varphi_1(X_1),\varphi_2(X_2)])\\&\quad=\frac{1}{2\pi}\iint\varphi_1'(\lambda_1)\varphi_2'(\lambda_2)g(\lambda_1,\lambda_2)d\lambda_1d\lambda_2,\end{aligned} \tag{2.4}$$

而且 $[\varphi_1(X_1),\varphi_2(X_2)]\in c_1$ 的充要条件是

$$\iint\varphi_1'(\lambda_1)\varphi_2'(\lambda_2)g(\lambda_1,\lambda_2)d\lambda_1d\lambda_2<+\infty. \tag{2.5}$$

我们注意 (2.5) 中被积函数 $\varphi_1'(\lambda_1)\varphi_2'(\lambda_2)g(\lambda_1,\lambda_2)$ 是非负的可测函数，但函数值可以在一正测度集上为∞. 因此 (2.5) 右边的积分总有确定意义，但可能为∞. 当且仅当此函数几乎处处有限而且是 Lebesgne 可积函数时，(2.5) 右边的积分是有限的.

证 设 (2.5) 成立. 由 Fubini 定理，对于几乎所有的使 $\varphi_1'(\lambda_1)\neq 0$ 的点 λ_1，我们有

$$\int\varphi_2'(\lambda_2)g(\lambda_1,\lambda_2)d\lambda_2<+\infty. \tag{2.6}$$

由于 $\varphi_2\in PM(E)$，可知 φ_2' 有如下表达式

$$\varphi_2'(t)=\int_F\frac{d\xi(l)}{(l-t)^2}+c,$$

其中 $F=R'-\sigma(X_2)$，$c\geqslant 0$ 为常数，$\xi(\cdot)$ 为非负测度. 由(2.3)可知

$$\varphi(t)=ct+\beta+\int_F\left(\frac{1}{x-\lambda}-\frac{x}{1+x^2}\right)d\xi(x) \tag{2.7}$$

将 $\varphi_\lambda^i(\cdot)$ 的表达式代入 (2.6) 就知道对测度 μ 几乎所有 l 成立着

$$\int \frac{g(\lambda_1, t)dt}{(l-t)^2} < +\infty. \tag{2.8}$$

因此对 (2.8) 的 λ_1 和 l，利用 Levi 引理我们有

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}\left(\int \frac{B(\lambda_1, t)}{(l-t)^2}\,dt\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int \frac{B(\lambda_1, t)}{(l-t)^2}\,dt\,e_n,\ e_n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int \frac{(B(\lambda, t)e_n, e_n)}{(l-t)^2}\,dt = \int \frac{g(\lambda_1, t)dt}{(l-t)^2} < +\infty. \tag{2.9}$$

同样地，由 (V, 2.27)，我们有

$$\int_0^1 \mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(\alpha(\lambda_1)(\beta(\lambda_1) + k\alpha(\lambda_1)^2 - l)^{-2}\alpha(\lambda_1))dk$$

$$= \mathrm{tr}\left(\int \frac{B(\lambda_1, t)}{(t-l)^2} < \infty\right). \tag{2.10}$$

因此对几乎所有的 $k \in [0, 1]$，我们得到

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(\alpha(\lambda_1)(\beta(\lambda_1) + k\alpha(\alpha_1)^2 - l))^{-2}\alpha(\lambda_1)) < +\infty.$$

利用 §1 的性质 (2) 中的 (1.4)，我们得到

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}((\beta + k\alpha^2 - l)^{-1}\alpha^2(\beta + k\alpha^2 - l)^{-1})$$
$$= \mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(\alpha(\beta + k\alpha^2 - l)^{-2}\alpha), \tag{2.11}$$

因此

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}\left(\int \frac{B(\lambda_1, t)dt}{(t-l)^2}\right) = \mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}\left(\int_0^1 (\beta(\lambda_1) + k\alpha(\lambda_1)^2\right.$$

$$\left. - l)^{-1}\alpha(\lambda_1)^2(\beta(\lambda_1) + k\alpha(\lambda_1)^2 - l)^{-1}dk\right).$$

然而

$$\int_0^1 (\beta + k\alpha^2 - l)^{-1}\alpha^2(\beta + k\alpha^2 - l)^{-1}dk$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\beta + \frac{\nu}{n}\alpha^2 - l\right)^{-1}\alpha^2\left(\beta + \frac{\nu-1}{n}\alpha^2 - l\right)^{-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\left(l - \left(\beta + \frac{\nu}{n}\alpha^2\right)\right)^{-1} - \left(l - \left(\beta + \frac{\nu-1}{n}\alpha^2\right)\right)^2$$

$$= (l - \beta(\lambda_1) + \alpha(\lambda_1)^2)^{-1} - (l - \beta(\lambda_1))^{-1}. \tag{2.12}$$

因此对于满足 (2.8) 的 λ_1 及 l，算子 $(l-(\beta(\lambda_1)+\alpha(\lambda_1)^2))^{-1}-(l-\beta(\lambda_1))^{-1}$ 属于 c_1 而且由 (2.9—12) 可知

$$\operatorname{tr}_{\mathfrak{D}}((l-(\beta(\lambda_1)+\alpha(\lambda_1))^2)^{-1}-(l-\beta(\lambda_1))^{-1})$$

$$=\int \frac{g(\lambda_1,t)}{(l-t)^2}dt. \qquad (2.13)$$

另一方面，由于 $\int B(\lambda_1,t)dt=\alpha(\lambda_1)^2$，所以

$$\int g(\lambda_1,t)dt=\operatorname{tr}_{\mathfrak{D}}((\beta(\lambda_1)+\alpha(\lambda_1)^2)-\beta(\lambda_1)).$$

这样一来，就由 (2.3)，(2.7) 和 (2.13) 得到

$$\int \varphi_2'(\lambda_2)g(\lambda_1,\lambda_2)d\lambda_2$$

$$=\operatorname{tr}_{\mathfrak{D}}(\varphi_2(\beta(\lambda_1)+\alpha(\lambda_1)^2)-\varphi_2(\beta(\lambda_1)). \qquad (2.14)$$

(2) 记 $X_2'=\varphi_2(X_2)$，由于 φ_2 是 Pick 函数，根据定理 VI. 1.2 $X_1+iX_2'\in HN$. 我们如果记

$$\alpha_1(\lambda_1)^2=S^{+}_{X_1}(X_2')-S^{-}_{X_1}(X_2').$$

那么由于系 II，1.3

$$S^{\pm}_{X_1}(\varphi_2(X_2))=\varphi_2(S^{\pm}_{X_1}(X_2)).$$

我们得到

$$\alpha_1(\lambda_1)^2=\varphi_2(\beta(\lambda_1)+\alpha(\lambda_1)^2)-\varphi_2(\beta(\lambda_1)).$$

由 (2.5) 和 (2.14) 可知

$$\int \varphi_1'(\lambda_1)\operatorname{tr}_{\mathfrak{D}}(\alpha_1(\lambda_1)^2)d\lambda_1$$

$$=\iint \varphi_1'(\lambda_1)\varphi_2'(\lambda_2)g(\lambda_1,\lambda_2)d\lambda_1 d\lambda_2<\infty. \qquad (2.15)$$

(3) 从定理 VI，1.2 的证明过程以及 $\varphi'(t)$ 几乎处处存在可以看出

$$(i[\varphi_1(X_1),X_2']f,f)=\frac{1}{2\pi}\iint\frac{\varphi_1(x)-\varphi_1(y)}{x-y}$$

$$\times(\alpha_1(x)f(x),\alpha_1(y)f(y))dxdy. \qquad (2.16)$$

由于

$$\frac{\varphi_1(x)-\varphi_1(y)}{x-y}=c+\int_F\frac{1}{\lambda-x}\frac{1}{\lambda-y}d\xi(\lambda),$$

所以

$$(i[\varphi_1(X_1), X_2']f, f) = c\left\|\int \alpha(x)f(x)dx\right\|_{\mathfrak{D}}^2$$

$$+\int\left\|\int \frac{\alpha(x)f(x)}{\lambda - x}dx\right\|^2 d\xi(\lambda), \qquad (2.17)$$

现在来计算算子 Q 的迹，其中

$$(Qf, f) = \left\|\int \alpha(x)f(x)dx\right\|_{\mathfrak{D}}^2.$$

由于 $Q \geqslant 0$，我们计算它的迹时，可以任意选取 $\mathscr{H}$ 中完备就范直交系．我们先取 $\mathfrak{D}$ 中完备就范直交系 $\{e_n\}$（不妨设 $\mathfrak{D}$ 为可列无限维的）．再取 $L^2(\sigma(X_1), \beta, m)$ 中完备就范直交系 $\{h_n(\cdot)\}$，那么 $\{e_m h_n(\cdot): m, n = 1, 2, \cdots\}$ 成为 $\mathscr{H}$ 中的完备就范直交系．我们令 P_n 为由 $\mathfrak{D}$ 到 $\overline{V\{e_1, \cdots, e_n\}}$ 的投影算子，作算子 Q_n 如下，

$$(Q_n f, f) = \left\|\int P_n\alpha(x)P_n f(x)dx\right\|_{\mathfrak{D}}^2 \qquad (2.18)$$

显然 $Q_1 \leqslant Q_2 \leqslant \cdots \leqslant Q_n \leqslant \cdots$，而且 $Q = S - \lim Q_n$．因此

$$\operatorname{tr}_{\mathscr{H}}(Q) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{tr}_{\mathscr{H}}(Q_n). \qquad (2.19)$$

这时 $\alpha_n(x) = P_n\alpha(x)P_n$ 可以看成 n-维矩阵值的函数，因此若记

$$(f(x), e_j) = f_j(x), \quad (\alpha_n(x)e_k, e_j) = \alpha_{k,j}^{(n)}(x),$$

那么 (2.18) 化成

$$(Q_n f, f) = \sum_{j=1}^n \left|\int \sum_{k=1}^n \alpha_{k,j}^{(n)}(x)f_k(x)dx\right|^2.$$

因此我们只要对取值于 $P_n\mathfrak{D}$ 的函数 f 来考察，而上述算子 Q_n 又可以化成如下的算子 $Q_{n,j}$

$$(Q_{n,j}f, f) = \left|\sum_{k=1}^n \int \alpha_{k,j}^{(n)}(x)f_k(x)dx\right|^2$$

的和来考察，于是容易算出

$$\operatorname{tr}_{\mathscr{H}}(Q_{n,j}) = \sum_{k=1}^n \int |\alpha_{k,j}^{(n)}(x)|^2 dx.$$

所以

$$\mathrm{tr}_{\mathscr{H}}(Q_n) = \int \left| \sum_{k,j} \alpha_{kj}^{(n)}(x) \right|^2 dx = \int \mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}((P_n\alpha(x)P_n)^2)dx.$$

由 (2.19) 得

$$\mathrm{tr}_{\mathscr{H}}(Q) = \int \mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(\alpha(x)^2)dx. \tag{2.20}$$

类似地，如果 A_λ 表示算子

$$(A_\lambda f, f) = \int \left\| \frac{\alpha(x)f(x)}{\lambda - x} \right\|^2 dx,$$

那么

$$\mathrm{tr}(A_\lambda) = \int \frac{1}{(\lambda - x)^2} \mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(\alpha(x)^2)dx,$$

再由 (2.17) 和 (2.20) 和迹的性质 (6) 可知

$$\mathrm{tr}_{\mathscr{H}}(i[\varphi_1(X_1), X_2']) = c\,\mathrm{tr}_{\mathscr{H}}(Q) + \int_F \mathrm{tr}(A_\lambda)d\xi(\lambda) = \int \varphi_1'(x)\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(\alpha_1(x)^2)dx. \tag{2.21}$$

再由 (2.5) 和 (2.15) 得到 (2.4)，而且

$$i[\varphi_1(X_1), \varphi_2(X_2)] \in c_1.$$

(4) 反之，若 $i[\varphi_1(X_1), \varphi_2(X_2)] \in c_1$. 仍然用前面的记号. 这时 (2.16) 和 (2.21) 仍成立. 因此

$$\int \varphi_1'(x)\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(\alpha_1(x)^2)dx < \infty,$$

于是

$$\int \varphi_1'(x)\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(\varphi_2(\beta(x) + \alpha(x)^2) - \varphi_2(\beta(x)))dx < \infty.$$

利用 φ_2 的表达式及 (2.12)

$$\int \varphi_1'(x) c\,\mathrm{tr}(\alpha(x)^2)dx + \iint \int_0^1 \varphi_1'(x)\,\mathrm{tr}((\beta(x) + k\alpha(x)^2 - l)^{-1}\alpha(x)^2(\beta(x) + k\alpha(x)^2 - l)^{-1} \cdot dk dx d\xi(l) < \infty,$$

由 (2.11) 我们就可得到 (2.5). 证毕.

2. 半亚正常算子 类似于亚正常算子的情况，当 $T \in SHU$ 时，定义

$$g_T^p(e^{i\theta},\rho)=\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(B_T(e^{i\theta},\rho)),$$

为算子T的主函数，其中$B_T(\cdot,\cdot)$为T的精刻函数. 我们可以证明关于半亚正常算子的主函数和迹公式的相应的定理.

定理 2.3 设 $T\in SHU$，则T的主函数$g_T^p(\cdot,\cdot)$与T的具体模型无关. 如果T, $T_1\in SHU$且它们彼此酉等价，那么

$$g_T^p(e^{i\theta},\rho)=g_{T_1}^p(e^{i\theta},\rho).$$

定理 2.4 设 $T=U|T|\in SHU$，E为C_1中包含$\sigma(U)$的一个开集，设$\varphi\in B_0(E)$, $\phi\in PM(\sigma(|T|))$, 那么

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}_{\mathscr{H}}(\phi(|T|)-\varphi(U)\phi(|T|)\varphi(U)^*)\\&=\iint\frac{d}{d\theta}\arg\varphi(e^{i\theta})\phi'(\rho)g_T^p(e^{i\theta},\rho)d\theta d\rho.\end{aligned}$$

而且$[\varphi(U),\phi(|T|)]\in c_1(\mathscr{H})$的充要条件是上式右边的积分为有限.

§3 近似正常算子的迹公式

1 折叠性双线性泛函

我们现在考察一类特殊的亚正常算子，设$T\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$，如

$$D_T=[T^*,T]\in c_1,$$

我们就称T为近似正常算子. 我们令$\mathfrak{P}_2$表示两元多项式全体所成的线性空间. 我们取定$T=X+iY\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$, 其中$X$, Y为自共轭的. 对每个$p(\cdot,\cdot)\in\mathfrak{P}_2$,

$$p(x,y)=\Sigma a_{ij}x^iy^j,$$

我们作相应的算子

$$p(X,Y)=\Sigma a_{ij}X^iY^j,\tag{3.1}$$

这里注意，暂时我们取定了乘法顺序，凡X都在Y左边. 又设T为近似正常算子，这时$[X,Y]\in c_1$. 由§1 迹的性质可知当$p,q\in\mathfrak{P}_2$时，算子$i[p(X,Y),q(X,Y)]\in c_1$. 因此我们可以定义$\mathfrak{P}_2$上的一个双线性泛函

$$(p,q)=\mathrm{tr}_{\mathscr{H}}(i[p(X,Y),q(X,Y)]),\quad p,q\in\mathfrak{P}.\tag{3.2}$$

我们注意 (3.2) 中算子多项式 $p(X, Y)$ 和 $q(X, Y)$ 的每个单项，如果改变乘法次序，所得的 (p, q) 的值并不改变。事实我们只要考察 $p(X, Y)$ 为 X^mY^n 或 $X^{m-1}YXY^{n-1}$ 的情况。这时，

$$\begin{aligned}&\operatorname{tr}(i[X^mY^n, q(X, Y)]) - \operatorname{tr}(i[X^{m-1}YXY^{n-1}, q(X, Y)]) \\ &\quad = \operatorname{tr}(iX^{m-1}[X, Y]Y^{n-1}, q(X, Y)]).\end{aligned}$$

然而由于 $[X, Y] \in c_1$，根据迹的性质 (4)，$X^{m-1}[X, Y]Y^{n-1} \in c_1$，再由 (1.7) 式可知上式为零。

这样定义的双线性泛函还有如下的折叠性：我们令 $\mathfrak{P}_1$ 为一元多项式全体，当 $p \in \mathfrak{P}_1$，$r \in \mathfrak{P}_2$ 时，规定 $p\circ r$ 为

$$p\circ r(x, y) = p(r(x, y)) \in \mathfrak{P}_2.$$

("$\circ$"表示函数的复合)。由于 $p\circ r(X, Y)$ 与 $q\circ r(X, Y)$ 交换，所以

$$(p\circ r, q\circ r) = 0, \quad p, q \in \mathfrak{P}_1, r \in \mathfrak{P}_2. \tag{3.3}$$

称 (3.3) 为双线性泛函 (3.2) 的折叠性。

对于折叠性泛函 (3.2) 有如下重要定理。

定理 3.1 设 $(\cdot, \cdot)$ 为 $\mathfrak{P}_2$ 上的双线性折叠性泛函。则必有 $\mathfrak{P}_2$ 上唯一的线性泛函 l 使

$$(p, q) = l(J(p, q)), \quad p, q \in \mathfrak{P}_2.$$

此地 $J(p, q)$ 为 Jacobian $\dfrac{\partial p}{\partial x}\dfrac{\partial q}{\partial y} - \dfrac{\partial q}{\partial x}\dfrac{\partial p}{\partial y}$.

证 唯一性是显然的。今证存在性。

当 $q \in \mathfrak{P}_2$ 时，任取 Q，使 $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = q$。我们注意这时 (x, Q) 仅依赖于 q，而与 Q 的选取无关。事实上，设 Q_1，Q_2 满足

$$\frac{\partial Q_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_2}{\partial y} = q.$$

那么 $Q_0 = Q_1 - Q_2$ 仅为变元 x 的多项式，因此 $Q_0(X)$ 与 X 交换，即 $(x, Q_1 - Q_2) = 0$. 所以我们可以定义 $\mathfrak{P}_2$ 上泛函 l 如下

$$l(q) = (x, Q).$$

显然 $l(J(\cdot, \cdot))$ 也具有折叠性。我们只要证明折叠性双线性泛函

$$(\cdot,\cdot)_1=(\cdot,\cdot)-l(J(\cdot,\cdot))$$

恒为零就好了.

首先注意

$$(x,q)_1=0,\quad q\in\mathfrak{P}_2. \tag{3.4}$$

我们还要说明当 $r,s\in\mathfrak{P}_2$, 而且对一切 $q\in\mathfrak{P}_2$,

$$(r,q)_1=(s,q)_1=0 \tag{3.5}$$

时,那么

$$(rs,q)_1=0. \tag{3.6}$$

事实上,任取复数 $\alpha,\beta,q\in\mathfrak{P}_2$, 由 $(\cdot,\cdot)_1$ 的折叠性可知

$$((\alpha r+\beta s+q)^2,(\alpha r+\beta s+q))_1=0.$$

利用 (3.5) 和折叠性可知上式展开后变为

$$\alpha^2(r^2,q)_1+\beta^2(s^2,q)_1+2\alpha\beta(rs,q)_1+2\alpha(rq,q)_1$$
$$+2\beta(sq,q)_1=0$$

由于 α 及 β 的任意性,可知上式 $\alpha\beta$ 的系数应为 0, 即得 (3.6).

再则,若 α 为任意复数, $n\geqslant 1$, 由折叠性和 (3.4) 可知

$$0=((y+\alpha x),(y+\alpha x)^n)_1$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\alpha^j(y,x^jy^{n-j})_1$$

由此知

$$(y,x^jy^{n-j})_1=0,\quad j=1,2,\cdots,n=1,2,\cdots$$

所以对一切 $q\in\mathfrak{P}_2$ 都有 $(y,q)_1=0$. 再根据 (3.4), 又在 (3.5—6) 中取 $r=x,s=y$, 即得 $(xy,q)_1=0$. 再利用 (3.5—6), 其中取 $r=x,s=xy$, 又得 $(x^2y,q)_1=0$. 反复运用上述手续即知

$$(\cdot,\cdot)_1\equiv 0.$$

证毕.

2. 近似正常的亚正常算子迹公式

定理 3.2 设 $T=X+iY$ 为近似正常的亚正常算子. 那么

$$\operatorname{tr}_{\mathscr{H}}(i[p(X,Y),q(X,Y)])$$
$$=\frac{1}{2\pi}\iint_{\sigma(T)}J(p,q)g_T(x,y)\,dxdy,\quad p,q\in\mathfrak{P}_2 \tag{3.7}$$

证 我们用定理 2.2，任取实数 λ, μ，使 $|\lambda|$, $|\mu|$ 充分大，作 $\varphi_1(x)=(\lambda-x)^{-1}$, $\varphi_2(x)=(\mu-x)^{-1}$. 则 $\varphi_1\in pM(\sigma(X))$, $\varphi_2\in pM(\sigma(Y))$. 由于迹的性质 (4)，

$$[\varphi_1(X),\varphi_2(Y)]=(\lambda I-X)^{-1}(\mu I-Y)^{-1}[X,Y](\mu I-Y)^{-1}(\lambda I-X)^{-1}\in c_1$$

根据 (2.4) 得

$$\operatorname{tr}_{\mathscr{H}}(i[(\lambda I-X)^{-1},(\mu I-Y)^{-1}])=\frac{1}{2\pi}\iint_{\sigma(T)}\frac{g(x,y)dxdy}{(\lambda-x)^2(\mu-y)^2}, \tag{3.8}$$

把上式两边在 $|\lambda|>\|T\|$, $|\mu|>\|T\|$ 中展开为 Laurent 级数，我们注意，若 $\{e_n\}$ 为全连续自共轭算子 $i[X,Y]\in c_1$ 的完备就范直交的特征向量系，λ_n 为其相应的特征值，则 $\lambda_n\geqslant 0$，且 $\sum_n\lambda_n$ 收敛。因此

$$\begin{aligned}&\operatorname{tr}_{\mathscr{H}}(i[(\lambda I-X)^{-1},(\mu I-Y)^{-1}])\\&\quad=\operatorname{tr}_{\mathscr{H}}((\mu I-Y)^{-1}(\lambda I-X)^{-2}(\mu I-Y)^{-1}i[X,Y])\\&\quad=\sum_n\lambda_n((\mu I-Y)^{-1}(\lambda I-X)^{-2}(\mu I-Y)^{-1}e_n,e_n),\end{aligned}$$

把它展开后利用 $\Sigma\lambda_n<\infty$ 即知

$$\operatorname{tr}_{\mathscr{H}}i[(\lambda I-X)^{-1},(\mu I-Y)^{-1}]=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\operatorname{tr}_{\mathscr{H}}i[X^m,Y^n]}{\lambda^{m+1}\mu^{n+1}}.$$

比较 Lourent 展开式的系数后得知

$$l(J(x^m,y^n))=\operatorname{tr}_{\mathscr{H}}i[X^m,Y^n]=\frac{1}{2\pi}\iint mnx^{m-1}y^{n-1}g(x,y)dxdy. \tag{3.9}$$

由于单项式全体张成 $\mathfrak{P}_2$，所以

$$l(J(p,q))=\frac{1}{2\pi}\iint J(p,q)g(x,y)dxdy.$$

由定理 3.1 及 (3.9) 即得 (3.7)。证毕。

3. 近似正常的半亚正常算子的迹公式

我们令 $\mathfrak{P}_p$ 为如下的二元多项式全体.

$$p(\rho,\zeta)=\sum_{i=0}^{N}\cdot\sum_{j=-N}^{N}a_{ij}\rho^i\zeta^j. \tag{3.10}$$

其中 N 为正整数，a_{ij} 为常系数，设 $T=U|T|\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$，而且在此极分解中 U 为酉算子，当 $p\in\mathfrak{P}_p$ 且形如 (3.10) 时，我们规定

$$p(|T|,U)=\sum_{i,j}a_{ij}|T|^iU^j.$$

如果 T 是近似正常的，那么当 $p,q\in\mathfrak{P}_p$ 时，

$$[p(|T|,U),q(|T|,U)]\in c_1, \tag{3.11}$$

而且 $\mathrm{tr}_{\mathscr{H}}([p(|T|,U),q(|T|,U)])$ 的值对于 $p(|T|,U)$，$q(|T|,U)$ 中因子 $|T|$，U 的乘的顺序交换无关. 我们又定义

$$J_p(p,q)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial p(\rho,e^{i\theta})}{\partial\rho}, & \dfrac{\partial p(\rho,e^{i\theta})}{\partial e^{i\theta}}\\ \dfrac{\partial q(\rho,e^{i\theta})}{\partial\rho}, & \dfrac{\partial q(\rho,e^{i\theta})}{\partial e^{i\theta}}\end{pmatrix}.$$

定理 3.3 设 $T=U|T|\in SHU$，而且又是近似正常的. 如果 $p,q\in\mathfrak{P}_p$，那么 (3.11) 成立，而且

$$\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}}[p(|T|,U),q(|T|,U)]$$
$$=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\rho e^{i\theta}\in\sigma(T)}J_p(p,q)g_T^p(e^{i\theta},\rho)d\rho d\theta.$$

§4 主函数与行列式

我们现在要利用迹公式，由主函数表示某些函数的行列式.

1. 行列式的定义和性质

设 $A\in\mathscr{L}(\mathfrak{D})$，$A-I\in c_1$. 而且 $A^{-1}\in\mathscr{L}(\mathfrak{D})$，这种算子 A 的全体记为 $D_1(\mathfrak{D})$. 我们仿照有限维矩阵的行列式的定义，规定 $A\in D_1(\mathfrak{D})$ 的行列式. 设 $A\in D_1(\mathfrak{D})$ 的特征值全体为 $\{\lambda_n\}$，其中当特征值 λ_n 的重复度为 m 时，λ_n 在此数列中出现 m 次. 由于 $A^{-1}\in\mathscr{L}(\mathfrak{D})$，所以 $\lambda_n\neq 0$，我们定义

$$\det_{\mathfrak{D}} A = \prod_n \lambda_n. \tag{4.1}$$

有时我们简记为 $\det A$. 由于 $A - I \in c_1$, 我们可知

$$\sum_n |\lambda_n - 1| < \infty.$$

因此 (4.1) 右边收敛，而且不为 0. 至于行列式有如下的一些性质:

(1) 如果 $A \in D_1(\mathfrak{D})$, $B \in \mathscr{L}(\mathfrak{D})$ 而且 $B^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{D})$, 那么 $BAB^{-1} \in D_1(\mathfrak{D})$, 而且

$$\det(BAB^{-1}) = \det A. \tag{4.2}$$

(2) 如果 $A, B \in \mathscr{L}(\mathfrak{D})$, $AB \in D_1(\mathfrak{D})$, 而且 $B^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{D})$, 那么 $BA \in D_1(\mathfrak{D})$, 而且

$$\det(AB) = \det(BA). \tag{4.3}$$

证 由性质 (1), 可知 $BA = B(AB)B^{-1} \in D_1(\mathfrak{D})$, 由 (4.2) 可知 (4.3) 成立.

引理 4.1 设 $u, v \in \mathscr{L}(\mathfrak{D})$, 而且 $[u, v] \in c_1$, 那么 $\{e^u, e^v\}$[1] 属于 $D_1(\mathfrak{D})$, 而且

$$\det(\{e^u, e^v\}) = e^{\operatorname{tr}[u, v]}, \tag{4.4}$$

证 (1) 由于 $[u, v] \in c_1$ 易知 $[e^u, e^v] \in c_1$. 因此

$$\{e^u, e^v\} - I = [e^u, e^v]e^{-u}e^{-v} \in c_1.$$

由此可知 $A = \{e^u, e^v\} \in D_1(\mathfrak{D})$.

(2) 我们再来证明

$$\det\{e^{2u}, e^{2v}\} = (\det\{e^u, e^v\})^4. \tag{4.5}$$

事实上 $\{e^{2u}, e^{2v}\} = e^u A e^v e^u e^v e^{-2u} e^{-2v}$, (其中 $A = \{e^u, e^v\}$). 那么由性质 (1) 及 (2) 可知

$$\begin{aligned} \det(\{e^{2u}, e^{2v}\}) &= \det(Ae^v e^u e^v e^{-2u} e^{-2v} e^u) \\ &= \det A \cdot \det(e^u e^v e^u e^v e^{-2u} e^{-2v}) \end{aligned} \tag{4.6}$$

因此 $\{e^{2u}, e^{2v}\}$ 中相邻的两因子乘积 $e^u e^v$ 交换成 $e^v e^u$ 后出来一个

1) 此地如第五章一样，用 $\{A, B\}$ 表示乘法交换子 $ABA^{-1}B^{-1}$.

因子 $\det A$. 再交换一次，(4.6) 成为

$$(\det A)^2 \det(e^u e^{2v} e^{-u} e^{-2v}).$$

如果是进行下去，就能得到 (4.5). 用 (4.5) n 次就可证明

$$\det(\{e^u, e^v\}) = [\det(\{e^{tu}, e^{tv}\})]^{1/t^2}, \tag{4.7}$$

其中 $t = 2^n$. 经过较复杂的计算可证明

$$\|\{e^{tu}, e^{tv}\}e^{-t^2[u,v]} - I\|_1 \leqslant ct^3, \quad t \to 0+$$

其中 c 为一正常数，仅依赖于 $\|u\|$, $\|v\|$ 和 $\|[u, v]\|$. 于是可知

$$[\det(\{e^{tu}, e^{tv}\})\det(e^{-t^2[u,v]})]^{1/t^2} \to 1. \quad t \to 0+$$

然而易知

$$(\det(e^{-t^2[u,v]}))^{-1/t^2} = e^{\mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}[u,v]},$$

这样就由 (4.7) 推出 (4.4). 证毕.

2. 表征函数的行列式

前面我们讨论过半亚正常算子的表征函数，现在我们对近似正常的半亚正常算子讨论它的行列式.

设 $T = U(T) \in SHU$，考察它的奇异积分模型，并且作出它的表征函数

$$W_l(e^{i\theta}) = I + \alpha(e^{i\theta})(\beta(e^{i\theta}) - le^{-i\theta})^{-1}\alpha(e^{i\theta}). \tag{4.8}$$

定理 4.2 设 $T = U|T| \in SHU$ 是近似正常的. 那么对几乎所有的 $e^{i\theta}$ 使

$$\det{}_{\mathfrak{D}}(W_l(e^{i\theta})) = e^{\int \frac{g^{B}(e^{i\theta},\rho)d\rho}{\rho - le^{-i\theta}}} \tag{4.9}$$

成立.

证 由于假设 $Q_T = |T| - U|T|U^* \in c_1(\mathscr{H})$, $Q_T \geqslant 0$ 和等式

$$T_{r\mathscr{H}}(Q_T) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{tr}_{\mathfrak{D}}(\alpha(e^{i\theta})^2)d\theta$$

得知对几乎所有的 $e^{i\theta}$, $\alpha(e^{i\theta}) \in c_1(\mathfrak{D})$, 由 (4.8) 可知对这种 $e^{i\theta}$, $W_l(e^{i\theta}) \in D_1(\mathfrak{D})$, 又由于精刻函数的定义

$$W_l(e^{i\theta}) = \exp\int \frac{B(e^{i\theta}, \rho)d\rho}{\rho - le^{-i\theta}},$$

如果 $\{\lambda_n\}$ 为算子 $\int\frac{B(e^{i\theta},\rho)}{\rho-le^{-i\theta}}d\rho$ 的完全特征值系，那么 $\{e^{\lambda_n}\}$ 成为 $W_l(e^{i\theta})$ 的完全特征值系，而且

$$\det(W_l(e^{i\theta}))=\prod_n e^{\lambda_n}=e^{\Sigma\lambda_n}$$

$$=e^{\int_{tr}\frac{B(e^{i\theta},\rho)d\rho}{\rho-le^{-i\theta}}}.$$

这就是 (4.9). 证毕.

3. 用主函数表示乘积交换子的行列式

我们先来考察亚正常算子的情况，利用引理 4.1 和定理 3.2，我们立即可以得到下述定理的前半部.

定理 4.3 设 $T=X+iY$ 为近似正常的亚正常算子，$p,q\in\mathfrak{P}_2$，那么 (1)

$$\det{}_{\mathscr{H}}(\{e^{p(X,Y)},\ e^{q(X,Y)}\})$$

$$=\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\iint_{\sigma(T)}J(p,q)\,g(x,y)dxdy\right).\qquad(4.10)$$

(2) 当 $l\bar{\in}\sigma(X)$, $z\bar{\in}\sigma(Y)$ 时，

$$\det(\{(X-l)^{-1},(Y-z)^{-1}\})$$

$$=\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\iint_{\sigma(T)}g\ (x,y)\frac{dx}{x-l}\frac{dy}{y-z}\right).\qquad(4.11)$$

至于 (4.11) 可以用这种方法来证明：可以证明 (4.10) 不仅当 p,q 为多项式，而且当 p,q 为足够光谱的函数成立. 例如取多项式来逼近就成. 这样只要取

$$p(x,y)=\log(x-l),\quad q(x,y)=\log(y-z)$$

由 (4.10) 推出 (4.11). 另外也可以用定理 V, 1.1 来证明. 其证明的梗概如下：我们把 (4.11) 左边记为 $F(l,z)$，我们只要证明

$$F(\lambda+i0,z)F(\lambda-i0,z)^{-1}=\exp\int\frac{g(\lambda,y)dy}{y-z}.\qquad(4.12)$$

那么就可以证明 (4.11) 成立了. 然而由 (V, 1.5) 和 Riemann-Hilbert 问题 (V, 1.14) 的解可知

$$\det R(\lambda, z) = F(\lambda + i0, z)F(\lambda - i0, z)^{-1}.$$

再由主函数的定义可知 $\det R(\lambda, z)$ 即为 (4.12) 的右边. 因此 (4.12) 成立，这样，(4.11) 也成立.

完全类似地对于半亚正常算子也有相应的定理.

定理 4.4 设 $T = U|T| \in SHU$ 是近似正常的，$p, q \in \mathfrak{P}_p$. 那么

(1)

$$\det_{\mathscr{H}}(\{e^{p(|T|,U)}, e^{q(|T|,U)}\}) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\sigma(T)} J_\rho(p, q)g^p(e^{i\theta}, \rho)d\rho d\theta\right).$$

(2) 当 $l \bar{\in} \sigma(|T|)$，$z \bar{\in} \sigma(U)$ 时，

$$\det_{\mathscr{H}}(\{(U - z)^{-1}, (|T| - l)^{-1}\}) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\sigma(T)} g^p(e^{i\theta}, \rho)\frac{d\rho}{\rho - l}\frac{d\theta}{e^{i\theta} - z}\right).$$

附录　压缩算子的谱分析

对于 Hilbert 空间上的压缩算子，Foiaç 及 Nagy 利用压缩算子的扩张，引进了特征函数及压缩算子的函数模型，并对压缩算子进行了系统的研究．我们这里比较直接地利用函数论的方法（与 Foiaç 和 Nagy 的方法不同）以较短的篇幅介绍了这方面的基本成果和某些新结果．由于处理方法和本书的主要内容有接近的地方，故作为附录列在此处．

在 §1 中，我们介绍特征函数及基本性质和它与压缩算子的谱论的联系．在 §2 中我们给出了压缩算子的函数模型．而在 §3 中我们给出了一般压缩算子的不变子空间与相应特征函数的因子分解之间的联系．但是希望读者注意，不仅我们所陈述的理论如何具有一般性，整个理论（包括 Foiaç 及 Nagy 的理论）实际上只是对在某种意义下接近酉算子或等距算子的压缩算子才显示出很有力．

§1　特 征 函 数

特征函数是研究压缩算子的有力工具．压缩算子的许多性质都反映在它的特征函数上．它是 Лившиц 就非自共轭算子首先引进的．其特点是利用预解式在某个适当的子空间上的限制来刻划算子．

1. 特征函数的定义

设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间，T 是 $\mathscr{H}$ 中的压缩算子，$\|T\| \leqslant 1$，由于 $I - T^*T$ 是半正定的，我们可以作出它的半正定平方根

$$D_T = (I - T^*T)^{1/2}.$$

有时也简记为 D．显然 D_T 也是压缩算子．由于 T^* 也是压缩算

子，因此也有半正定算子

$$D_{T^*}=(I-TT^*)^{1/2}.$$

而且 D_{T^*} 也是压缩的．有时简记 D_{T^*} 为 D_*．D_T 和 D_{T^*} 都称做 T 的亏算子．我们记

$$\mathfrak{D}_T=\overline{D_T\mathscr{H}},\quad \mathfrak{D}_{T^*}=\overline{D_{T^*}\mathscr{H}}.$$

有时分别简记为 $\mathfrak{D}$ 和 $\mathfrak{D}_*$．称它们是 T 的亏空间． 特别当 T 为等距算子时，$D_T=0$，$\mathfrak{D}_T=\{0\}$，而 $\mathfrak{D}_{T^*}=(T\mathfrak{D})^\perp$． T 是酉算子的充要条件是 $D_T=D_{T^*}=0$．

定义 设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的压缩算子，对单位圆 $|\lambda|<1$ 中每个复数 λ，作 $\mathfrak{D}_T$ 到 $\mathfrak{D}_{T^*}$ 中有界算子

$$\Theta_T(\lambda)=[-T+\lambda D_{T^*}(I-\lambda T^*)^{-1}D_T]|_{\mathfrak{D}_T}.$$

称算子值解析函数 $\Theta_T(\lambda)$，$|\lambda|<1$ 为 T 的特征函数． 有时简记它为 $\Theta(\cdot)$． 为了把算子 $\Theta_T(\lambda)$ 的定义域和值域所在的空间标出来，我们有时也把特征函数记为 $\{\mathfrak{D}_T,\mathfrak{D}_{T^*},\Theta(\cdot)\}$．

粗略地说，$\Theta_T(\lambda)$主要是利用预解式 $(T^*-\mu I)^{-1}$ 在 $\mathfrak{D}_T$ 上的限制的行为来刻划 T．

例如，当 T 为等距算子时，$\Theta(\cdot)\equiv 0$．

在上述定义中曾说 $\Theta_T(\lambda)\mathfrak{D}_T\subset\mathfrak{D}_{T^*}$，我们现在来证实这一点(见下面 (1.6) 的证明)，我们需要下面的一些引理．

引理 1.1 设 T 是压缩算子，那么

$$TD_T=D_{T^*}T. \tag{1.1}$$

证 由 $T(I-T^*T)=(I-T^*T)T$，容易看出对任何多项式 P 有

$$TP(D_T^2)=P(D_T^2)T. \tag{1.2}$$

成立．对于区间 $[0,1]$ 上连续函数 $\sqrt{t}$，有一列多项式 $P_n(t)$，$n=1,2,\cdots$使

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|P_n(t)-\sqrt{t}|\longrightarrow 0,\quad (n\longrightarrow\infty)$$

利用自共轭算子 D_T 的谱分解可知

$$\|P_n(D_T^2)-D_T\|\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|P_n(t)-\sqrt{t}|.$$

所以 $\lim_{n\to\infty}P_n(D_T^2)=D_T$，类似地有 $\lim_{n\to\infty}P_n(D_{T^*}^2)=D_{T^*}$. 在 (1.2) 中以 P_n 代 P，再令 $n\to\infty$ 就得 (1.1). 证毕.

在 (1.1) 中，两边取 $*$，即得

$$T^*D_{T^*}=D_TT^* \tag{1.3}$$

引理 1.2 设 T 是压缩算子，则

$$\Theta_T(\lambda)D_T=D_{T^*}(I-\lambda T^*)^{-1}(\lambda I-T) \tag{1.4}$$

而且

$$D_{T^*}\Theta_T(\lambda)=(\lambda I-T)(I-\lambda T^*)^{-1}D_T|_{\mathfrak{D}_T}. \tag{1.5}$$

证 由 (1.1) 立即可知

$$\begin{aligned}\Theta_T(\lambda)D_T&=D_{T^*}[-T+\lambda(I-\lambda T^*)^{-1}(I-T^*T)]\\&=D_{T^*}(I-\lambda T^*)[-(I-\lambda T^*)T+\lambda(I-T^*T)],\end{aligned}$$

因此 (1.4) 成立. 同样地，有

$$\begin{aligned}D_{T^*}\Theta_\lambda(\lambda)&=[-T+\lambda(I-TT^*)(I-\lambda T^*)^{-1}]D_T|_{\mathfrak{D}_T}\\&=[-T(I-\lambda T^*)+\lambda(I-TT^*)]D_T|_{\mathfrak{D}_T}.\end{aligned}$$

由此即得 (1.5). 证毕.

由此立即可知

$$\Theta_T(\lambda)(D_T\mathscr{H})\subset D_{T^*}\mathscr{H}\subset\mathfrak{D}_{T^*}.$$

由于 $\Theta_T(\cdot)$ 是有界算子，从上式即得

$$\Theta_T(\lambda)\mathfrak{D}_T\subset\mathfrak{D}_{T^*}. \tag{1.6}$$

2. 特征函数的初等性质

特征函数除去具有前述 (1.4—6) 的性质外，还有如下的一些初等性质. 首先我们需要关于算子 T 的一个一般性的等式.

引理 1.3 设 $T\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$，$\lambda$ 为复数而且 $(I-\lambda T^*)^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$，那么

$$\begin{aligned}&(I-TT^*)(I-\lambda T^*)^{-1}(\lambda I-T)\\&\quad=(\lambda I-T)(I-\lambda T^*)^{-1}(I-T^*T).\end{aligned} \tag{1.7}$$

证 上式左右两边展开同时成为

$$-T+TT^*T+\lambda(I-TT^*)(I-\lambda T^*)^{-1}(I-T^*T).$$

所以 (1.7) 成立. 证毕.

引理 1.4 设 T 为压缩算子，那么当 $|\lambda|<1$ 时，

$$\Theta_{T^*}(\lambda) = \Theta_T(\bar{\lambda})^* \tag{1.8}$$

又

$$I - \Theta_T(\lambda)^*\Theta_T(\lambda) = (1 - |\lambda|^2)D_T$$
$$(I - \bar{\lambda}T)^{-1}(I - \lambda T^*)^{-1}D_T|_{\mathfrak{D}_T}. \tag{1.9}$$

证 设 $a \in \mathfrak{D}_{T^*}$，$b \in \mathfrak{D}_T$，那么

$$\begin{aligned}(\Theta_T(\bar{\lambda})^*a, b) &= (a, \Theta_T(\bar{\lambda})b) \\ &= (a, [-T + \bar{\lambda}D_{T^*}(I - \bar{\lambda}T^*)^{-1}D_T]b) \\ &= ((-T^* + \lambda D_T(I - \lambda T)^{-1}D_{T^*})a, b) \\ &= (\Theta_{T^*}(\lambda)a, b).\end{aligned}$$

由此即得 (1.8).

由 (1.4)，

$$D_T\Theta_T(\lambda)^* = (\bar{\lambda}I - T^*)(I - \bar{\lambda}T)^{-1}D_{T^*}|_{\mathfrak{D}_{T^*}},$$

因此

$$D_T(I - \Theta_T(\lambda)^*\Theta_T(\lambda))D_T = I - T^*T - (\bar{\lambda}I - T^*)$$
$$(I - \bar{\lambda}T)^{-1}(I - TT^*)(I - \lambda T^*)^{-1}(\lambda I - T),$$

由 (1.7)，上式化成

$$I - (\bar{\lambda}I - T^*)(I - \bar{\lambda}T)^{-1}(\lambda I - T)(I - \lambda T^*)^{-1}$$
$$(I - T^*T) = [(I - \lambda T^*)(I - \bar{\lambda}T) - (\bar{\lambda}I - T^*)$$
$$(\lambda I - T)](I - \bar{\lambda}T)^{-1}(I - \lambda T^*)^{-1}(I - T^*T).$$

于是即得

$$D_T(I - \Theta_T(\lambda)^*\Theta_T(\lambda))D_T = D_T(I - |\lambda|^2)$$
$$(I - \bar{\lambda}T)^{-1}(I - \lambda T^*)^{-1}D_T, \tag{1.10}$$

由此容易得到等式 (1.9). 证毕.

系 1.5 当 T 是压缩算子时，特征函数 $\{\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}, \Theta_T(\cdot)\}$ 在 $|\lambda| < 1$ 中是压缩算子值解析函数. 即当 $|\lambda| < 1$ 时，

$$\|\Theta_T(\lambda)\| \leqslant 1. \tag{1.11}$$

我们常用下面的分式线性变换公式. 设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中压缩算子，任取复数 a，$|a| < 1$，作算子

$$T_a = (T - aI)(I - \bar{a}T)^{-1},$$

由于

$$\|(T-aI)x\| \leqslant \|(I-\bar{a}T)x\|,$$

可知 T_a 也是压缩算子，记

$$R_a=(1-|a|^2)(I-\bar{a}T)^{-1}.$$

那么

$$D_{T_a}=R_a^*D_TR_a, \quad D_{T_a^*}=R_aD_{T^*}R_a^*, \tag{1.12}$$

由 (1.12) 可知，如果令 U_a 为算子

$$D_TR_ax \longmapsto D_{T_a}x,$$

那么 U_a 为 $\mathfrak{D}_T$ 到 $\mathfrak{D}_{T_a}$ 的酉算子，同样地，令 V_a 为

$$D_{T^*}R_a^*x \longmapsto D_{T_a^*}x$$

的算子，那么 V_a 是 $\mathfrak{D}_{T^*}$ 到 $\mathfrak{D}_{T_a^*}$ 的酉算子.

引理 1.6 如果 $\|T\|<1$, $|a|<1$, 那么

$$\Theta_{T_a}(\lambda)=V_a^*\Theta_T\left(\frac{\lambda+a}{1+\bar{a}\lambda}\right)U_a. \tag{1.13}$$

证 利用 (1.5) 以及相应于 T_a 的等式 (1.5)，经过计算可知

$$D_{T_a^*}\Theta_{T_a}(\lambda)D_{T_a}=R_aD_{T^*}\Theta_T\left(\frac{\lambda+a}{1+\bar{a}\lambda}\right)D_TR_a,$$

于是即得 (1.13).

下面我们用特征函数来刻划压缩算子在单位圆内的正则点.

定理 1.7 设 T 为压缩算子，$|\lambda|<1$. (1) 如果 $\lambda\in\rho(T)$，则 $\Theta_T(\lambda)^{-1}$ 存在，它是 $\mathfrak{D}_{T^*}$ 到 $\mathfrak{D}_T$ 上的有界算子，而且

$$\Theta_T(\lambda)^{-1}=[-T^*+D_T(\lambda I-T)^{-1}D_{T^*}]|_{\mathfrak{D}_{T^*}}. \tag{1.14}$$

(2) 如果 $\Theta_T(\lambda)^{-1}$ 存在，而且是 $\mathfrak{D}_{T^*}$ 到 $\mathfrak{D}_T$ 上的线性有界算子，那么 $\lambda\in\rho(T)$.

证 (1) 由于设 $\lambda\in\rho(T)$，因此

$$\Omega_T(\lambda)=[-T^*+D_T(\lambda I-T)^{-1}D_{T^*}]|_{\mathfrak{D}_{T^*}}$$

是 $\mathfrak{D}_{T^*}$ 到 $\mathfrak{D}_T$ 的有界算子. 这时，经过计算

$$\begin{aligned}\Omega_T(\lambda)\Theta_T(\lambda)=[&I-D_T^2-D_T(\lambda I-T)^{-1}TD_T-\lambda D_TT^*\\&(I-\lambda T^*)^{-1}D_T+\lambda D_T(\lambda I-T)^{-1}D_{T^*}^2\\&(I-\lambda T^*)^{-1}D_T]|_{\mathfrak{D}_T}\\=[&I-D_T(I+(\lambda I-T)^{-1}T+\lambda T^*\end{aligned}$$

$$\cdot (I - \lambda T^*)^{-1} - \lambda(\lambda I - T)^{-1}(I - TT^*)$$
$$(I - \lambda T^*)^{-1})D_T\}|_{\mathfrak{D}_T} = I|_{\mathfrak{D}_T}.$$
类似地可证 $\Theta_T(\lambda)\Omega_T(\lambda) = I|_{\mathfrak{D}_{T^*}}$. 因此 $\Theta_T(\lambda)^{-1}$ 存在，它是 $\mathfrak{D}_{T^*}$ 到 $\mathfrak{D}_T$ 上的有界算子，而且 $\Omega_T(\lambda) = \Theta_T(\lambda)^{-1}$. 即得 (1.14).

(2) 先考察 $\lambda = 0$ 的情况. 由 (1.9)
$$\Theta_T(0)^*\Theta_T(0) = T^*T|_{\mathfrak{D}_T}$$
由假设，$\Theta_T(0)^{-1}$ 存在，因此 $\Theta_T(0)^{*-1}$ 也存在. 所以
$$[\Theta_T(0)^*\Theta(0)]^{-1}$$
存在，而且属于 $\mathscr{L}(\mathfrak{D}_T)$. 即 $[T^*T|_{\mathfrak{D}_T}]^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{D}_T)$. 另一方面容易算出
$$T^*T|_{\mathscr{H}\ominus\mathfrak{D}_T} = I|_{\mathscr{H}\ominus\mathfrak{D}_T}.$$
所以
$$[T^*T|_{\mathscr{H}\ominus\mathfrak{D}_T}]^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H}\ominus\mathfrak{D}_T).$$
于是 $(T^*T)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$，类似地可证 $(TT^*)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. 于是即知 $T^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$.

对于一般的 λ，$|\lambda| < 1$，取 $a = \lambda$，由 (1.13) 即知 $\Theta_{T_a}(0)^{-1}$ 存在，且为 $\mathfrak{D}_{T_a^*}$ 到 $\mathfrak{D}_{T_a}$ 上的线性有界算子，从而 $T_a^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$，即 $\lambda = a \in \rho(T)$. 证毕.

3. 谱在单位圆周上的压缩算子

这一段中我们要利用特征函数来研究压缩算子 T 的 $\|T^{-n}\|$，$n = 1, 2, \cdots$ 的增长级，为此我们先给出一个简单的引理，但这个引理在压缩算子理论中是较有用的.

引理 1.8 设 T 为压缩算子. (1) 如果 $x \in \mathscr{H}$，$r < 1$，那么
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|D_{T^*}(I - re^{i\theta}T^*)^{-1}x\|^2 d\theta$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\|T^{*n}x\|^2 - \|T^{*n+1}x\|^2)r^{2n}$$
$$= \|x\|^2 - (1 - r^2)\sum_{n=0}^{\infty} \|T^{*n+1}x\|^2 r^{2n} \qquad (1.15)$$

(2) 如果当 $|\lambda| < r_0$ 时，$\lambda \in \rho(T)$. 那么对一切 $x \in \mathscr{H}$，$0 \leqslant$

$r < r_0$ 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|D_T(re^{i\theta}-T)^{-1}x\|^2 d\theta$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\|T^{-n-1}x\|^2-\|T^{-n}x\|^2)r^{2n}$$

$$=-\|x\|^2+(1-r^2)\sum_{n=0}^{\infty}\|T^{-n-1}x\|^2 r^{2n} \qquad (1.16)$$

成立.

证 (1) 利用展开式

$$(I-re^{i\theta}T^*)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}r^nT^{*n}e^{-ni\theta},$$

对 (1.15) 式的等号左边进行直接计算即知左边等于

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|D_{T^*}T^{*n}x\|^2r^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(T^n(I-TT^*)T^{*n}x,x)r^{2n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\|T^{*n}x\|^2r^{2n}-\sum_{n=0}^{\infty}\|T^{*n+1}x\|^2r^{2n}.$$

这就得到 (1.15).

(2) 利用 $(re^{i\theta}-T)^{-1}=-T^{-1}(I-re^{i\theta}T^{-1})^{-1}$, 类似于上述计算可知 (1.16) 左边等于

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\|T^{-n-1}x\|^2-\|T^{-n}x\|^2)r^{2n},$$

这就得到 (1.16). 证毕.

现在给出特征函数之逆的增长级与 T^{-n} 的增长级之间的关系.

定理 1.9 设 T 为 $\mathscr{H}$ 中的压缩算子, $k\geq 0$, 那么 $T^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 而且

$$\|T^{-n}\|=O(n^k), \quad n\to\infty \qquad (1.17)$$

的充要条件是对一切 λ, $|\lambda|<1$, $\Theta_T(\lambda)^{-1}$ 存在, 而且

$$\|\Theta_T(\lambda)^{-1}\|=O\left(\frac{1}{(1-|\lambda|)^k}\right), \quad |\lambda|\to 1-0. \qquad (1.18)$$

证 充分性．设 $\Theta_T(\lambda)^{-1}$，$|\lambda|<1$ 存在，而且 (1.18) 成立．由定理 1.7，$T^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$．且当 $|\lambda|<1$ 时，

$$(\lambda I-T)^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{H}).$$

由引理 1.8，当 $r<1$ 时，(1.16) 成立．然而由 (1.4)，当 $|\lambda|<1$ 时

$$D_T(\lambda I-T)^{-1}=\Theta_T(\lambda)^{-1}D_{T^*}(I-\lambda T^*)^{-1}. \tag{1.19}$$

记 (1.16) 所确定的 r 的幂级数为 $f(r,x)$．由 (1.18—19) 有正数 M 使得

$$f(r,x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|\Theta_T(re^{i\theta})^{-1}D_{T^*}(I-re^{i\theta}T^*)^{-1}x\|^2d\theta$$

$$\leqslant\frac{M}{(1-r)^{2k}}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|D_{T^*}(I-re^{i\theta}T^*)^{-1}x\|^2d\theta,$$

利用 (1.15) 和 $r<1$ 即得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|D_{T^*}(I-re^{i\theta}T^*)^{-1}x\|^2d\theta\leqslant\|x\|^2.$$

因此

$$f(r,x)\leqslant\frac{M\|x\|^2}{(1-r)^{2k}}.$$

由 (1.16) 易知

$$f(r,x)\geqslant\sum_{n=0}^{m-1}(\|T^{-n-1}x\|^2-\|T^{-n}x\|^2)r^{2n}$$

$$=\|T^{-m}x\|^2r^{2(m-1)}+\sum_{n=1}^{m-2}r^{2(n-1)}\|T^{-n-1}x\|^2(1-r^2)$$

$$-\|x\|^2\geqslant\|T^{-m}x\|^2r^{2(m-1)}-\|x\|^2.$$

从而

$$\|T^{-m}x\|^2\leqslant r^{-2(m-1)}\left(1+\frac{M}{(1-r)^{2k}}\right)\|x\|^2.$$

取 $r=1-\dfrac{1}{M}$，即得

$$\|T^{-m}x\|\leqslant M'm^k\|x\|.$$

此处 M' 为一常数．这样就得到 (1.17)．

必要性．设 $T^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$，而且 (1.17) 成立．那么易知 T^{-1} 的谱半径 $r_{sp}(T^{-1})$ 适合

$$r_{sp}(T^{-1})=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^{-n}\|}\leqslant 1.$$

因此当 $0<|\lambda|<1$ 时，$(\lambda I-T)^{-1}=T^{-1}(T^{-1}-\lambda^{-1}I)^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$．由定理 1.7，$\Theta_T(\lambda)^{-1}$ 存在，而且它是 $\mathscr{D}_{T^*}$ 到 $\mathscr{D}_T$ 的线性有界算子．由 (1.4) 可知当 $\lambda\neq 0$ 时，

$$\Theta_T(\lambda)^{-1}=\Theta_{T^*}(\lambda^{-1}).$$

在 (1.9) 中易 T 为 T^*，λ 为 λ^{-1} 得到

$$\begin{aligned}&[\Theta_T(\lambda)^{-1}]^*[\Theta_T(\lambda)^{-1}]-I\\&\quad=(1-|\lambda|^2)D_{T^*}(\bar{\lambda}-T^*)^{-1}(\lambda I-T)^{-1}D_{T^*}|_{\mathscr{D}_{T^*}},\end{aligned}$$

因此

$$\|\Theta_T(\lambda)^{-1}\|^2\leqslant 1+(1-|\lambda|^2)\|D_{T^*}(\bar{\lambda}-T^*)^{-1}\|^2, \tag{1.20}$$

但是由 (1.16)，在其中易 T 为 T^*，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|D_{T^*}(re^{-i\theta}-T^*)^{-1}x\|^2\\&\leqslant(1-r^2)\sum_{n=0}^{\infty}\|T^{*-n-1}x\|^2r^{2n}\\&\leqslant M(1-r^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{2k}r^{2n}\|x\|^2\\&\leqslant\frac{M_1\|x\|^2}{(1-r)^{2k}}.\end{aligned}$$

此地 M，M_1 都是常数，由 Cauchy 积分公式

$$\begin{aligned}&D_{T^*}(r^2e^{i\theta_0}I-T^*)^{-1}x\\&\quad=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{D_{T^*}(re^{i\theta}I-T^*)^{-1}x}{re^{i\theta}-r^2e^{i\theta_0}}\,d\theta,\end{aligned}$$

再利用 Schwarz 不等式得到

$$\begin{aligned}&\|D_{T^*}(r^2e^{i\theta_0}I-T^*)^{-1}x\|^2\\&\quad\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|D_{T^*}(re^{i\theta}I-T)^{-1}x\|^2d\theta\end{aligned}$$

$$\cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|re^{i\theta_0}-r^2e^{i\theta_0}|^2}.$$

但根据 Poisson 公式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|e^{i\theta}-re^{i\theta_0}|^2}=\frac{1}{1-r^2}.$$

所以

$$\|D_{T^*}(\bar{\lambda}I-T^*)^{-1}x\|^2\leqslant\frac{M_2\|x\|^2}{(1-|\lambda|)^{2k+1}},$$

把它和(1.20)结合起来就得到(1.19). 证毕.

设 T 是 $\mathscr{H}$ 中的压缩算子,那么对每个 $x\in\mathscr{H}$,

$$(T^{*n}T^nx,x)=\|T^nx\|^2,\quad n=1,2,\cdots$$

是单调减少的非负数列,因此存在着弱极限

$$A_T^2=W-\lim_{n\to\infty}T^{*n}T^n. \tag{1.21}$$

容易证明

$$T^*A_T^2T=A_T^2. \tag{1.22}$$

设 T,S,A 和 A^{-1} 都属于 $\mathscr{L}(\mathscr{H})$,而且

$$T=A^{-1}SA, \tag{1.23}$$

那么称 T 与 S 是相似的.

系 1.10 设 T 是压缩算子, 那么 T 相似于一酉算子的充要条件是对任何 $\lambda,|\lambda|<1$, $\Theta_T(\lambda)^{-1}$ 存在,而且有常数 c 使

$$\|\Theta_T(\lambda)^{-1}\|\leqslant c,\quad |\lambda|<1. \tag{1.24}$$

证 由定理 1.19, 我们只要证 T 相似于酉算子的充要条件是 $T^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 而且

$$\|T^{-n}\|\leqslant K,\quad n=1,2,\cdots, \tag{1.25}$$

若 T 相似于酉算 S, 显然 $T^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$, 而且由(1.23)可知

$$\|T^{-n}\|=\|A^{-1}S^{-n}A\|\leqslant\|A^{-1}\|\|A\|,\quad n=1,2,\cdots$$

故条件为必要的.

反之, 如果 $T^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 而且(1.25)成立. 那么由(1.21)

$$\|A_Tx\|=\lim_{n\to\infty}\|T^nx\|\geqslant\frac{1}{K}\|x\|.$$

但 A_T 是自共轭的，因此 $A_T^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$. 记 $S=A_TTA_T^{-1}$，则 T 相似于 S，由 (1.22) 得到

$$S^*S=A_T^{-1}T^*A_T^2TA_T^{-1}=I.$$

然而 $T^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$，从而 $S^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$，即 S 为酉算子．从而 T 相似于酉算子．证毕．

§2 函数模型

本节中我们要建立压缩算子的函数模型，我们先把压缩算子分解为酉算子和完全非酉的压缩算子的直交和，从而只要考察完全非酉的压缩算子的函数模型．

1. 完全非酉的压缩算子

设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{M}$ 中的线性有界算子，如果不存在一个非零的子空间 $\mathscr{N}\subset\mathscr{M}$ 约化 T 使 $T|_{\mathscr{N}}$ 为酉算子，则称 T 为完全非酉的．

引理 2.1 设 T 为 $\mathscr{H}$ 中压缩算子，令 $\mathscr{H}^{(u)}$ 为 $\mathscr{H}$ 中满足条件

$$\begin{aligned}\|x\|=\|Tx\|=\cdots=\|T^nx\|=\cdots\\=\|T^*x\|=\cdots=\|T^{*n}x\|=\cdots\end{aligned}\tag{2.1}$$

的向量 x 全体．那么 $\mathscr{H}^{(u)}$ 是 $\mathscr{H}$ 的闭子空间，$\mathscr{H}^{(u)}$ 约化 T，而且 $T|_{\mathscr{H}^{(u)}}$ 是酉算子．

证 由于 T 为压缩算子，因此有半正定算子 D_{T^n}, $D_{T^{*n}}$. 从而 $D_{T^n}x=0$ 等价于 $(D_{T^n}x,x)=0$，这又等价于

$$\|x\|=\|T^nx\|,$$

同样 $D_{T^{*n}}x=0$ 等价于 $\|x\|=\|T^{*n}x\|$. 因此

$$\mathscr{H}^{(u)}=\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathscr{N}(D_{T^n})\cap\mathscr{N}(D_{T^{*n}}))^{1)}$$

作为一列闭子空间的通集，自然是闭子空间．

---

1) $\mathscr{N}(A)$ 表示 A 的零空间．

今证 $\mathscr{H}^{(u)}$ 约化 T. 事实上,若 $x\in\mathscr{H}^{(u)}$,那么显然

$$\|T^n(Tx)\|=\|Tx\|,\quad n=1,2,\cdots$$

又由 $T^*Tx=x$,得

$$\|T^{*n}(Tx)\|=\|T^{*(n-1)}x\|=\|x\|=\|Tx\|,\quad n=1,2,\cdots$$

因此 $Tx\in\mathscr{H}^{(u)}$,类似地 $T^*x\in\mathscr{H}^{(u)}$. 即 $\mathscr{H}^{(u)}$ 约化 T,由于

$$T^*|_{\mathscr{H}^{(u)}}=(T|_{\mathscr{H}^{(u)}})^*,$$

从 $\mathscr{H}^{(u)}$ 定义式(2.1)可知 $T|_{\mathscr{H}^{(u)}}$ 是酉算子. 证毕.

现在给出压缩算子 T 为完全非酉的充要条件.

引理 2.2 如果 $T\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$,而且 $\mathscr{H}$ 中不存在满足条件(2.1)的非零向量 x,那么 T 是完全非酉的,反之若 T 为完全非酉的压缩算子,那么在 $\mathscr{H}$ 中不存在满足条件(2.1)的非零向量 x.

证 如果 T 不是完全非酉的,那么存在闭子空间 $\mathscr{N}\subset\mathscr{H}$,$\mathscr{N}\neq\{0\}$,$\mathscr{N}$ 约化 T 为酉算子. 任取 $x\neq0$,$x\in\mathscr{N}$,那么 x 显然满足条件(2.1). 所以定理前一半是正确的.

反之,设 T 为完全非酉的压缩算子,由引理 2.1 知必有 $\mathscr{H}^{(u)}=\{0\}$,即不存在满足(2.1)的非零向量. 证毕.

压缩算子必可分解为酉算子和完全非酉算子的直交和.

定理 2.3 设 T 为 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的压缩算子,则必有闭子空间 $\mathscr{H}^{(u)}$ 和 $\mathscr{H}^{(0)}$ 使

$$\mathscr{H}=\mathscr{H}^{(u)}\oplus\mathscr{H}^{(0)},$$

$\mathscr{H}^{(u)}$ 约化 T,$T^{(u)}=T|_{\mathscr{H}^{(u)}}$ 为酉的,而 $T^{(0)}=T|_{\mathscr{H}^{(0)}}$ 为完全非酉的.

证 令 $\mathscr{H}^{(u)}$ 为 $\mathscr{H}$ 中使(2.1)成立的向量 x 全体. 记 $\mathscr{H}^{(0)}=\mathscr{H}\ominus\mathscr{H}^{(u)}$. 由引理 2.2 的证明可知 $\mathscr{H}^{(u)}$ 约化 T 为 $T^{(u)}$ 是酉算子. 显然 $\mathscr{H}^{(0)}$ 中不存在满足条件(2.1)的非零向量,由引理 2.2 知 $T^{(0)}$ 是完全非酉的. 证毕.

我们称上述定理中的 $T^{(u)}$ 为 T 的酉部分,而 $T^{(0)}$ 称为 T 的完全非酉部分.

特征函数实际上只描写了算子 T 的完全非酉部分.

定理 2.4 设 T 为 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中压缩算子,$T^{(0)}$ 为 T 的

完全非酉部分，那么

$$\Theta_T(\lambda)=\Theta_{T^{(0)}}(\lambda),\quad |\lambda|<1. \tag{2.2}$$

证 令 $P^{(u)}$ 和 $P^{(0)}$ 分别是 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}^{(u)}$ 和 $\mathscr{H}^{(0)}$ 的投影算子，则

$$T=T^{(u)}P^{(u)}+T^{(0)}P^{(0)}$$

因此

$$\begin{aligned}I-T^*T&=P^{(u)}+P^{(0)}-(T^{(u)*}T^{(u)}P^{(u)}+T^{(0)*}T^{(0)}P^{(0)})\\&=(I^{(0)}-T^{(0)*}T^{(0)})P^{(0)}\end{aligned}$$

其中 $I^{(0)}$ 为 $\mathscr{H}^{(0)}$ 中恒等算子，由此可得

$$D_T=D_{T^{(0)}}P^{(0)}$$

类似地 $D_{T^*}=D_{T^{(0)*}}P^{(0)}$，因此

$$\mathfrak{D}_T=\mathfrak{D}_{T^{(0)}}\subset\mathscr{H}^{(0)},\quad \mathfrak{D}_{T^*}=\mathfrak{D}_{T^{(0)*}}\subset\mathscr{H}^{(0)}.$$

于是容易算出 (2.2)。证毕.

因此我们后面考察到压缩算子 T 的特征函数时，常设 T 为完全非酉的. 下面我们给出完全非酉算子的一个有用的性质.

引理 2.5 设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的完全非酉的压缩算子. 令 $\mathscr{M}$ 为 $\mathscr{H}$ 中满足如下条件的向量 x 的全体：存在非负整数 k 使 $T^{*k}x$ 可以表示为如下形式

$$T^{*k}x=\sum_{n=0}^{m}T^{*n}D_Ta_n, \tag{2.3}$$

其中 m 为非负整数，$a_n\in\mathfrak{D}_T$，$n=0,1,2,\cdots,m$. 那么 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{H}$ 的稠密子空间.

证 $\mathscr{M}$ 显然是 $\mathscr{H}$ 的线性子空间. 欲证 $\mathscr{M}$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠，只要证明 $\mathscr{M}^\perp=\{0\}$ 即可. 因为当 $x\in\mathscr{H}$ 时，

$$D_{T^n}x=\sum_{m=0}^{n-1}T^{*m}D_T(D_TT^mx). \tag{2.4}$$

因此 $D_{T^n}\mathscr{H}\subset\mathscr{M}$. 又对 T^n 用 (1.3)，当 $x\in\mathscr{H}$ 时

$$T^{*n}D_{T^*}x=D_{T^n}T^{*n}x \tag{2.5}$$

由 (2.4—5) 可知 $D_{T^{*n}}\mathscr{H}\subset\mathscr{M}$，若 $y\in\mathscr{M}^\perp$，则必有

$$y \perp D_{T^n}\mathscr{H}, \quad y \perp D_{T^{*n}}\mathscr{H},$$

因此

$$\|y\|^2 - \|T^n y\|^2 = (D_{T^n} y, y) = 0$$

$$\|y\|^2 - \|T^{*n} y\|^2 = (D_{T^{*n}} y, y) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots$$

由引理 2.2 和 T 的完全非酉性可知 $y = 0$. 即 $\mathscr{M}^{\perp} = \{0\}$. 证毕.

2. 完全非酉压缩算子的函数模型

由于酉算子是较清楚的,由定理 2,我们首先只考察完全非酉压缩算子的函数模型. 为此我们需要先引进一些记号.

本段中,我们将用到测度空间 $\Omega = (C_1, \mathfrak{B}, m)$ 上取值于 $\mathfrak{D}$ 的平方可积函数空间 $L^2(\mathfrak{D})$ 和它的子空间 Hardy 空间 $H^2(\mathfrak{D})$. 设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的压缩算子, $\Theta_T(\lambda)$ 是它的特征函数. 由于 $\Theta_T(\cdot)$ 是算子值解析函数而且 $\|\Theta_T(\lambda)\| \leqslant 1$, $|\lambda| < 1$, 我们作 $H^2(\mathfrak{D})$ 中的压缩算子 Θ 如下: 当 $f \in H^2(\mathfrak{D})$ 时,

$$(\Theta f)(\lambda) = \Theta_T(\lambda) f(\lambda), \quad |\lambda| < 1$$

根据定理 III, 2.4 必有 $(C_1, \mathfrak{B}, m)$ 上压缩算子值的可测函数, 仍记为 $\Theta_T(e^{i\theta})$ 使

$$(\Theta f)(e^{it}) = \Theta_T(e^{it}) f(e^{it}).$$

显然

$$\lim_{r \to 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\Theta_T(re^{i\theta}) f(re^{i\theta}) - \Theta_T(e^{it}) f(e^{it})\|^2 dt = 0 \quad (2.6)$$

根据算子值解析函数的境界值理论, 我们还可以证明对每个 $x \in \mathfrak{D}$,

$$\lim_{r \to 1-0} \|\Theta_T(re^{it}) x - \Theta_T(e^{it}) x\| = 0.$$

但我们本书中并不要用到它.

由于 $\|\Theta_T(e^{it})\| \leqslant 1$, $I - \Theta_T(e^{it})^* \Theta_T(e^{it}) \geqslant 0$. 我们作 $\mathscr{L}(\mathfrak{D}_T)$ 中半正定算子

$$\Delta_T(e^{it}) = (I - \Theta_T(e^{it})^* \Theta_T(e^{it}))^{1/2},$$

有时简记它为 $\Delta(e^{it})$ 或 Δ. 显然 $\Delta_T(e^{it}) \leqslant I$, 而且 $e^{it} \longmapsto \Delta_T(e^{it})$ 是算子值的可测函数. 我们记

$$\Delta L^2(\mathfrak{D}_T) = \{\Delta f \mid f \in L^2(\mathfrak{D}_T)\},$$

这是 $L^2(\mathfrak{D}_T)$ 的线性子空间，它的闭包记为 $\overline{\Delta L^2(\mathfrak{D}_T)}$.

现在我们着手建立函数模型，在下面几个引理中，总假设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的压缩算子而且是完全非酉的.

引理 2.6 对每个 $x\in\mathscr{H}$，作函数

$$D_{T^*}(I-e^{it}T^*)^{-1}x\sim\sum_{n=0}^{\infty}D_{T^*}T^{*n}xe^{int},\tag{2.7}$$

那么它属于 $H^2(\mathfrak{D})$，而且有等式

$$\|x\|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|D_{T^*}(I-e^{it}T^*)^{-1}x\|^2dt+\|A_{T^*}x\|^2.\tag{2.8}$$

此地 $D_{T^*}=(I-TT^*)^{1/2}$, $A_{T^*}x=S-\lim\limits_{n\to\infty}(T^nT^{*n})^{1/2}x$.

证 经过直接计算可知

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\|D_{T^*}T^{*n}x\|^2&=\sum_{n=0}^{\infty}(\|T^{*n}x\|^2-\|T^{*n+1}x\|^2)\\&=\|x\|^2-\lim_{n\to\infty}\|T^{*n}x\|^2.\end{aligned}\tag{2.9}$$

因此函数 (2.8) 属于 $H^2(\mathfrak{D})$ 而且由 (2.9) 即得 (2.8). 证毕.

引理 2.7 如果 $x, y\in\mathscr{H}$, $n, m=0, 1, 2, \cdots$, 那么

$$\begin{aligned}&(A_{T^*}T^{*n}x, A_{T^*}T^{*m}y)\\&\quad=\lim_{r\to 1-0}\frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}(e^{-int}(I-re^{it}T^*)^{-1}x, e^{-imt}\\&\qquad(I-re^{i\theta}T^*)^{-1}y)dt.\end{aligned}\tag{2.10}$$

证 由于 $\{e^{int}|n=0, \pm1, \cdots\}$ 是 $L^2(C_1)$ 中就范直交基，容易算出，当 $0\leqslant r<1$, $m\geqslant n$ 时，

$$\begin{aligned}&\frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}(e^{-int}(I-re^{it}T^*)^{-1}x, e^{-imt}(I-re^{it}T^*)^{-1}y)dt\\&=(1-r^2)\sum_{k=0}^{\infty}r^{2k+m-n}(T^{*k}x, T^{*k+m-n}y)\\&=r^{m-n}\Big\{(x, T^{*m-n}y)+\sum_{k=1}^{\infty}r^{2k}[(T^{*k}x, T^{*k+n-m}y)\\&\qquad-(T^{*k-1}x, T^{*k+n-m-1}y)]\Big\}.\end{aligned}\tag{2.11}$$

由于级数

$$(x, T^{*m-n}y) + \sum_{k=1}^{\infty} [(T^{*k}x, T^{*k+n-m}y) - (T^{*k-1}x, T^{*k+n-m-1}y)] = \lim_{k\to\infty}(T^{*k}x, T^{*k+m-n}y) = (A_{T^*}x, A_{T^*}T^{*m-n}y),$$

又由 (1.22)，可知上述级数的和又等于 (2.10) 等式左边．由 Abel 的第二定理可知当 $r\to 1-0$ 时，(2.11) 的极限为 (2.10) 的左边所以 (2.10) 成立，类似地可知当 $n\geqslant m$ 时，(2.10) 也成立．证毕．

系 2.8 设 $a, b\in \mathfrak{D}_T$, $m, n = 0, 1, 2, \cdots$，那么

$$(A_{T^*}T^{*n}D_Ta, A_{T^*}T^{*m}D_Tb) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(e^{-int}\Delta_T(e^{it})a, e^{-imt}\Delta_T(e^{it})b)dt. \tag{2.12}$$

证 在 (2.10) 中令 $x = D_Ta$, $y = D_Tb$，那么等式 (2.10) 的右边成为

$$\lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-r^2)(D_T(I-re^{-it}T)^{-1}(I-re^{it}T^*)^{-1}D_Tr^me^{imt}a, r^ne^{int}b)dt, \tag{2.13}$$

由 (1.9) 式可知 (2.13) 成为

$$\lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}((I-\Theta_T(re^{it})^*\Theta_T(re^{it}))r^me^{imt}a, r^ne^{int}b)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(e^{imt}a, e^{int}b) - \lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\Theta_T(re^{it})\cdot r^me^{imt}a, \Theta_T(re^{it})r^ne^{int}b)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}((I-\Theta_T(e^{it})^*\Theta_T(e^{it}))e^{imt}a, e^{int}b)dt.$$

这就得到 (2.12)．证毕．

引理 2.9 对每个 $x\in\mathscr{H}$，存在唯一的函数 $\varphi(\cdot;x)\in\overline{\Delta L^2(\mathfrak{D})}$ 使映照

$$\Phi: x\longmapsto\varphi(\cdot;x), \quad x\in\mathscr{H}$$

为 $\mathscr{H}$ 到 $\overline{\Delta L^2(\mathfrak{D})}$ 的线性算子，满足如下条件：当 $a \in \mathfrak{D}_T$ 时，

$$\varphi(e^{it}, D_T a) = \Delta_T(e^{it})e^{-it}a, \tag{2.14}$$

又当 $x \in \mathscr{H}$ 时，有

$$\varphi(e^{it}, T^*x) = e^{-it}\varphi(e^{it}; x) \tag{2.15}$$

成立．而且

$$\|\varphi(\cdot; x)\|_{L^2(\mathfrak{D})} = \|A_{T^*}x\|. \tag{2.16}$$

证　当 $x \in \mathscr{M}$，而且形如 (2.3) 时，我们定义

$$\varphi(e^{it}; x) = \Delta_T(e^{it})\sum_{n=0}^{m} e^{i(k-n-1)t}a_n, \tag{2.17}$$

显然这个函数满足条件 (2.14)．由于这时

$$T^{*k}(T^*x) = \sum_{n=0}^{m} T^{*n+1}D_T a_n,$$

因此

$$\varphi(e^{it}; T^*x) = \Delta_T(e^{it})\sum_{n=0}^{m} e^{i(k-(n+1)-1)t}a_n = e^{-it}\varphi(e^{it}, x).$$

这就是 (2.15)．由于 (2.12) 可知

$$\begin{aligned}\|\varphi(\cdot; x)\|^2_{L^2(\mathfrak{D})} &= \|(\cdot)^{k-1}\varphi(\cdot; x)\|^2_{L^2(\mathfrak{D})} \\ &= \sum_{l,n=0}^{m} (A_{T^*}T^{*l}D_T a_l, A_{T^*}T^{*n}D_T a_n) \\ &= \|A_{T^*}T^{*k}x\|^2.\end{aligned}$$

再利用 (1.22) 就得到 (2.16)．

由于 $\mathscr{M}$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠密，由 (2.16) 可知所定义的算子 Φ: $x \longmapsto \varphi(\cdot; x)$ 可以唯一地延拓成 $\mathscr{H} \longmapsto \overline{\Delta L^2(\mathfrak{D})}$ 中的线性有界算子．我们把延拓后的算子仍记为 Φ，并且仍记 Φx 为 $\varphi(\cdot; x)$．显然这时，当 $x \in \mathscr{H}$ 时，(2.14—16) 仍成立．

再证满足条件 (2.14—16) 的 $\varphi(\cdot; x)$ 的唯一性．由 (2.14—15) 和 $\varphi(\cdot; x)$ 对 x 的线性可知当 $x \in \mathscr{M}$ 而且形如 (2.3) 时必然成立(2.17)再由 $\mathscr{M}$ 的稠密性和 Φ 的有界性(2.16) 可知当 $x \in \mathscr{H}$

$-\mathscr{M}$ 时，$\varphi(\cdot;x)$ 可由 $\varphi(\cdot,x)$，$x\in\mathscr{M}$ 唯一地决定．证毕．

下面我们谈到 $\varphi(\cdot;x)$ 即指此引理中的函数．

现在转入本节的主要目的．

定理 2.10 设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的完全非酉的压缩算子．那么(1)

$$V: x\longmapsto D_{T^*}(I-e^{it}T^*)^{-1}x\oplus\varphi(e^{it};x),\quad x\in\mathscr{H},\tag{2.18}$$

是 $\mathscr{H}$ 到 Hilbert 空间

$$\hat{\mathscr{H}}=H^2(\mathfrak{D}_{T^*})\oplus\overline{\Delta_T L^2(\mathfrak{D}_T)}\ominus\{\Theta_T h\oplus\Delta_T h\mid h\in H^2(\mathfrak{D}_T)\}$$

上的酉算子．(2) 向量 $u\oplus v\in\hat{\mathscr{H}}$ 的充要条件是

$$\Theta_T^* u+\Delta_T(v)\perp H^2(\mathfrak{D}_T).\tag{2.19}$$

(3) 算子 $\hat{T}=VTV^{-1}$ 具有如下的形式

$$\hat{T}(u\oplus v)=(e^{it}u(e^{it})-\Theta_T(e^{it})a)\oplus(e^{it}v(e^{it})-\Delta_T(e^{it})a),\quad u\oplus v\in\hat{\mathscr{H}},\tag{2.20}$$

其中

$$a=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{it}(\Theta_T(e^{it})^*u(e^{it})+\Delta_T(e^{it})v(e^{it}))dt.$$

而且

$$\hat{T}^*[u\oplus v]=e^{-it}[u(e^{it})-u(0)]\oplus e^{-it}v(e^{it}),\quad u\oplus v\in\hat{\mathscr{H}}.\tag{2.21}$$

证 (i) 要点在于证明 V 是酉算子．由 (2.8) 和 (2.16) 可知 V 是等距算子．现证 $V\mathscr{H}=\hat{\mathscr{H}}$．任取 $x\in\mathscr{H}$，$y\in\mathfrak{D}_T$，当 l 为非负整数时，由 (1.5) 可知

$$\begin{aligned}
&(D_{T^*}(I-(\cdot)T^*)^{-1}x,\Theta(\cdot)(\cdot)^l y)\\
&=\lim_{r\to1-0}(\Theta(r(\cdot))^*D_{T^*}(I-r(\cdot)T^*)^{-1}x,(\cdot)^l y)\\
&=\lim_{r\to1-0}(D(I-r\overline{(\cdot)}T)^{-1}(r\overline{(\cdot)}I-T^*)\\
&\qquad(I-r(\cdot)T^*)^{-1}x,(\cdot)^l y)\\
&=\lim_{r\to1-0}\frac{1}{r}(D(I-r\overline{(\cdot)}T)^{-1}\overline{(\cdot)}x,(\cdot)^l y)\\
&\qquad-\lim_{r\to1-0}\frac{1-r^2}{r}(D(I-r\overline{(\cdot)}T)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\cdot (I - r(\cdot)T^{*})^{-1}(\cdot)x, (\cdot)^l y). \tag{2.22}$$

然而(2.22)最后一式第一项中未取极限前等于

$$\frac{1}{r}(x, (\cdot)^{l+1}(I - r(\cdot)T^*)^{-1}Dy) = 0,$$

再利用(2.10)和(2.14—16)可知(2.22)应等于

$$-(A_*T^{*l+1}x, A_*Dy) = -(\varphi(\cdot; T^{*l+1}x), \varphi(\cdot; Dy))$$
$$= -(\varphi(\cdot; x), \Delta(\cdot)(\cdot)^l y).$$

这就是

$$(Vx, \Theta(\cdot)(\cdot)^l y \oplus \Delta(\cdot)(\cdot)^l y) = 0. \tag{2.23}$$

由于$\{\Theta(\cdot)(\cdot)^l y \oplus \Delta(\cdot)(\cdot)^l y \mid l \geqslant 0, y \in \mathfrak{D}\}$的线性组合全体在

$$\mathcal{N} = \{\Theta h \oplus \Delta h \mid h \in H^2(\mathfrak{D})\}$$

中稠密,由(2.23)可知$V\mathcal{H} \perp \mathcal{N}$.

若记$\mathcal{L} = V\mathcal{H} \oplus \mathcal{N}$,那么为了证$V$为酉算子,只须证

$$H^2(\mathfrak{D}_{T^*}) \oplus \overline{\Delta L^2(\mathfrak{D}_T)} = \mathcal{L}. \tag{2.24}$$

我们先证明$\mathcal{L}$对算子

$$U: u \oplus v \longmapsto e^{it}u \oplus e^{it}v$$

不变. 由(1.4)可以知道

$$e^{it}D_{T^*}(I - e^{it}T^*)^{-1}x = D_{T^*}(I - e^{it}T^*)^{-1}(e^{it}I - T)x$$
$$+ D_{T^*}(I - e^{it}T^*)^{-1}Tx = \Theta(e^{it})D_Tx$$
$$+ D_{T^*}(I - e^{it}T^*)^{-1}Tx, \tag{2.25}$$

又由(2.14—15)得到

$$e^{-it}\Delta(e^{it})Dx = \varphi(e^{it}; D^2x) = \varphi(e^{it}; x)$$
$$- \varphi(e^{it}; T^*Tx) = \varphi(e^{it}; x) - e^{-it}\varphi(e^{it}; Tx). \tag{2.26}$$

由(2.25—26)得知

$$UVx = VTx + \Theta(\cdot)Dx \oplus \Delta(\cdot)Dx \in \mathcal{L}$$

又显然$U\mathcal{N} \subset \mathcal{N}$,因此

$$U\mathcal{L} \subset \mathcal{L}. \tag{2.27}$$

再利用(2.15)和(2.27)得到

$$D_{T^*}x \oplus 0 = D_{T^*}(I - e^{it}T^*)^{-1}x \oplus \varphi(e^{it}; x)$$
$$- e^{it}D_{T^*}(I - e^{it}T^*)^{-1}T^*x \oplus e^{it}\varphi(e^{it}; T^*x)$$

$$= Vx - UVTx \in \mathscr{L}.$$

又由 (2.27)，当 $n \geqslant 0$ 时，$U^n\mathscr{L} \subset \mathscr{L}$，所以 $e^{int}D_{T^*}x \oplus 0 \in \mathscr{L}$. 由于 $\mathscr{L}$ 是闭子空间，所以

$$H^2(\mathfrak{D}_{T^*}) \oplus \{0\} \subset \mathscr{L}. \tag{2.28}$$

又从 (2.14—15)，我们知道

$$\varphi(e^{it}; T^{*n-1}Dx) = e^{-nit}\Delta(e^{it})x, \quad n = 1, 2, \cdots$$

再从 (2.28) 我们得到

$$0 \oplus e^{-int}\Delta(e^{it})x = VT^{*n-1}Dx$$
$$- D_*(I - e^{it}T^*)^{-1}T^{*n-1}Dx \oplus 0 \in \mathscr{L}$$

再利用 $U^n\mathscr{L} \subset \mathscr{L} (n \geqslant 0)$ 得到

$$\{0\} \oplus \overline{\Delta L^2(\mathfrak{D})} \subset \mathscr{L}. \tag{2.29}$$

从 (2.28—29) 得到 (2.24). 因此 $V\mathscr{H} = \hat{\mathscr{H}}$，即 V 为酉算子.

(3) 从

$$D_*(I - e^{it}T^*)^{-1}T^*x = e^{it}(D_*(I - e^{it}T^*)^{-1}x - D_*x)$$

及 (2.15) 立即得到 (2.21).

(2) 由 (2.21) 可以算出当 $u \oplus v \in \hat{\mathscr{H}}$，$u_1 \oplus v_1 \in \hat{\mathscr{H}}$ 时，

$$(\hat{T}(u \oplus v), u_1 \oplus v_1) = (u \oplus v, \hat{T}^*(u_1 \oplus v_1))$$
$$= (U(u \oplus v), u_1 \oplus v_1)$$

因此

$$\hat{T}u \oplus v = U(u \oplus v) + f. \tag{2.30}$$

此地 $f \in \mathscr{L} \ominus \hat{\mathscr{H}} = \mathscr{N}$. 因此必有 $h \in H^2(\mathfrak{D})$ 使

$$f = \Theta h \oplus \Delta h, \tag{2.31}$$

今决定 h. 由于 $\hat{T}(u \oplus v) \in \mathscr{H}$，由 (3) 和

$$\Theta^*\Theta + \Delta = I \tag{2.32}$$

立即算出

$$(\cdot)[\Theta(\cdot)^*u(\cdot) + \Delta v] + h \perp H^2(\mathfrak{D}), \tag{2.33}$$

但 $u \oplus v$ 又满足 (2.19)，即

$$\Theta^*(e^{it})u(e^{it}) + \Delta(e^{it})v(e^{it}) \sim \sum_{n=1}^{\infty} e^{-int}a_n, \tag{2.34}$$

因此由 (2.32—33) 可知

$$a_1 + h \perp H^2(\mathfrak{D}),$$

但 $h \in H^2(\mathfrak{D})$，所以 $h = -a_1$. 这就得到 (2.20). 证毕.

系 2.11 设 T 为 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的压缩算子，则必有 Hilbert 空间 $\hat{\mathscr{H}} \supset \mathscr{H}$ 和 $\hat{\mathscr{H}}$ 中酉算子 U 使

$$T^n = PU^n|_{\mathscr{H}}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots, \tag{2.35}$$

其中 P 为 $\hat{\mathscr{H}}$ 到 $\mathscr{H}$ 的投影算子.

证 不妨设 T 为完全非酉的压缩算子，而且 T 为定理 2.10 中的模型 $\hat{T}$, $\mathscr{H}$ 即为 $\hat{\mathscr{H}}$. 这时只要取

$$\hat{\mathscr{H}} = L^2(\mathfrak{D}_*) \oplus \overline{\Delta L^2(\mathfrak{D})}$$

U 为算子 $u \oplus v \longmapsto e^{it}u \oplus e^{it}v$, $u \oplus v \in \hat{\mathscr{H}}$. 那么由(2.21)容易算出

$$T^{*n} = PU^{*n}|_{\mathscr{H}}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

于是取 * 后即得 (2.35).

现在我们可以给出一般压缩算子的函数模型. 根据定理 2.3, 定理 III, 2.4 和定理 2.10 立即得到

定理 2.12 设 T 是可析 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的压缩算子，

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}^{(u)} \oplus \mathscr{H}^{(0)}$$

为相应于 T 的分解使 $T^{(u)} = T|_{\mathscr{H}^{(u)}}$ 为酉算子，$T^{(0)} = T|_{\mathscr{H}^{(0)}}$ 为完全非酉的. $P^{(u)}$, $P^{(0)}$ 为 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}^{(u)}$ 和 $\mathscr{H}^{(0)}$ 上的投影. 那么必有可析 Hilbert 空间 ε, 测度空间 $\Omega = (C_1, \mathfrak{B}, \mu)$, 其中 $\mu = m + \nu$, m 为 Lebesgue 测度，ν 为奇异测度，(标准的)投影算子值函数 $R(\cdot)$, 又有 $\mathscr{H}^{(u)}$ 到 $L^2(\Omega, \varepsilon, R(\cdot))$ 上的酉算子 $Z: x \longmapsto f(\cdot; x)$ 使算子

$$\begin{aligned} W: x \longmapsto\ & D_{T^*}(I - e^{it}T^*)^{-1}x \oplus \varphi(e^{it}; P^{(0)}x) \\ & \oplus f(e^{it}; P^{(u)}x), \quad x \in \mathscr{H}. \end{aligned} \tag{2.36}$$

为 $\mathscr{H}$ 到

$$\begin{aligned} \hat{\mathscr{H}} = & H^2(\mathfrak{D}_{T^*}) \oplus \overline{\Delta_T L^2(\mathfrak{D}_T)} \ominus \{\Theta_T h \oplus \Delta_T h \mid h \in H^2(\mathfrak{D}_T)\} \\ & \oplus L^2(\Omega, \varepsilon, R(\cdot)) \end{aligned}$$

上的酉算子. 而且相应的 $\hat{T} = WTW^{-1}$ 具有如下的形式

$$\begin{aligned} \hat{T}(u \oplus v \oplus f) = & (e^{it}u(e^{it}) - \Theta_T(e^{it})a) \oplus (e^{it}v(e^{it}) \\ & - \Delta_T(e^{it})a) \oplus e^{it}f(e^{it}), \end{aligned} \tag{2.37}$$

其中

$$a=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{it}(\Theta_T(e^{it})^*u(e^{it})+\Delta_T(e^{it})v(e^{it}))dt. \quad (2.38)$$

而

$$\hat{T}^*(u\oplus v\oplus f)=e^{-it}(u(e^{it})-u(0))\oplus e^{-it}v(e^{it})\oplus e^{-it}f(e^{it}). \quad (2.39)$$

例 特别，当 T 为等距算子时，这时 $\mathfrak{D}_T=0$，$\Theta_T(\cdot)=0$. 因此 $\hat{\mathscr{H}}$ 退化为

$$\hat{\mathscr{H}}=H^2(\mathfrak{D}_{T^*})\oplus L^2(\Omega,\varepsilon,R(\cdot)),$$

而

$$\hat{T}(u\oplus f)=e^{it}u(e^{it})\oplus e^{it}f(e^{it}).$$

所以 T 的完全非酉部分 $T^{(0)}$ 的函数模型是 Hardy 空间 $H^2(\mathfrak{D}_{T^*})$上的乘算子 $u(\cdot)\longmapsto(\cdot)u(\cdot)$. 这样的 $T^{(0)}$ 又称为单向平移算子. 因此等距算子分解为单向平移算子和酉算子的直交和. 空间也作相应的分解. 这种分解又称为 Wold 分解.

定理 2.13 设 $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_*$ 是两个可析 Hilbert 空间. $\{\mathfrak{D},\mathfrak{D}_*,\Theta(\cdot)\}$ 是单位圆上的压缩算子值解析函数，$L^2(\Omega,\varepsilon,R(\cdot))$ 如定理 2.12，作

$$\Delta(\cdot)=(I-\Theta(\cdot)^*\Theta(\cdot))^{1/2},$$

$$\hat{\mathscr{H}}=H^2(\mathfrak{D}_*)\oplus\overline{\Delta L^2(\mathfrak{D})}\ominus\{\Theta h\oplus\Delta h\,|\,h\in H^2(\mathfrak{D})\}$$
$$\oplus L^2(\Omega,\varepsilon,R(\cdot)).$$

又作 $\hat{\mathscr{H}}$ 中算子 $\hat{T}$ 如下：当 $u\oplus v\ominus f\in\hat{\mathscr{H}}$ 时，

$$\hat{T}(u\ominus v\oplus f)=(e^{it}u(e^{it})-\Theta(e^{it})a)$$
$$\oplus(e^{it}v(e^{it})-\Delta(e^{it})a)\oplus e^{it}f(e^{it}),$$

其中 $a=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{it}(\Theta(e^{it})^*u(e^{it})+\Delta(e^{it})v(e^{it}))dt$. 那么 $\hat{T}$ 是 $\hat{\mathscr{H}}$ 中的压缩算子.

另外我们还可以把空间 $\overline{\Delta L^2(\mathfrak{D})}$ 更加明确地表达出来. 我们记 $R_\Delta(e^{i\theta})$ 为 $\mathfrak{D}$ 到 $\overline{\Delta(e^{i\theta})\mathfrak{D}}$ 上的投影算子，那么 $R_\Delta(\cdot)$ 为强可测的投影算子值函数，我们记

$$R_\Delta L^2(\mathfrak{D})=\{R_\Delta(\cdot)f(\cdot)\,|\,f\in L^2(\mathfrak{D})\}.$$

这是 $L^2(\mathfrak{D})$ 的闭子空间，也成为 Hilbert 空间. 这时有

引理 2.14 $$\overline{\Delta L^2(\mathfrak{D})} = R_\Delta L^2(\mathfrak{D}). \tag{2.40}$$

事实上，显然有 $\overline{\Delta L^2(\mathfrak{D})} \subset R_\Delta L^2(\mathfrak{D})$. 今证

$$R_\Delta L^2(\mathfrak{D}) \subset \overline{\Delta L^2(\mathfrak{D})}. \tag{2.41}$$

作函数列

$$\varphi_n(\lambda) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2n}, \\ 2n\lambda - 1, & \frac{1}{2n} \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} \leqslant \lambda \leqslant 1. \end{cases}$$

利用 $\Delta(e^{it})$ 的谱分解易证：当 $x \in \mathfrak{D}$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(\Delta(e^{it}))x - R_\Delta(e^{it})x\| = 0 \tag{2.42}$$

作连续函数 $\psi_n(\lambda) = \varphi_n(\lambda)/\lambda$，（当 $0 < \lambda \leqslant 1$），又 $\psi(0) = 0$. 那么对任一 $f \in L^2(\mathfrak{D})$，$\psi_n(\Delta)f \in L^2(\mathfrak{D})$. 但

$$\varphi_n(\Delta) = \Delta\psi_n(\Delta),$$

所以 $\varphi_n(\Delta)u \in \overline{\Delta L^2(\mathfrak{D})}$. 由于 $\|\varphi_n(\Delta(e^{it}))f(e^{it})\|_{\mathfrak{D}} \leqslant \|f(e^{it})\|_{\mathfrak{D}}$，由 Lebesgue 控制收敛定理可知当 $n, m \to \infty$ 时

$$\|\varphi_n(\Delta)f - \varphi_m(\Delta)f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|\varphi_n(\Delta(e^{it}))f(e^{it}) - \varphi_m(\Delta(e^{it}))f(e^{it})\|^2 dt \to 0$$

因此必有 $g \in \overline{\Delta L^2(\mathfrak{D})}$ 使

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(\Delta)f - g\|_{L^2(\mathfrak{D})} = 0.$$

这时必有自然数列 $\{n_k\}$ 使对几乎所有 $e^{it} \in c_1$

$$\lim_{k\to\infty} \|\varphi_{n_k}(\Delta(e^{it}))f(e^{it}) - g(e^{it})\|_{\mathfrak{D}} = 0$$

成立. 于是对几乎所有的 e^{it} 成立着

$$g(e^{it}) = R_\Delta(e^{it})f(e^{it}).$$

这就证明了 $R_\Delta f \in \overline{\Delta L^2(\mathfrak{D})}$. 由此知 (2.41) 成立，从而 (2.40) 成

立.

§3 不变子空间

本节中我们将利用定理 2.11 中所提供的压缩算子 T 的函数模型,把它的不变子空间形式与 $\Theta_T(\cdot)$ 的某种形式分解联系起来.

1. 子空间的分析

设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的压缩算子. $\mathscr{H}_1$ 是 T 的一个不变子空间. 我们注意尽管 $\mathscr{H}$ 可按定理 2.3 分解为 $\mathscr{H}^{(0)}\oplus\mathscr{H}^{(u)}$, $\mathscr{H}_1$ 未必可分解为

$$\mathscr{H}_1=\mathscr{H}_1^{(0)}\oplus\mathscr{H}_1^{(u)},\quad \mathscr{H}_1^{(0)}\subset\mathscr{H}^{(0)},\quad \mathscr{H}_1^{(u)}\subset\mathscr{H}^{(u)}.$$

而且 $\mathscr{H}_1^{(0)}$, $\mathscr{H}_1^{(u)}$ 也未必是 $T^{(0)}$ 和 $T^{(u)}$ 的不变子空间. 因此我们在研究不变子空间时, 定理 2.3 中的分解并无直接帮助. 而且也没有理由要限于对完全非酉的压缩算子来讨论. 因此我们用定理 2.12 或定理 2.13 中的函数模型. 在本节中就假设 $\mathscr{H}=\hat{\mathscr{H}}$, $T=\hat{T}$.

记

$$G_+=\{\Theta h\oplus\Delta h\oplus 0\,|\,h\in H^2(\mathfrak{D})\},$$
$$G=\{\Theta v\oplus\Delta v\oplus 0\,|\,v\in L^2(\mathfrak{D})\},$$
$$\mathscr{R}=L^2(\mathfrak{D}_*)\oplus R_\Delta L^2(\mathfrak{D})\oplus L^2(\Omega,\varepsilon,R(\cdot)),$$
$$\mathscr{R}_+=H^2(\mathfrak{D}_*)\oplus R_\Delta L^2(\mathfrak{D})\oplus L^2(\Omega,\varepsilon,R(\cdot)),$$
$$\hat{\mathscr{R}}=L^2(\mathfrak{D}_*)\oplus L^2(\mathfrak{D})\oplus L^2(\Omega,\varepsilon,R(\cdot)),$$

这时 $\mathscr{H}=\mathscr{R}_+\ominus G_+$. 记 P_+ 为 $\mathscr{R}_+$ 到 $\mathscr{H}$ 上的投影算子. $\hat{P}$ 为 $\hat{\mathscr{R}}$ 到 $\mathscr{H}$ 上的投影. 再作算子

$$U(u\oplus v\oplus f)(e^{it})=e^{it}u(e^{it})\oplus e^{it}v(e^{it})\oplus e^{it}f(e^{it}).$$

它可以看成 $\hat{\mathscr{R}}$ 中及其子空间中的算子. 又作等距算子

$$U_+=U|_{\mathscr{R}_+}.$$

那么 $U_+\mathscr{R}_+\subset\mathscr{R}_+$, 而且当 $u\oplus v\oplus f\in\mathscr{R}_+$ 时,

$$U_+^*(u\oplus v\oplus f)(e^{it})=e^{-it}(u(e^{it})-u(0))\oplus e^{-it}v(e^{it})\oplus e^{-it}f(e^{it}).\tag{3.1}$$

我们现在着手分析 T 的不变子空间的形式.

引理 3.1 设 $\mathscr{H}_1$ 是 T 的不变子空间,记 $\mathscr{H}_2 = \mathscr{H} \ominus \mathscr{H}_1$.

$$\mathscr{R}_- = R_\Delta L^2(\mathfrak{D}) \oplus L^2(\Omega, \varepsilon, R(\cdot)).$$

那么必有分解式 $\mathscr{R}_- = \mathscr{R}_1 \oplus \mathscr{R}_2$, 使 $U|_{\mathscr{R}_1}$ 与 $U|_{\mathscr{R}_2}$ 都是酉算子,又有 $\mathscr{R}_0$ 使 $U|_{\mathscr{R}_0}$ 为单向平移算子,而使

$$\mathscr{H}_1 = [\mathscr{R}_0 \oplus \mathscr{R}_1] \ominus G_+, \quad \mathscr{H}_2 = [H^2(\mathfrak{D}_*) \oplus \mathscr{R}_2] \ominus \mathscr{R}_0. \tag{3.2}$$

证 显然 $\mathscr{H}_2$ 是 T^* 的不变子空间, 由 (2.39) 和 (3.1) 可知

$$T^* = U_+^*|_{\mathscr{H}},$$

因此 $\mathscr{R}' = \mathscr{R}_+ \ominus \mathscr{H}_2$ 成为 U_+ 的不变子空间,这样一来, $U_+|_{\mathscr{R}'} = U|_{\mathscr{R}'}$ 是 $\mathscr{R}'$ 中等距算子, 按照 §2 中例所说 $\mathscr{R}'$ 按等距算子 $U_+|_{\mathscr{R}'}$ 有 Wold 分解

$$\mathscr{R}' = \mathscr{R}_0 \oplus \mathscr{R}_1,$$

使 $U_+|_{\mathscr{R}_0}$ 为单向平移算子,而 $U_+|_{\mathscr{R}_1}$ 是酉算子. 由于 U_+ 在

$$H^2(\mathfrak{D}_*) = \mathscr{R}_+ \ominus \mathscr{R}_-$$

上是完全非酉的,而 $\mathscr{R}_1 \subset \mathscr{R}_+$. 所以

$$\mathscr{R}_1 \subset \mathscr{R}_-,$$

记 $\mathscr{R}_2 = \mathscr{R}_- \ominus \mathscr{R}_1$, 那么

$$\mathscr{H}_1 = \mathscr{R}_+ \ominus G_+ \ominus \mathscr{H}_2 = \mathscr{R}' \ominus G,$$

$$\mathscr{H}_2 = H^2(\mathfrak{D}_*) \oplus \mathscr{R}_- \ominus G \ominus \mathscr{H}_1,$$

由此即得 (3.2). 证毕.

为方便起见,此后记

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{D}_*, \quad \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{D}, \quad \mathfrak{E}_3 = \varepsilon. \tag{3.3}$$

又作 Hilbert 空间

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 \oplus \mathfrak{E}_2 \oplus \mathfrak{E}_3. \tag{3.4}$$

把 $\mathfrak{E}$ 中算子 A 写成矩阵 (A_{ij}) 形式, 其中 A_{ij}: $\mathfrak{E}_j \to \mathfrak{E}_i$. 由于 $\mu = m + \nu$, $\nu \perp m$. 设 $F \in \mathfrak{B}$, $m(F) = 0$, $\nu(C_1 \backslash F) = 0$. 我们把 $\mathscr{R}$ 看成 $L^2(\Omega, \mathfrak{E})$ 的子空间,即当 $u \oplus v \oplus f \in \mathscr{R}$ 时,我们把 $u \oplus v \oplus f$ 与 $L^2(\Omega, \mathfrak{E})$ 中的函数

$$h(e^{i\theta}) = \begin{cases} 0 \oplus 0 \oplus f(e^{it}), & t \in F, \\ u(e^{it}) \oplus v(e^{it}) \ominus f(e^{it}), & t \in C_1 \backslash F \end{cases}$$

等同起来．令 $P_{\mathscr{R}_j}$ 为 $L^2(\Omega, \mathfrak{E})$ 到 $\mathscr{R}_j$ 的投影算子．由于 $P_{\mathscr{R}_j}$ 与 U 可以交换，根据定理 III，2.4，存在 Ω 上投影算子值的可测函数 $P_j(\cdot)$ 使得

$$(P_{\mathscr{R}_j}f)(\cdot) = P_j(\cdot)f(\cdot), \quad f \in L^2(\Omega, \mathfrak{E}).$$

现在来决定 $P_j(\cdot)$ 的形式．我们记

$$R_2(e^{it}) = R_\Delta(e^{it}), \quad R_3(e^{it}) = R(e^{it}).$$

引理 3.2 当 $j = 2$ 或 3 时，存在 $\mathfrak{E}$ 到 $\mathfrak{E}_j$ 的三个互相直交的子空间的投影算子 $P_{1j}(e^{it})$，$P_{2j}(e^{it})$ 和 $Q_j(e^{it})$，半正定算子 $A_{kj}(e^{it})$，$k = 1, 2$，它们具有关系式

$$P_{1j}(e^{it}) + P_{2j}(e^{it}) + Q_j(e^{it}) = R_j(e^{it}), \quad j = 2, 3, \tag{3.5}$$

和

$$A_{1j}(e^{it}) + A_{2j}(e^{it}) = Q_j(e^{it}), \quad j = 2, 3. \tag{3.6}$$

又有以 $Q_3(e^{it})\mathfrak{E}_3$ 为始域，$Q_2(e^{it})\mathfrak{E}_2$ 为终域的部分等距算子 $V(e^{it})$ 满足条件

$$(Q_2(e^{it}) - A_{k2}(e^{it}))V(e^{it}) = V(e^{it})A_{k3}(e^{it}), \tag{3.7}$$

使得 $P_k(e^{it})$，$k = 1, 2$ 成为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & B_{23} \\ 0 & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

其中 $B_{22} = P_{k2}(e^{it}) + A_{k2}(e^{it})$，$B_{33} = P_{k3}(e^{it}) + A_{k3}(e^{it})$，

$B_{23} = (-1)^k(A_{k2}(e^{it}) - A_{k2}(e^{it})^2)^{1/2}V(e^{it})$，

$B_{32} = (-1)^k(A_{k3}(e^{it}) - A_{k3}(e^{it})^2)^{1/2}V(e^{it})^*$．

证 我们暂且固定一点 e^{it}，同时凡标示函数值时都省去 e^{it}．记 P_k 为 $(P_{kij})_{i,j=1,2,3}$．由于

$$\mathscr{R}_k \subset \{0\} \oplus L^2(\mathfrak{D}) \oplus L^2(\Omega, \varepsilon, R(\cdot)).$$

所以 $P_{k1j} = 0$，$k = 1, 2$，$j = 1, 2, 3$．再由 P_k 的自共轭性立即可知

$$P_{kj1} = 0, \quad k = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3.$$

因此只须研究 P_{kij}，$i, j = 2, 3$ 就行了．由于

$$P_k = P_k^* = P_k^2$$

可知P_{kii}, $i=2,3$为自共轭的，$P_{k23}=P_{k32}^*$. 而且

$$P_{k22}-P_{k22}^2=P_{k23}P_{k23}^*,\quad P_{k33}-P_{k33}^2=P_{k23}^*P_{k23},\tag{3.9}$$

$$P_{k23}P_{k33}=(I-P_{k22})P_{k23}.\tag{3.10}$$

现在我们来解方程组(3.9—10). 由(3.9)可知$0\leqslant P_{kjj}\leqslant I$. 令$Q_{kj}$为$\mathfrak{E}$到

$$(P_{kjj}-P_{kjj}^2)\mathfrak{E}_j,\quad j=2,3$$

的投影算子. V_k为以$Q_{k3}\mathfrak{E}$为始域，以$Q_{k2}\mathfrak{E}$为终域，而且在$(Q_{k3}\mathfrak{E})^\perp$上为零的部分等距算子，那么由(3.9)可知

$$P_{k23}=V_k(P_{k33}-P_{k33}^2)^{1/2}.\tag{3.11}$$

这时(3.10)等价于

$$V_kP_{k33}=(I-P_{k22})V_k.\tag{3.12}$$

又记$A_{kj}=P_{kjj}Q_{kj}$, 那么(3.11)成为

$$V_kA_{k3}=(Q_2-A_{k2})V_k.$$

又作$P_{kj}=P_{kjj}-Q_{kj}$, 那么P_{kj}是投影算子(它的值域为P_{kjj}的相应于特征值1的特征向量空间). 由于

$$P_{\mathfrak{H}_1}+P_{\mathfrak{H}_2}=P_{\mathfrak{H}_-},$$

可知

$$P_{1jj}+P_{2jj}=R_j,\quad j=2,3,$$

$$P_{123}+P_{223}=0.\tag{3.13}$$

由(3.9)和(3.13)可知当$k=2, j=3$或$k=3, j=2$时

$$P_{1jj}-P_{1jj}^2=P_{1jk}P_{1jk}^*=P_{2jk}P_{2jk}^*=P_{2jj}-P_{2jj}^2.\tag{3.14}$$

所以$Q_{1j}=Q_{2j}$, $j=2,3$. 我们把Q_{kj}简记为Q_j. 又由(3.13)得

$$P_{1j}+P_{2j}+A_{1j}+A_{2j}=R_j,\quad j=2,3,\tag{3.15}$$

于是可知$P_{1j}\perp P_{2j}$. 而且由(3.13)和(3.15)得到

$$A_{1j}+A_{2j}=(P_{1jj}+P_{2jj})Q_j=R_jQ_j=Q_j.$$

这就是(3.6). 由(3.6)和(3.15)得到(3.5). 再由(3.12)和(3.13)得到

$$V_1(P_{133}-P_{133}^2)^{1/2}=P_{123}=-P_{223}=V_2(P_{233}-P_{233}^2)^{1/2}.$$

因此$V_1=-V_2$, 我们记$V=V_2$, 则$V_k=(-1)^kV$, $k=1,2$. 于是P_k形如(3.8). 证毕.

现在利用引理 3.2 中的分析求出空间 $\mathscr{R}_k$ 的形式如下:

引理 3.3 空间 $\mathscr{R}_k$ 的形式如下:

$$\mathscr{R}_k = \{0\oplus(f(\cdot) + A_{k2}(\cdot)^{1/2}g(\cdot))\oplus(h(\cdot) + (-1)^k A_{k3}(\cdot)^{1/2}V^*(\cdot)g(\cdot)) \mid f\in P_{k2}L^2(\mathfrak{D}), g\in Q_2L^2(\mathfrak{D}), h\in P_{k3}L^2(\Omega, \varepsilon)\}, \quad k=1, 2, \tag{3.16}$$

同时

$$\overline{P_k G} = \{0\oplus(f + A_{k2}^{1/2}g)\oplus(-1)^k A_{k3}V^*g \mid f\in P_{k2}L^2(\mathfrak{D}), g\in Q_2L^2(\mathfrak{D})\}. \tag{3.17}$$

证 (1) 由引理 3.2, $\mathscr{R}_k$ 中向量的一般形式是

$$0\oplus[P_{k2}\varphi + A_{k2}\varphi + (-1)^k(A_{k2} - A_{k2}^2)^{1/2}V\phi] \oplus[P_{k3}\phi + A_{k3}\phi + (-1)^k(A_{k3} - A_{k3}^2)^{1/2}V^*\varphi], \tag{3.18}$$

其中 $\varphi\in L^2(\mathfrak{D})$, $\phi\in L^2(\Omega, \varepsilon)$. 因此

$$f = P_{k2}\varphi\in P_{k2}L^2(\mathfrak{D}),$$
$$h = P_{k3}\phi\in P_{k3}L^2(\Omega, \varepsilon).$$

记

$$g = A_{k2}^{1/2}\varphi + (-1)^k(Q_{\mathfrak{D}} - A_{k2})^{1/2}V\phi, \tag{3.19}$$

那么 $g\in Q_2L^2(\mathfrak{D})$. 利用 (3.7) 又得到

$$V^*(Q_2 - A_{k2})^{1/2}V = A_{k3}^{1/2}, \quad V^*A_{k2}^{1/2} = (Q_2 - A_{k3})^{1/2}V^*.$$

因此

$$(-1)^k A_{k3}^{1/2}V^*g = A_{k3}\phi + (-1)^k(A_{k3} - A_{k3}^2)^{1/2}V^*\varphi, \tag{3.20}$$

由 (3.18—20) 得知 $\mathscr{R}_k$ 必然包含在 (3.16) 等号右边的空间中.

另一方面, 对任何 $f\in P_{k2}L^2(\mathfrak{D})$, $g\in Q_2L^2(\mathfrak{D})$, $h\in P_{k3}L^2(\Omega, \varepsilon)$ 取

$$\varphi = f + A_{k2}^{1/2}g, \quad \phi = h + (-1)^k A_{k3}^{1/2}V^*g.$$

由于 $Q_2\perp P_{k2}$, $Q_3\perp P_{k3}$, 所以 $P_{k2}\varphi = f$, $P_{k3}\phi = h$.

又由于

$$A_{k2}f = 0, \quad (Q_2 - A_{k2})^{1/2}Vh = 0,$$
$$A_{k2}^{1/2}(A_{k2}^{1/2}g) + (Q_2 - A_{k2})^{1/2}V(A_{k3}^{1/2}V^*g) = 0.$$

因此 (3.19) 也成立. 这样一来, (3.16) 等号右边空间中的向量也形如 (3.18). 所以 (3.16) 成立.

(2) 再来证明 (3.17). 任取 $\Theta v \oplus \Delta v \oplus 0 \in G$, 其中 $v \in L^2(\mathfrak{D})$. 根据 (3.16), 必有 $f_k \in P_{k2}L^2(\mathfrak{D})$, $g_k \in Q_2L^2(\mathfrak{D})$ 和 $h_k \in P_{k3}L^2(\Omega, \varepsilon)$ 使

$$P_k(\Theta v \oplus \Delta v \oplus 0)$$
$$= 0 \oplus (f_k + A_{k2}^{1/2}g) \oplus (h_k + (-1)^k A_{k3}^{1/2} V^* g_k).$$

由于对一切 $f \in P_{k2}L^2(\mathfrak{D})$, $g \in Q_2L^2(\mathfrak{D})$ 和 $h \in P_{k3}L^2(\Omega, \varepsilon)$ 有

$$P_k(\Theta v \oplus \Delta v \oplus 0) - \Theta v \oplus \Delta v \oplus 0 \perp$$
$$0 \oplus (f + A_{k2}^{1/2}g) \oplus (h + (-1)^k A_{k3}^{1/2} V^* g).$$

并利用 (3.5—7) 我们得到

$$(f_k - P_{k2}\Delta v, f) + (g_k - A_{k2}^{1/2}\Delta v, g) + (h_k, h) = 0.$$

由于 f, g, h 的任意性可知

$$f_k = P_{k2}\Delta v, \quad g_k = A_{k2}^{1/2}\Delta v, \quad h_k = 0.$$

即知当 $v \in L^2(\mathfrak{D})$ 时,

$$P_k(\Theta v \oplus \Delta v \oplus 0)$$
$$= 0 \oplus (P_{k2}\Delta v + A_{k2}\Delta v) \oplus (-1)^k A_{k3}^{1/2} V^* A_{k2}^{1/2} \Delta v, \quad (3.21)$$

而 $\{\Delta v \mid v \in L^2(\mathfrak{D})\}$ 在 $R_2L^2(\mathfrak{D})$ 中稠密, 再由 (3.6) 即知 (3.17) 成立. 证毕.

2. 压缩解析函数的分解

为了研究压缩解析函数的分解, 我们先给出如下的

引理 3.4 设 $\mathfrak{D}_j$, $j = 1, 2$ 是可析 Hilbert 空间. 用 U_+ 表示 $H^2(\mathfrak{D}_j)$ 中单向平移算子

$$(U_+f)(e^{it}) = e^{it}f(e^{it}), \quad f \in H^2(\mathfrak{D}_j).$$

如果 Q 为 $H^2(\mathfrak{D}_1)$ 到 $H^2(\mathfrak{D}_2)$ 的压缩算子, 而且

$$QU_+ = U_+Q.$$

那么这时 Q 必然可唯一地延拓成 $L^2(\mathfrak{D}_1)$ 到 $L^2(\mathfrak{D}_2)$ 的压缩算子, 仍记为 Q, 使满足

$$UQ = QU.$$

此地 U 为 $L^2(\mathfrak{D}_j)$ 中的酉算子

$$(Uf)(e^{it}) = e^{it}f(e^{it}), \quad f \in L^2(\mathfrak{D}_j).$$

而且必有压缩解析函数 $\{\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \Theta(\cdot)\}$ 使当 $f \in H^2(\mathfrak{D}_1)$ 时,

$$(Qf)(\cdot)=\Theta(\cdot)f(\cdot), \tag{3.22}$$

证 显然可以把 Q 唯一地延拓成 $L^2(\mathfrak{D}_1)$ 到 $L^2(\mathfrak{D}_2)$ 中线性有界算子，使之适合如下条件，当 $f\in H^2(\mathfrak{D}_1)$，$n\geqslant 0$ 时，

$$QU^{-n}f=U^{-n}Qf.$$

因此这个 Q 与 U 交换. 类似于引理 III，2.4 可证必有可测函数 $\Theta(\cdot)$，对每个 e^{it}，$\Theta(e^{it})$ 为 $\mathfrak{D}_1$ 到 $\mathfrak{D}_2$ 的线性有界算子，而且 $\|\Theta(e^{it})\|\leqslant 1$ 使

$$(Qf)(e^{it})=\Theta(e^{it})f(e^{it}).$$

今证 $\Theta(e^{it})$ 是算子值解析函数 $\Theta(\lambda)$，$|\lambda|<1$ 的境界值. 事实上，若 a 是 $\mathfrak{D}_1$ 中一个向量，则 $a\in H^2(\mathfrak{D}_1)$. 因此

$$Qa=\Theta(\cdot)a\in H^2(\mathfrak{D}_2).$$

因此函数 $\Theta(e^{it})a$ 的 Fourier 展开式必为

$$\Theta(e^{it})a\sim\sum_{n=0}^{\infty}e^{nit}\Theta_n a.$$

其中 $\Theta_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-int}\Theta(e^{it})dt$ 为 $\mathfrak{D}_1$ 到 $\mathfrak{D}_2$ 的线性有界算子，由 Poisson 公式易知 $0<r<1$，$\varphi\in L^2(C_1)$ 时显然

$$\Theta(re^{it})a=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{|e^{i\theta}-re^{it}|}\Theta(e^{it})ad\theta.$$

于是可知 $\|\Theta(re^{it})\|\leqslant 1$，而且还可以证明当 $f\in H^2(\mathfrak{D}_1)$ 时

$$\lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|\Theta(re^{it})f(re^{it})-\Theta(e^{it})f(e^{it})\|^2dt=0.$$

所以 $\{\mathfrak{D}_1,\mathfrak{D}_2,\Theta(\cdot)\}$ 为压缩解析函数而且使 (3.22) 成立. 证毕.

根据 §2 例可知由于 $U_+|_{\mathscr{R}_0}$ 是单向平移算子，有辅助的可析 Hilbert 空间 $\mathscr{F}$，以及 $\mathscr{R}_1$ 到 $L^2(\mathscr{F})$ 的酉算子 $\Phi_{\mathscr{F}}$ 使

$$U_+|_{H^2(\mathscr{F})}\Phi_{\mathscr{F}}|_{\mathscr{R}_0}=\Phi_{\mathscr{F}}U_+|_{\mathscr{R}_0},\quad U\Phi_{\mathscr{F}}=\Phi_{\mathscr{F}}U|_{\mathscr{R}_1}.$$

令 $P_{H^2(\mathfrak{D}_*)}$，$P_{\mathscr{R}_0}$ 分别为 $\mathscr{R}_+$ 到 $H^2(\mathfrak{D}_*)$ 和 $\mathscr{R}_0$ 的投影算子，由引理 3.1

$$\mathscr{R}_0\subset H^2(\mathfrak{D}_*)\oplus\mathscr{R}_2,\quad G_+\subset\mathscr{R}_0\oplus\mathscr{R}_1,$$

因此当 $g\in G$，$h\in\mathscr{R}_0$ 时有

$$g = P_{\mathscr{R}_0}g + P_1 g, \quad h = P_{H^2(\mathfrak{D}_*)}h + P_2 h. \tag{3.23}$$

令 $\mathscr{R}_U$ 为 $\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} U^{-n}\mathscr{R}_0}$，那么由于 $\mathscr{R}_j$ 对 U^{-1} 不变，易知

$$G \subset \mathscr{R}_U \oplus \mathscr{R}_1, \quad \mathscr{R}_U \subset L^2(\mathfrak{D}_*) \oplus \mathscr{R}_2$$

令 $P_{\mathscr{R}_U}$，$P_{L^2(\mathfrak{D}_*)}$ 分别为到 $\mathscr{R}_U$，$L^2(\mathfrak{D}_*)$ 上的投影算子，因此当 $g \in G$，$h \in \mathscr{R}_U$ 时又有

$$g = P_{\mathscr{R}_U}g + P_{\mathscr{R}_1}g, \quad h = P_{L^2(\mathfrak{D}_*)}h + P_{\mathscr{R}_2}h, \tag{3.24}$$

于是当 $g \in G_+$，$f \in G$ 时，

$$P_{H^2(\mathfrak{D}_*)}g = P_{H^2(\mathfrak{D}_*)}P_{\mathscr{R}_0}g, \quad P_{L^2(\mathfrak{D}_*)}f = P_{L^2(\mathfrak{D}_*)}P_{\mathscr{R}_U}f, \tag{3.25}$$

又令 L 为 $L^2(\mathfrak{D})$ 到 G 的线性算子

$$L: f \longmapsto \Theta f \oplus \Delta f \oplus 0.$$

那么显然当 $h \in H^2(\mathfrak{D})$，$f \in L^2(\mathfrak{D})$ 时

$$P_{H^2(\mathfrak{D}_*)}Lh = \Theta h, \quad P_{L^2(\mathfrak{D}_*)}Lf = \Theta f, \tag{3.26}$$

又作算子 $S_1: L^2(\mathfrak{D}) \to L^2(\mathfrak{F})$ 和 $S_2: L^2(\mathfrak{F}) \to L^2(\mathfrak{D}_*)$ 如下：

$$S_1 f = \Phi_{1\mathfrak{F}} P_{\mathscr{R}_1} Lf, \quad S_2 f = P_{L^2(\mathfrak{D}_*)}(\Phi_{\mathfrak{F}})^{-1} f. \tag{3.27}$$

那么易知 S_j 都适合引理 2.4 中的条件. 因此分别有压缩解析函数 $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{D}, \Theta_1(\cdot)\}$ 和 $\{\mathfrak{D}_*, \mathfrak{F}, \Theta_2(\cdot)\}$ 使

$$(S_j f_j)(e^{it}) = \Theta_j(e^{it}) f_j(e^{it}), \quad j = 1, 2, \tag{3.28}$$

由 (3.25—28) 立即得到

$$\Theta(\cdot) = \Theta_2(\cdot)\Theta_1(\cdot). \tag{3.29}$$

令

$$\Delta_j(\cdot) = (I - \Theta_j(\cdot)^* \Theta_j(\cdot))^{1/2} \tag{3.30}$$

作算子

$$\Phi_{\mathscr{R}_1}: \overline{P_{\mathscr{R}_1}G} \to \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{D})}, \quad \Phi_{\mathscr{R}_1} P_{\mathscr{R}_1} g = \Delta_1 L^{-1} g, \ g \in G, \tag{3.31}$$

和

$$\Phi_{\mathscr{R}_2}: \overline{P_{\mathscr{R}_2}\mathscr{R}_U} \to \overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})}, \quad \Phi_{\mathscr{R}_2} P_{\mathscr{R}_2} k = \Delta_2 \Phi_{\mathfrak{F}} k, \ k \in \mathscr{R}_U. \tag{3.32}$$

由 (3.24) 和 (3.26—28) 可知当 $f \in L^2(\mathfrak{D})$ 时，

$$\begin{aligned}\|P_{\mathscr{R}_1}Lf\|^2 &= \|PLf\|^2 - \|P_{\mathscr{R}_U}Lf\|^2 \\ &= \|f\|^2 - \|\Theta_1(\cdot)f\|^2 = \|\Delta_1 f\|^2,\end{aligned}$$

因此 $\Phi_{\mathscr{R}_1}$ 是等距算子. 由 (3.30) 和 $\Phi_{\mathscr{R}_1}$ 的形式可知它是酉算子. 类似地 $\Phi_{\mathscr{R}_2}$ 也是酉算子.

再由 (3.21), (3.30—31) 和 $\Phi_{\mathscr{R}_1}$ 的酉性可知当 $v \in L^2(\mathfrak{D})$ 时,

$$\|(P_{12}+A_{12})\Delta v\|^2+\|A_{13}^{1/2}V^*A_{12}^{1/2}\Delta v\|^2=\|\Delta v\|^2.$$

于是可得

$$\Delta(P_{12}+A_{12})\Delta=\Delta_1 \tag{3.33}$$

我们作酉算子

$$Z=\Phi_{\mathscr{R}_2}\oplus\Phi_{\mathscr{R}_1}:\overline{P_{\mathscr{R}_2}\mathscr{R}_U}\oplus\overline{P_{\mathscr{R}_1}G}\to\overline{\Delta_2L^2(\mathfrak{F})}\oplus\overline{\Delta_1L^2(\mathfrak{D})},$$

现在来研究 Z 的具体形式.

当 $g\in G$ 时, 由 (3.24) 和 $P_{\mathscr{R}_2}P_{\mathscr{R}_1}=0$ 得到

$$P_{\mathscr{R}_2}g=P_{\mathscr{R}_2}P_{\mathscr{R}_U}g. \tag{3.34}$$

因此

$$\overline{P_{\mathscr{R}_2}P_{\mathscr{R}_U}G}=\overline{P_{\mathscr{R}_2}G}. \tag{3.35}$$

我们先考察 Z 在子空间 $\overline{P_{\mathscr{R}_2}G}\oplus\overline{P_{\mathscr{R}_1}G}$ 上的形式.

当 $u,v\in L^2(\mathfrak{D})$ 时, 由 (3.31—32) 和 (3.4) 可知

$$\begin{aligned}Z(P_{\mathscr{R}_2}Lv\oplus P_{\mathscr{R}_1}Lu)&=Z(P_{\mathscr{R}_2}P_{\mathscr{R}_U}Lv\oplus P_{\mathscr{R}_1}Lu)\\&=\Delta_2\Theta_1v\oplus\Delta_1u.\end{aligned}$$

再由 (3.21) 可知 Z 在 $P_{\mathscr{R}_2}G\oplus P_{\mathscr{R}_1}G$ 上的形式为

$$\begin{aligned}Z:[(P_{12}+A_{12})\Delta u\oplus(R_2-P_{12}-A_{12})\Delta v]\oplus V^*(A_{12}\\-A_{12}^2)^{1/2}\Delta(v-u)\to\Delta_2\Theta_1v\oplus\Delta_1u.\end{aligned} \tag{3.36}$$

当然 Z 在 $\overline{P_{\mathscr{R}_2}G}\oplus\overline{P_{\mathscr{R}_1}G}$ 上的形式完全由 (3.36) 决定了. 而且

$$Z(\overline{P_{\mathscr{R}_2}G}\oplus\overline{P_{\mathscr{R}_1}G})=\overline{\Delta_2\Theta_1L^2(\mathfrak{D})}\oplus\overline{\Delta_1L^2(\mathfrak{D})}. \tag{3.37}$$

我们再来考察空间 $\overline{P_{\mathscr{R}_2}\mathscr{R}_U}\ominus\overline{P_{\mathscr{R}_2}G}$. 由于它是 $\mathscr{R}_2\ominus\overline{P_{\mathscr{R}_2}G}$ 的子空间. 由引理 3.3 可知

$$\overline{P_{\mathscr{R}_2}\mathscr{R}_U}\ominus\overline{P_{\mathscr{R}_2}G}\subset P_{23}L^2(\Omega,\varepsilon).$$

由于 $\overline{P_{\mathscr{R}_2}\mathscr{R}_U}$ 与 $\overline{P_{\mathscr{R}_2}G}$ 都约化 U, 因此 $\overline{P_{\mathscr{R}_2}\mathscr{R}_U}\ominus\overline{P_{\mathscr{R}_2}G}$ 也约化 U. 再根据定理 III, 2.4 可知有投影算子值强可测函数 $\mathfrak{B}(e^{it})$, $e^{it}\in C_1$ 使

$$\mathfrak{B}(e^{it})\leqslant P_{23}(e^{it})$$

使

$$\overline{P_{\mathscr{R}_2}\mathscr{R}_U}\ominus\overline{P_{\mathscr{R}_2}G}=\mathfrak{B}L^2(\Omega,\varepsilon).$$

我们又作 $L^2(\Omega,\varepsilon)$ 到 $L^2(\mathfrak{F})$ 的算子 V_0 如下

$$V_0: h\longmapsto \Phi_{\mathscr{R}_2}(\mathfrak{B}h),\quad h\in L^2(\Omega,\varepsilon).$$

根据定理 III, 2.4 可知有 Ω 上的强可测算子值函数 $V_0(\cdot)$ 使对每个 $e^{it}\in C_1$, $V_0(e^{it})$ 为 ε 到 $\mathfrak{F}$ 的线性有界算子，而且

$$(V_0h)(\cdot)=V_0(\cdot)h(\cdot),\quad h\in L^2(\Omega,\varepsilon).$$

由于 $\Phi_{\mathscr{R}_2}$ 是酉算子，$\|\mathfrak{B}h\|=\|V_0h\|=\|(V_0^*V_0)^{1/2}h\|$. 因此可以认为

$$\mathfrak{B}(e^{it})=(V_0(e^{it})^*V_0(e^{it}))^{1/2}$$

即 $\mathfrak{B}(e^{it})$ 为始域以 $\Gamma(e^{it})=V_0(e^{it})V_0(e^{it})^*$ 为终域的部分等距算子，因此

$$Z:(\mathfrak{B}h)(\cdot)\to V_0(\cdot)h(\cdot),\quad h\in L^2(\Omega,\varepsilon),\tag{3.38}$$

而且

$$Z(\overline{P_{\mathscr{R}_2}\mathscr{R}_U}\ominus\overline{P_{\mathscr{R}_2}G})=\Gamma L^2(\mathfrak{F}).$$

记 $R_{\Delta_2}(e^{it})$ 为 $\mathfrak{F}$ 到 $\overline{\Delta_2(e^{it})\mathfrak{F}}$ 的投影算子，那么由 (3.37) 可知

$$(R_{\Delta_2}(\cdot)-\Gamma(\cdot))\mathfrak{F}=\overline{\Delta_2(\cdot)\Theta_1(\cdot)\mathfrak{D}}.\tag{3.39}$$

3. 主要结果

我们把前面所讨论的再适当地概括一下.

在本节中，我们始终设 $\{\mathfrak{D},\mathfrak{D}_*,\Theta(\cdot)\}$ 为压缩解析函数，

$$\Delta=(I-\Theta^*\Theta)^{1/2}.$$

我们考察 Hilbert 空间

$$\mathscr{H}=[H^2(\mathfrak{D}_*)\oplus\overline{\Delta L^2(\mathfrak{D})}\oplus L^2(\Omega,\varepsilon,R)]$$
$$\ominus\{\Theta h\oplus\Delta h\oplus 0\,|\,h\in H^2(\mathfrak{D})\}.\tag{3.40}$$

中的压缩算子

$$T(u\oplus v\oplus f)=(e^{it}u(e^{it})-\Theta(e^{it})a)\oplus(e^{it}v(e^{it})$$
$$-\Delta(e^{it})a)\oplus e^{it}f(e^{it}),\tag{3.41}$$

其中 $a=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{it}(\Theta(e^{it})^*u(e^{it})+\Delta(e^{it})v(e^{it}))dt$.

如果存在辅助 Hilbert 空间 $\mathfrak{F}$ 及压缩解析函数 $\{\mathfrak{D},\mathfrak{F},\Theta_1(\cdot)\}$

和 $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{D}_*, \Theta_2(\cdot)\}$ 使它们适合条件

$$\Theta(\lambda)=\Theta_1(\lambda)\Theta_2(\lambda), \quad |\lambda|\leqslant 1. \tag{3.42}$$

那么称 $\Theta=\Theta_1\Theta_2$ 为因子分解.

这时作 $\Delta_j=(I-\Theta_j^*\Theta_j)^{1/2}$, $j=1,2$. 那么必有 $\overline{\Delta(e^{it})\mathfrak{D}}$ 上唯一的自共轭半正定压缩算子 $\mathscr{A}_1(e^{it})$ 使

$$\Delta_1\mathscr{A}_1\Delta=\Delta_1^2.$$

记 $\mathscr{S}_1(e^{it})=\overline{(\mathscr{A}_1(e^{it})-\mathscr{A}_1(e^{it})^2)\mathfrak{D}}$, 又记 $\mathscr{S}_0(e^{it})=\overline{\Delta_2(e^{it})\mathfrak{F}}\ominus\overline{\Delta_2(e^{it})\Theta_1(e^{it})\mathfrak{D}}$. (这时 $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{S}_0$ 和 $\mathscr{S}_1$ 都是由因子分解而唯一地确定了的). 如果

$$\dim\mathscr{S}_1(e^{it})+\dim\mathscr{S}_0(e^{it})\leqslant\dim(R(e^{it})\varepsilon), \tag{3.43}$$

我们称因子分解 $\Theta=\Theta_2\Theta_1$ 相对于 $R(\cdot)$ 为正则的.

我们考察特殊情况下因子分解为正则的条件.

定理 3.5 (1) 当 $\dim(R(e^{it})\varepsilon)\geqslant\dim\mathfrak{D}+\dim\mathfrak{F}$ 时,任何一个相对于 $R(\cdot)$ 的因子分解都是正则的.(2)当 $R(\cdot)\equiv 0$ (即 $L^2(\Omega, \varepsilon, R(\cdot))$ 不出现)时, 因子分解 $\Theta=\Theta_2\Theta_1$ 为正则(即相对 0 为正则)的充要条件是 (i) $\mathscr{A}_1(e^{it})$ 为投影算子,和 (ii) $\overline{\Delta_2(e^{it})\Theta\mathfrak{F}}\subset\overline{\Theta_1(e^{it})\mathfrak{D}}$.

证 (1) 是显然的. 在 (2) 的情况下,这时因子分解为正则的充要条件是 $\mathscr{S}_1(e^{it})=\{0\}$ 和 $\mathscr{S}_0(e^{it})=\{0\}$. 但 $\mathscr{S}_1(e^{it})=\{0\}$ 等价于

$$\mathscr{A}(e^{it})=\mathscr{A}(e^{it})^2$$

即 $\mathscr{A}(e^{it})$ 为投影算子. 而 $\mathscr{S}_0(e^{it})=\{0\}$ 等价于

$$\overline{\Delta_2(e^{it})\mathfrak{F}}=\overline{\Delta_2(e^{it})\Theta_1(e^{it})\mathfrak{D}}$$

令 Λ 为 $\mathfrak{F}$ 到 $\overline{\Delta_2(e^{it})\mathfrak{F}}$ 上的投影算子,那么上式即为

$$\overline{\Lambda\Theta_1(e^{it})\mathfrak{D}}=\overline{\Lambda\mathfrak{F}}.$$

这就等价于定理中的条件(ii). 证毕.

当因子分解 $\Theta=\Theta_2\Theta_1$ 关于 $R(\cdot)$ 为正则时, 显然分别有 $R(e^{it})\mathfrak{D}$ 到 $\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{D}$ 的部分等距算子 $V_0(e^{it})$ 和 $V(e^{it})$, 分别以 $\mathscr{S}_0(e^{it})$ 和 $\mathscr{S}_1(e^{it})$ 为终域, 而且 $V_0(\cdot)$ 和 $V(\cdot)$ 都是可测的.

我们记 ε 到 $V_0(e^{it})^*\mathfrak{F}\oplus V(e^{it})^*\mathfrak{D}$ 的投影算子为 $\mathscr{A}(e^{it})$，那么 $\mathscr{A}(\cdot)$ 也是可测的．我们作酉算子

$$Z:\overline{\Delta L^2(\mathfrak{D})}\oplus\mathscr{A}L^2(\Omega,\varepsilon,R(\cdot))\to\overline{\Delta_2L^2(\mathfrak{F})}\oplus\overline{\Delta_1L^2(\mathfrak{D})} \quad (3.44)$$

如下：当 $u,v\in L^2(\mathfrak{D})$，$f\in L^2(\Omega,\varepsilon,R(\cdot))$ 时

$$\begin{aligned}Z([\mathscr{A}_1\Delta u+(I-\mathscr{A}_1)\Delta v]\oplus[V^*\\ \cdot(\mathscr{A}_1-\mathscr{A}_1^2)^{1/2}\Delta(v-u)+V_0^*V_0f])\\ =[\Delta_2\Theta_1v+V_0f]\oplus\Delta_1u.\end{aligned} \quad (3.45)$$

显然 Z 由因子分解 $\Theta=\Theta_2\Theta_1$ 和 V_0，V_1 而唯一地确定．称 V_0，V_1 为联系于正则因子分解 $\Theta=\Theta_2\Theta_1$ 的部分等距算子值函数．又称 Z 为联系于正则因子分解 $\Theta=\Theta_2\Theta_1$ 和 V_0，V_1 的酉算子．

定理 2.6 (1) 设 $\mathscr{H}_1$ 为 $\mathscr{H}$ 上压缩算子 T (3.41) 的不变子空间，$\mathscr{H}_2=\mathscr{H}\ominus\mathscr{H}_1$．那么必有 Θ 的相对于 $R(\cdot)$ 正则因子分解 $\Theta=\Theta_2\Theta_1$ 和联系于它的部分等距算子值函数 $V_0(\cdot)$，$V(\cdot)$ 以及酉算子 Z (见 (3.45))，使

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_1=\{\Theta_2u\oplus Z^{-1}(\Delta_2u\oplus v)\,|\,u\in H^2(\mathfrak{F}),\ v\in\overline{\Delta_1L^2(\mathfrak{D})},\\ \Theta_1^*u+\Delta_1v\perp H^2(\mathfrak{D})\}\oplus\mathfrak{B}_1L^2(\Omega,\varepsilon,R(\cdot)).\end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_2=\{u\oplus Z^{-1}(v\oplus0)\,|\,u\in H^2(\mathfrak{D}_*),\ v\in\overline{\Delta_2L^2(\mathfrak{F})},\\ \Theta_2^*u+\Delta_2v\perp H^2(\mathfrak{F})\}\oplus\mathfrak{B}_2L^2(\Omega,\varepsilon,R(\cdot)).\end{aligned} \quad (3.47)$$

此地 $\mathfrak{B}_j(\cdot)$ 为投影算子值可测函数而且

$$\mathfrak{B}_1(\cdot)+\mathfrak{B}_2(\cdot)+V_0(\cdot)^*V_0(\cdot)+V(\cdot)^*V(\cdot)=R(\cdot). \quad (3.48)$$

(2) 反之，若 $\Theta=\Theta_2\Theta_1$ 为相对于 $R(\cdot)$ 正则因子分解，那么对于任何联系于它的部分等距算子值函数 $V_0(\cdot)$，$V(\cdot)$ 和酉算子 Z 以及满足条件 (3.48) 的投影算子值函数 $\mathfrak{B}_j(\cdot)$ (至少存在一组这样的 V_0，V，Z，$\mathfrak{B}_j$)，由 (3.46) 作出的 $\mathscr{H}_1$ 必为 T 的不变子空间，而且 $\mathscr{H}_2=\mathscr{H}\ominus\mathscr{H}_1$ 必形如 (3.47)．

证 (1) 由 (3.29) 存在因子分解，而由 (3.33)，

$$\mathscr{A}_1(e^{it})=P_{12}(e^{it})+A_{12}(e^{it}).$$

因此 $\mathscr{S}_1(e^{it})$ 即为 $Q_3(e^{it})\mathfrak{D}$，因此

$$\dim\mathscr{S}_1(e^{it})=\dim Q_3(e^{it})\varepsilon.$$

再由 (3.39)，$\mathscr{S}_0(e^{it}) = \Gamma(e^{it})\mathfrak{F}$，由此

$$\dim \mathscr{S}_0(e^{it}) = \dim \Gamma(e^{it})\mathfrak{F} = \dim \mathfrak{B}(e^{it})\varepsilon.$$

由于

$$\mathfrak{B}(e^{it})\varepsilon \oplus Q_3(e^{it})\varepsilon \subset R(e^{it})\varepsilon,$$

可知 (3.43) 成立，即此因子分解相对于 $R(\cdot)$ 为正则的.

再由 (3.36) 和 (3.38) 知道 Z 形如 (3.45). 现在需要证明 (3.32) 中的 $\mathscr{H}_1$ 和 $\mathscr{H}_2$ 就形如 (3.46—47). 我们注意由 (3.23)，(3.27—28) 和 (3.32) 可知

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_0 &= \Phi_{\mathfrak{F}}^{-1}H^2(\mathfrak{F}) \\ &= \{P_{H^2(\mathfrak{D}_*)}\Phi_{\mathfrak{F}}^{-1}U + P_{\mathfrak{R}_2}\Phi_{\mathfrak{F}}^{-1}u \mid u \in H^2(\mathfrak{F})\} \\ &= \{\Theta_2 u \oplus \Phi_{\mathfrak{R}_2}^{-1}\Delta_2 u \mid u \in H^2(\mathfrak{F})\}.\end{aligned}$$

再由引理 3.3 和 (3.31) 可知

$$\mathscr{R}_1 = \{\Phi_{\mathfrak{R}}^{-1}v \mid v \in \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{D})}\} \oplus P_{13}L^2(\Omega, \varepsilon).$$

所以

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_1 = \{&\Theta_2 u \oplus Z^{-1}(\Delta_2 u \oplus v) \mid u \in H^2(\mathfrak{F}),\ v \in \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{D})}\} \\ &\ominus G \oplus P_{13}L^2(\Omega, \varepsilon),\end{aligned}$$

由于 (3.45)，G_+ 中向量的一般形式为

$$\Theta w \oplus \Delta w \oplus 0 = \Theta_2\Theta_1 w \oplus Z^{-1}(\Delta_2\Theta_1 w \oplus \Delta_1 w).$$

其中 $w \in H^2(\mathfrak{D})$，因此条件 $\Theta_2 u \oplus Z^{-1}(\Delta_2 u \oplus v) \perp G_*$ 即为对一切 $w \in H^2(\mathfrak{D})$ 有

$$(\Theta_2 u, \Theta_2\Theta_1 w) + (\Delta_2 u, \Delta_2\Theta_1 w) + (v, \Delta_1 w) = 0$$

这就是

$$(\Theta_1^* u + \Delta_1 v, w) = 0, \quad w \in H^2(\mathfrak{D}).$$

因此 (3.46) 成立，其中 $\mathfrak{B}_1 = P_{13}$，类似地得 (3.47). 也可以得到 (3.48).

(2) 由 (3.46) 和 (3.48) 可直接验证 (3.47) 中的 $\mathscr{H}_2 = \mathscr{H} \ominus \mathscr{H}_1$. 由于 (3.41) 可证

$$\begin{aligned}T^*(u \oplus v \oplus f) = e^{-it}(u(e^{it}) - u(0)) \oplus e^{-it}v(e^{it}) \\ \oplus e^{-it}f(e^{it}).\end{aligned}$$

可以直接验证 $\mathscr{H}_2$ 对 T^* 不变. 因此 $\mathscr{H}_1$ 对 T 不变. 证毕.

文 献 索 引

第 1 章

§1 关于谱算子、广义谱算子以及其他单个线性算子的理论方面，国内取得有系统而深入的成果的首推吉林大学、南京大学等学校中的一些数学家.但由于篇幅限制后面只列出一鳞半爪如江泽坚[1—2]，江泽坚和邹承祖[1—2]，王声望[1]，马吉溥[1—3]，张奠宙和沈祖和[1]等.

在 Clancey [5] 中有关于亚正常算子理论的较简略的介绍，此外还有较早的书 Putnam [1] 以及 Putnam [2—17]，Stampfli [1—4] 等论文. 与本书的研究有密切关系的理论有近似正常算子理论，所谓近似正常算子即为使 $A^*A - AA^*$ 全连续而且它的特征值的绝对值的和有限的那种算子 A，详见第 7 章 §3 关于近似正常算子已有系统而深入的理论. 由于它联系于算子的迹类摄动，可能有较多的应用，参见 Pincus [1—10]、Carey 和 Pincus [1—13]. 另外 Apostol 和 Clancey [1] 等一系列论文均与本书涉及的方面有关.

关于半亚正常算子的概念是夏道行[6]于 1979 年首先引入的.

关于比引理 1.2 (见 Pedersen [1]) 更广的 Lowner [1] 定理可参看 Donoghue [1].

§2 关于亚正常算子的性质(1—3)见 Stampfli [1]，关于半亚正常算子的性质(3)和(5—6)见夏道行[6]，关于性质(4)见夏道行[6]和李绍宽[3].

关于亚正常算子的 Cayley 变换是夏道行[6]首先引入的，引理 2.1 见夏道行[6]，定理 2.3 见 Stampfli [1] 定理 2.5—6 见夏道行[6]、关于 Berberian 技巧见 Berberian [2]. 定理 2.8 属于夏道行[6].

§3 引理 3.1 是一个很有用的引理是李绍宽[4]在 $\tau_t = I$ 时首先引入的. 对一般 τ_t 见李绍宽[3]，夏道行和李绍宽[1]及夏道行[10]. 关于半亚正常算子谱的角状分割定理 3.2 见夏道行[6]，但在特殊情况——亚正常算子的部分结果，Putnam [13] 也曾讨论过. 关于亚正常算子谱的直角分割 Putnam [1—2] 曾讨论过，李绍宽[3]曾给出过这个定理的另一证明，比 Putnam 的更简单.

第 II 章

§1 首先引入记号算子来讨论亚正常算子的是张荫南[1]于1966年作出的，并投稿；"十年浩劫"中被杂志编辑部遗失，1979年再发表。对近似正常算子情况见 Carey & Pincus [7]。引入极记号算子来讨论半亚正常算子的首先是夏道行[6]。此外与本节有关的论文还有 Carey 和 Pincus [9]，[10]，Brauer 和 Cordes [1] 等。

§2 这里大部分结果首次发表，但想法来源于夏道行[6]，张荫南[1]和 Clancey [5]。

§3 定理3.2—3是这里首次发表，但在亚正常算子情况实际上是由 Putnam [1,2] 的谱分割而来。关于 $\sigma(U)=C_1$ 时，(3.6)可能不成立的例是由李绍宽给出的。

关于亚正常算子谱半径及预解式的估计属于 Stampfli[1—2]，关于半亚正常算子相应的结果是这里首次发表，引理3.5见夏道行[6]。关于 Cayley 变换下谱映照定理3.9见夏道行[9]。

第 III 章

本章§1—3的主要结果，关于半亚正常算子的奇异积分模型定理1.3，定理3.1以及系1.4属于夏道行[6]。

关于亚正常算子的奇异积分模型定理1.6与定理3.2有一段历史。1962年夏道行[2]首先对 A^*A-AA^* 为一秩算子的情况给出证明。这是首次指出非正常算子与奇异积分算子的联系，接着夏道行又对一般亚正常算子证明了此两定理，但未能及时发表见夏道行[3](其中标明了收稿日期为1965年)。嗣后 Pincus [5] 对 A^*A-AA^* 为核算子情况得到了相应的结果。Muhly [1] (1976) 及 Kato [2] (1968) 得到类似的结果。这里由半亚正常算子模型用 Cayley 变换导出亚正常算子的方法是首次(参见夏道行[9—10])与模型问题有关的结果有夏经博[3]。与此模型有关的工作还有一些很好的论文如 Pincus [1—8]。

其余的一些预备知识和引理基本上都是熟知的。定理2.4见夏道行[4]。但这个结果实质上也可以从别的已知结果导出。

§4 的结果属于李绍宽[6]。

第 IV 章

§1 中的结果几乎是熟知的。§2—4的结果见夏道行[9]。关于 A^*A

—AA^* 为一秩情况下奇异积分算子谱的决定有一些工作，如张荫南[1]，Carey & Pincus [9]，Apostol & Clancey [1] 等.

关于亚正常算子的谱的讨论还有 Putnam [4, 6, 7, 11, 13, 14, 17].

第 V 章

§1　这里讨论的 Riemann-Hilbert 问题来源于 Pincus [3] 和 Carey & Pincus [7]. 定理 1.1—2 见 Pincus & Xia [1]（夏道行）.

§2　精刻函数的来源见 Carey & Pincus [9]，它是近似正常算子的有用工具. 本节主要结果均见 Pincus & Xia [1].

§3　定理 3.1—3 和定理 3.5 见 Pincus & Xia [1]. Pincus [6] 首先得到关于近似正常算子决定集的结果，这里的结果可以看成是一种推广. 系 3.4 见 Pincus [2]. 李绍宽 [3—4] 曾给出另一证明.

夏道行 [6] 曾给出特殊情况下系 3.6 的证明，嗣后李绍宽 [7] 给出了系 3.6 的第一个证明. 引理 3.9 见 Stampfli（[4] 中的 VI）.

§4　决定函数 $Y(\cdot,\cdot)$ 和表征函数的引进以及定理 4.1 见夏道行 [7].

§5　本节的主要结果见夏道行 [11]，关于 Toeplitz 算子的一般理论见 Douglas R. G. [3—4].

第 VI 章

§1　和函数族 $S(E)$ 有关的文献见 Donoghue [1]. 定理 1.2 见夏道行和李绍宽 [1].

§2　定理 2.3 见夏道行和李绍宽 [1]、定理 2.5 和系 2.6 是这里首次发表，有关的文献见夏道行 [10].

§3　定理 3.1—2 见夏道行和李绍宽 [2]，引理 3.3 和定理 3.4 见夏道行 [10]、定理 3.9—10 见李绍宽 [7].

§4　定理 4.3 是这里首次发表的.

§5　定理 5.1 见李绍宽 [1]，夏道行和李绍宽 [21]、拟正常算子概念的引进和一些性质见夏道行 [6].

第 VII 章

§1　关于迹和迹算子还可参看 Гельфанд, Веленкин [1].

§2　主函数是 Pincus（参看 Carey & Pincus [9] 和 Helton & Howe

[1]）对近似正常算子引进的．本节的主要结果见 Pincus & Xia [1]．

§3 本节主要结果见 Helton & Howe [1, 2], Pincus [7] 和 Carey & Pincus [9]．折叠性概念属于 Pincus．

§4 定理 4.2 见夏道行 [6]，Pincus 首先考察乘积交换子的行列式．定理 4.3 见 Carey 和 Pincus [3]、定理 4.4 是这里首次发表的．

与本章有关的论文还有 Pincus [1—10], Carey 和 Pincus [1—12], Apostol 和 Clancey [1], Voculescu [2] 等

附 录

§1 关于压缩算子调和分析详见 Foiag & Nagy [1] 以及他们在 *Acta Sci, Math.* (Szeged) 1964 年来的一系列论文，特征函数是非常重要的概念．它是由 Лившиц 在研究非自共轭算子理论时首先引进的，详见 Brodskii [1]．

引理 1.8 见夏道行 [1]、定理 1.9 见夏道藏 [1]，但是 Nagy 曾用不同方法得到一个比系 1.10 更广的结果．

§2 引理 2.5—9 见夏道行 [1]、定理 2.10 是 Foirs & Nagy（可参看他们的文献 [1] 中所列文献索引）首先得到的，但他们当时未能定出算子 V 的形式，而在夏道行 [1] 中首次定出 V 的形式，定理 2.13 和引理 2.14 见夏道行 [4]．

§3 Foias & Nagy [1] 首先给出完全非酉压缩算子的不变子空间和特征函数因子分解的联系．这里在一般情况下的结果和处理方法引理3.1—4，定理 3.5—6 属于夏道行 [4]．

参 考 文 献

王伯英，夏道行

[1] 关于厄米特阵特征值之和的一个不等式及其应用，复旦学报，**20** (1981), 419—423.

王声望

[1] $\mathscr{Q}_{\langle M_k\rangle}$ 型算子及其预解式，中国科学数学专辑 (1), 1979, 255—266.

[2] $\mathscr{Q}_{\langle M_k\rangle}$ 型算子及其预解式 II，数学年刊，**1**(1980), 325—334.

王振鹏

[1] Hilbert 空间算子的 Banach 约化，吉林大学学报，1980, No. 3, 49—55.

马吉溥

[1] 一类非自共轭算子的特征函数矩阵，福州大学学报，1963, No. 2, 58—67.

[2] 关于非正常算子的导算子的一点讨论，南京大学学报，**9** (1965), 9—13.

[3] 一类非正常算子，南京大学学报，9(1965)，263—272.
江泽坚
[1] 关于全连续算子，吉林大学学报，1963，No. 2, 503—510.
[2] 关于 BIR 算子的若干问题 I, II，在吉林大学数学研究所泛函分析讨论班上的报告，1979.
江泽坚、邹承祖
[1] 关于谱型算子理论的几点注记，吉林大学学报，1963，No. 3, 201—202.
[2] 谱型算子，吉林大学学报，1964，No. 1, 65—76.
伍镜波
[1] 非拟解析广义标量算子，复旦学报，10(1965)，49—61.
陈建功
[1] 实函数论，科学出版社，1978.
严绍宗
[1] 关于压缩算子半群的酉扩张，复旦学报，16(1977)，38—49.
[2] 算子的酉扩张，科学通报，25(1980)，289—291.
[3] 关于算子的酉扩张，复旦学报，19 (1980)，267—276.
李绍宽
[1] 关于半亚正常算子的谱的不等式，科学通报 25(1980)，820—822.
[2] 关于对称次正常算子的一些性质，复旦学报，19(1980)，232—234.
[3] 近似特征向量方法的一些应用，复旦学报，20(1981)，470—474.
[4] 关于连续算子值连续函数谱的一个定理，复旦学报，19(1980)，342—346.
[5] 一类亚正常算子——完全亚正常算子(尚未发表).
[6] 关于半亚正常算子的函数模型(尚未发表).
[7] 关于半亚正常算子谱的一些性质(尚未发表).
[8] 关于非正常算子的 Fugled-Putnam 定理(尚未发表).
[9] 关于半亚正常算子的若干性质(尚未发表).
[10] 关于非正常算子的谱子空间(尚未发表).
[11] 关于酉算子的散射和符号算子(尚未发表).
张荫南
[1] 半正常算子的表示及谱的估计，复旦学报，18(1979)，76—82.
[2] 半正常算子的表示及对谱的估计，复旦第13届科学报告讨论会自然科学论文摘要汇编，1979，31.
张奠宙，沈祖和
[1] 非拟解析算子与广义标量算子，复旦学报，11(1966)，44—53.
邹承祖
[1] 一类算子的谱理论 (I)，(II)，(III)，吉林大学学报，1979，No. 4, 29—42; 1980, No. 1, 1—9; 1980, No. 2, 7—19.
[2] 正半轴上二阶微分算子与谱算子，吉林大学学报，1978，No. 1, 57.
俞致寿
[1] 关于可对称化算子，吉林大学学报，1964，No. 3, 51—60.
[2] 可解算子与谱算子，吉林大学学报，1980，No. 3, 56—60.
夏道行 (*Xia, Daoxing*)
[1] 关于完全非酉的压缩算子，复旦学报，10(1965)，407—412.
[2] 关于非正常算子 (I)，数学学报，12(1962)，216—228.

[3] 关于非正常算子 (II),数学学报，**21**(1978)，187—189.
[4] 关于压缩算子的不变子空间,复旦学报，**18**(1979)，1—9.
[5] 关于非正常算子,复旦第 13 届科学报告会自然科学论文摘要汇编，1979，6.
[6] On the non-normal operators——semi-hyponormal operators, **13** (1979), 936—946; *Sci. Sinica*, **23** (1980), 700—713.
[7] On the characteristic function of semi-hyponormal operators, 数学年刊，**1**(1980)，1—8.
[8] 关于亚正常算子和半亚正常算子的谱,科学通报，**25**(1980)，621.
[9] On the spectrum of hyponormal or semi-hyponormal operators *J. Operator Theory*, **5** (1981), 257—266.
[10] Spectral mapping of hyponormal and semi-hyponormal operators (*Jour. Math. Analysis & App.*, **79** (1981), 409—427).
[11] On the Toeplitz Operator Related to the Scattering Operotor of a Semi-hyponormal Operator, 数学物理学报，**1**(1981)，77—82.
[12] 关于亚正常算子与半亚正常算子的谱分析,数学进展，**11**(1982),101—114.
[13] 无限维空间上测度和积分论(上册)，上海科学技术出版社，1965 (英译本 Acad. Press, 1972).

夏道行,吴卓人,严绍宗
[1] 实变函数论与泛函分析概要,上海科学技术出版社，1963.

夏道行,严绍宗,吴卓人,舒五昌
[1] 实变函数论与泛函分析,人民教育出版社，1978.

夏道行,李绍宽
[1] 关于亚正常算子的函数变换,科学通报，**25**(1980)，625—627.
[2] 关于半亚正常算子的函数变换,数学年刊，**1**(1980)，501—504.

夏道藏
[1] 关于谱在单位圆周上或实数直线上算子的预解式的估计，复旦大学研究生毕业论文，1966.

夏经博
[1] 与不变子空间问题有关的一些算子代数的结果，复旦第 13 届科学报告会，自然科学论文摘要汇编，1979，6.
[2] 关于约化代数和可迁代数的一些结果,复旦学报，**18**(1979)，69—75.
[3] 关于算子方程 $U_+B - BU_+ = A$ 的解,复旦学报，**19**(1980)，338—341.

童裕孙
[1] 实型可分解算子,复旦学报，**20** (1981),51—60.

藤井正俊
[1] すある種の hyponormal operator について,京都大学数理解析研究所话研录，**256**(1975)，12—23.

Allan, G. R.

[1] On one-sided inverse in Banach algebras of holomorphic vector-valued function, *Jour. London Math. Soc.*, **42** (1967), 463—470.

Ando, T., Fan, K.

[1] Pick-Julia theorems for operators, *Math. Z.*, **168** (1979), 23—34.

Apostol, C., Clancey, K.

[1] Local resolvents of operators with one-dimensional self-commutator, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **58** (1976), 158—162.

Apostol, C., Foiaş, C., Voiculescu, D.

[1] Some results on non-quasitriangular operators *I, II, III, IV, V*, *Rev. Roum. Math. Pure. Appl.*, **18** (1973), 159—181; 309—324; 487—514; 1133—1149; 1473—1494.

Arveson, W.

[1] A note on essentially normal operators, *Proc. Roy. Irish. Acad.*, **74** (1974), 143—146.

Atiyah, M., Singer, I. M.

[1] Index of elliptic operators, *I, II, III*, *Ann. Math.*, **87** (1968), 484—530; **83** (1968), 546—604; **93** (1971), 119—138.

Ball, J. A.

[1] Factorization and model theory for contraction operators with unitary part, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, **1978** No. 198.

Berberian, S. K.

[1] A note on hyponormal operators *Pac. Jour. Math.*, **12** (1962), 1171-1175.

[2] Approximate proper vectors, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 111—114.

[3] An extension of Weyl's theorem to a class of not necessarily normal operators, *Michi. Math. Jour.*, **16** (1969), 273—279.

[4] Conditions on an operator implying Re $\sigma(T) = \alpha$ (ReT), *Trans. Amer. Math. Soc.*, **154** (1972), 262—272.

[5] Extensions of a theorem of Fuglede and Putnam, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 71 (1968), 113—114.

Berg, I. E.

[1] An extension of the weyl-von Neumann theorem to normal operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **150** (1971), 365—371.

Berger, C. A.

[1] Sufficiently high powers of hyponormal operator have rationally invariant subspaces, *Jour. Integ. Eq. Operator Theory*, 1 (1978), 449—470.

Berger, C. A., Shaw, B. I.

[1] Self-commutators of multicyclic hyponormal operotors are always trace class, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **79** (1973), 1193—1199.

[2] Interwining, Analytic structure, *and the trace norm estimate,*

Lecture notes in Math., No **345**, Springer-Verlag, 1973.

[3] Interwined operators and the Picus principle functions (*to be published in Jour. Integ. Eq. Oper. Theory*)

Bram, J.

[1] Subnormal operators, *Duke Math. Jour.*, **22** (1955), 75—94.

Breuer, M., Cordes, H. O.

[1] On Banach algebras with σ-symbol *I, II, Jour. Math. Mech.* 13 (1964), 313—324; 14 (1965).

Brodskiĭ, M. S.

[1] Triangular and Jordan representations of linear operators, *Translation Amer. Math. Soc.*

Brown, L.

[1] The determinant invariant for operators with trace class self-commutator. *Lecture notes in Math.*, No. 345, Springer-Verlag, 1973.

Brown, L., Douglas, R. G., Fillmore, P.

[1] Univary equivalence modulo the compact operators and extensions of C*-algebras, *Lecture notes in Math.*, No. 345, Springer-Verlag, 1973.

[2] Extensions of C*-algebras and K-homology, *Ann. Math.*, **105** (1977), 265—324.

Brown, S.

[1] Some invariant subspaces for subnormal operators, *Jour. Integ. Eq. Oper. Theory*, **1** (1978), 310—333.

Brown, S., Chevrea., Pearcy, C.

[1] Contractions with rich spectrum have invariant subspaces, *Jour. Oper. Theory*, 1 (1979), 123—136.

Bunce, J. W.,

[1] The joint spectrum of commuting non-normal operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **29** (1971), 499—504.

Bunce, J. W., Deddens, J. A.

[1] C*-algebras generated by weighted shifts. *Indiana Univ. Math. Jour.*, **23** (1973), 257—271.

Carey, R. W., Pincus, J. D.

[1] The structure of interwining isometdies, *Indiana Univ. Math. Jour.*, **22** (1973), 679—703.

[2] An invariant for certain operator algebras, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **71** (1974), 1952—1956.

[3] An exponential formula for deteming functions, *Indiana Univ. Math. Jour.*, **23** (1974), 1031—1042.

[4] Construction of seminormal operators with prescribed mosaic, *Indiana Univ. Math. Jour.*, **23** (1974), 1155(1165).

[5] Eigenvalues of seminormal operators, examples, *Pac. Jour. Math.*,

51 (1974), 1—11.

[6] Almost commuting algebra, *Lecture notes in Math., No.* 575 Springer-Verlag, 1975.

[7] Commutators, symbols and determining functions, *Jour. Functional Analysis*, **19** (1975), 50—80.

[8] Interwining isometries (preprints)

[9] Mosaics, principle functions and mean motion in von-Neumarm algebras, *Acta. Math.*, **138** (1977), 153—218.

[10] Principle functions, index theory, geometric measure theory and function algebras, *Integ. Eq. Oper. Theory*, **2** (1979), 441—483.

[11] An integrality theorem for semi-normal operators, *Integ. Eq. Operator Theory*, **4** (1981), 10—44.

[12] Almost commuting pairs of unitary operators and flat currents, *Integ. Eq. Operator Theory*, **4** (1981), 45—122.

Clancey, K. F.

[1] Examples of non-normal semi-normal operators whose spectra are not spectral sets, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **24** (1970), 797—800.

[2] Invariant subspace of infinite codimension for some non-normal Operator, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **37** (1973), 525—528.

[3] The essertial spectrum of a class of singular integral operators, *Amer. Jour. Math.*, **96** (1974), 298—307.

[4] Completeness of eigenfunctions of semi-normal operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **39** (1977), 31—37.

[5] Semi-normal Operators, Lecture notes of Math., No. 742 Springer, 1979.

Clancey, K. F., Putnam, C. R.

[1] The local spectral behavior of completely subnormal operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **163** (1972), 239—244.

[2] The spectra of hyponormal integral operators, *Comment. Math. Helv.*, **46** (1971), 451—456.

Clancey, K. F., Rogers, D. D.

[1] Cyclic vectors and semi-normal operators, Indiana, *Univ. Math. Jour.*, **27** (1978), 689—696.

Clary, S.

[1] Equality of spectra of quasi-similar hyponormal operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **53** (1975), 88—90.

Coburn, L. A.

[1] Weyl's theorem for non-normal operators. *Michigan Math. Jour.*, **13** (1966), 285—288.

Coburn, L. A., Moyer, R. D., Singer, I. M.

[1] C*-algebras of almost jeriodic psudo-differential operators, *Acta Math.*, **130** (1973), 280—307.

Conway J. B., Olin, R.

[1] A functional calculus for subnormal operators, *II. Mem. Amer. Math. Soc.*, 1977, No. 184.

Cordes, H. O., Williams, D. A.

[1] An algebra of pseudo-differential operators with non-smooth symbol, *Pac. Jour. Math.*, **78** (1978), 279—290.

Cowen, C. C.

[1] Commutants and the operator equation, AX=λXA, *Pac. Jour. Math*, **80** (1979), 337—341.

[2] The commutant of an analytic Toeplitz operator I, Trans. *Amer. Math. Soc.*, **239** (1978). 1—31; II (to appear in the Indiana Univ. Math. Jour).

Cowen, M. J., Douglas, R. G.

[1] Complex geometry and operator theory, *Acta Math.*, **141** (1978). 187—281.

Davis, Ch.

[1] The shell of a Hilbert-space operator II, *Acta Sci. Math.*, **31** (1970) 301—318.

[2] Extending the Kantorovič inequality to normal matrices (Preprints)

[3] Perturbation of spectrum of selfadjoint operators (preprints).

Daleckii, Ju. L., Krein, S. G.

[1] Integration and differentiation of functions of Hermitian operators and applications to theory of perturbations, *AMS Translations, Ser.* 2, Vol. 47.

Donoghue, W. F.

[1] Monotone matrix functions and analytic continuation. Springer-Verlag, 1974.

Douglas, R. G.

[1] On majorization, factorization and range inclusion of operators on Hilbert space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **17** (1966), 413—415.

[2] Banach algebra techniques in operator theory, Acad. Press, N. Y., 1972.

[3] Banach algebra techniques in the theory of Toeplitz operator, *Amer. Math. Soc. Reg. Conf.*, 1973, No. 15, 1—53.

[4] Local Toeplitz operators, *Proc. London Math. Soc.*, 3, **36** (1978), 243—272.

Douglas, R. G., Sarason, D.

[1] Fredholm Toeplitz operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **26** (1970), 117—120.

Douglas, R. G., Widom, H.

[1] Toeplitz operators with locally sectorial symbol, *Indiana Univ. Math. Jour.*, **20** (1970/71), 385—388.

Dunford, N. Shwartz, J. T.

[1] Linear operators, part III, *Spectral operators*, Wiley-Intersci., 1971.

Edgar, G. Ernest, J., Lee, S. G.

[1] Weighting operator algebra, *Indiana Univ. Math. Jour.*, **21** (1971), 61—79.

Ernest, J.

[1] Charting the operator terrain, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, 1976, No. 171.

Fan, Ky （樊畿）

[1] Analytic functions of a proper contraction, *Math. Z.*, **160** (1978), 275—290.

[2] Julia's lemma for operators, *Math. Ann.*, **239** (1979), 241—245.

Fialkow, L. A.

[1] A note on the operator X→AX—XB, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **243** (1978), 147—168.

[2] Elements of spectral theory for generalized derivations, *Jour. Oper. Theory.*, **3** (1980), 89—114.

Foiaş, C.

[1] A dilation theorem for hyponormal operators, (*Preprints*).

Foiaş, C., Sz.-Nagy, B.

[1] Harmonic Analysis of operators on Hilbert space, Budapest-Amsterdam, 1970.

[2] Commutants de certains opérateurs *Acta Sci. Math.* (*Szeged*), **29** (1968), 1—17.

Fong, Che-Kao （方资求）

[1] Quasi-affine transforms of subnormal operators, *Pac. Jour. Math.*, **70** (1977), 361—368.

[2] On M-hyponormal operators, *Studia Math.*, **65** (1979), 1—5.

Fong, Che-Kao, *Tsai* Sze-Kai.

[1] A note on positive operator (Preprints).

Friedrichs, K. O.

[1] On the perturbation of continuous spectra, *Comm. Appl. Math.*, **1** (1948), 361—406.

Fuglede, B.

[1] A commutativity theorem for normal operators, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **36** (1950), 35—40.

Fujii, M., Nakatsu, Y.

[1] On subclass of hyponormal operators, *Proc. Jap. Acad.*, **51** (1975), 243—246.

Furuda, T.

[1] Some characterization of convexoid operators, *Rev. Roum. Math. Pure. Appl.*, **18** (1973), 893—900.

Gohberg, I., Krein, M. G.

[1] Introduction to the theory of linear non-self-adjoint operators. *Amer. Math. Soc. Providence*, **1969**

[2] Theory of Volterra operators in Hilbert space and its application, 1967. *M.* (*Science*).

Halmos, P. R.

[1] A Hilbert space problm book, *Van Nostrand. Princeton*, 1967.

[2] Quasitriangular operators, *Acta Sci. Math.*, **29** (1968). 283—293.

[3] Ten problems in Hilbert space, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76**(1970), 887—933.

[4] Integral operator, *Lecture notes in Math.*, (1977), No. 693, 1—16.

Helton, J. W., Howe, R.

[1] Integrae operators. commutator traces, index and homology, *Lecture notes in Math.*, No. 345, Springer-Verlag, 1973.

[2] Traces of commutators of integral operators, *Acta Math.*, **135** (1975), 271—305.

Howe, R.

[1] A functional calculus for hyponormal operators, *Indiana Univ.* Math. Jour., **23**(1974), 631—644.

Istrătescu, V.

[1] On some hyponormal operator, *Pac. Jour. Math.*, **22** (1967), 413—417.

[2] Remarks on conditions implying normality, *Rev. Roum. Math. Pure. Appl.*, 12 (1967), 1293—1295.

[3] Operatori hiponormali, *I, II, III. St. Cerc mat.*, **19** (1967), 423—437; **19** (1967), 439—449; **20** (1968), 1159—1168.

[4] On operators of class (N), *Rev. Roum. Math. Pure. Appl.*, **13** (1968), 343—346.

[5] On some classes of operators, *Math. Ann.*, **88**. (1970), 227—230.

[6] On a class of normaloid operators, *Math. Z.*, 124 (1972), 199—202.

[7] Some results on M-hyponormal operators, *Math. Seminar. Notes.*, **6** (1978), 77—87.

Jauch, J. M., Rejto, P. A.

[1] Remark on a theorem of Xa Dao-xeng (Preprint of Inst. Phys. Theo. Univer Genéve).

Kato, T.

[1] Some mapping theorem for numerical range, *Proc. Japan, Acad.*, **41** (1965), 652—655.

[2] Smooth operators and commutators, *Studia Math.*, **31**(1968), 535—546.

[3] Perturoation theory for linear operator; Springer-Verlag, 1966.

[4] Wave operators and similarity for some nonself-adjoint operators,

Math. Ann., 162 (1966), 258—259.

Krein, M. G.

[1] Perturbation determinants and a formula for the traces of unitary and self-adjoint-operators, *Dok. Akad. Nayk, SSSR.*, **144** (1962), 268—271.

Löwner, K.

[1] Über monotone matrix functionen, *Math. Z.*, **38** (1934), 177—216.

Mitiagin, B.

[1] Linearization of holomorphic operator functions. *I, II*, *Integ. Eq. Oper. Theory*, **1** (1978), 114—131; **2** (1978), 226—249.

Muhly, P. S.

[1] A note on commutators and singular integrals, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **54** (1976), 117—121.

Nussbaum, A. E.

[1] Semi-groups of subnormal operators, *Jour. Math. Soc.*, **2**, **14** (1976), 340—344.

Olin, R. F.

[1] Functional relationship between a subnormal operator and its minimal normal extension, *Pac. Jour. Math.*, **63** (1976), 221—229.

Olin, R. F. Thomson, J.

[1] The spectrum of a normal operator and the problem of filling in holes, *Indiana Univ. Math. Jour.*, **26** (1977), 541—544.

[2] Some index theorems for subnormal operators, *Jour. Oper. Theory*, **3** (1980), 115—142.

Pedersen, G. K

[1] Some operator monotone functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **36** (1972), 309—310.

Perry, P., Sigal, I., Simon, B.,

[1] Absence of singular continueous spectrum in N-body quantum systems (Preprint).

Pincus, J. D.

[1] Commutators, generalized eigenfunction expansions and singular integral operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **121** (1966), 358—377.

[2] Singular integral operators on the unit circle, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 195—199.

[3] Commutators and systems of singular integral equations. I, *Acta Math.*, **121** (1968), 219—249.

[4] Some applications of operator valued analytic functions of two complex variables. Linear Operators and Approximation, Birkhausser Verlag, 1970.

[5] The determining function method on the treatment of commutator systems, Hilbert Space Operators, Birkhausser Verlag, 1970, 443—477.

[6] The spectrum of seminormal operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **68** (1971), 1684—1685.

[7] On the trace of commutators in the algebra of operators generated by an operator with trace class self-commutator. Story Brook Preprint, 1972.

[8] Symmetric singular integral operators, *Indiana Univ. Math. Jour.*, **23** (1973), 537—556.

[9] Unitary equivalence modulo the trace class for self-adjoint operator, *Amer. Jour. Math.*, **98** (1976), 481—514.

[10] Symmetric Wiener-Hopf and Toeplitz operators, *Integ. Eq. Operator Theory*, **4** (1981), 122—133.

Pincus, J. D., Xia, Daoxing

[1] Mosaic and principle function of hyponormal semi-hyponormal operators, *Integ. Eq. Operator Theory*, **4** (1981), 134—150.

Pearcy, C. Salinas,

[1] Operators with compact self-commutator, *Canad. Jour. Math.*, **26** (1974), 115—120.

[2] Compact perturbations of semi-normal operators, *Indiana Math. Jour.*, **22** (1973), 789—793.

[3] An invariant subspace theorem, *Mich. Math. Jour.*, **20** (1973), 21—31.

Putnam, C. R.

[1] Commutation properties of Hilbert space operators, *Erg. Math. Greng.*, *No.* **36**, Berling, 1967.

[2] An inequality for the area of hyponormal operatros., *Math. Z.*, **116** (1970), 323—330.

[3] Unbounded inverses of hyponormal operators, *Pac. Jour. Math.*, **35** (1970), 755—762.

[4] The spectra of semi-normal singular integral operators, *Canad Jour. Math.*, **22** (1970), 134—150.

[5] Ranges of normal and subnomal operators, *Michi. Math. Jour.*, **18**(1971), 33—36.

[6] The spectra of subnormal operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **28** (1971), 473—477.

[7] The spectra of completely hyponormal operators, *Amer. Jour. Math.*, **93** (1971), 699—708.

[8] Trace norm inequalities for the measure of hyponormal spectra., *Indiane Univ. Math. Jour.*, **21** (1971/72), 775—779.

[9] A. Similarity between hyponormal and normal spectra, *Ill. Jour. Math.*, **16** (1972), 695—702.

[10] Hyponormal operators having real part with simple spectra, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **172** (1972), 447—464.

[11] The spectra of unbounded hyponormal operator, *Proc. Amer. Math.*

Soc., **31** (1972), 458—464.

[12] Resolvent vectors invariant subspace and sets of zero capacity. *Math. Ann.*, **205** (1973), 165—171.

[13] Spectra of Polar factors of hyponormal operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **188** (1974), 419—428.

[14] The role of zero sets in the spectra of hyponormal operators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **43** (1974), 137—140.

[15] Hyponormal contractions and strong power convergence, *Pac. Jour. Math.*, **57** (1975), 531—538.

[16] A norm inequality in hyponormal operator theory. *Michigan Math. Jour.*, **22** (1975), 195—200.

[17] Spectra and measure inequalities, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **231** (1977), 519—529.

Raliabalipour, M.

[1] Ranges of hyponormal operators. *Illinois Jour. Math.*, **21** (1977), 70—75.

[2] On majorization and normality of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **62** (1977), 105—110.

Radjavi, H.

[1] Structure of A^*A-AA^*, *Jour. Math. Mech.*, **16** (1966), 19—26

Radjavi, H., Rosenthal, P.

[1] Invariant subspaces, Springer-Verlag, 1973.

Rosenbloom, M.

[1] A spectral theory for self-adjoint singular integral operators. *Amer. Jour. Math.*, **88** (1966), 314—328.

Rudin, W.

[1] Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1974.

Saito, T.

[1] Hyponormal operators and related topics, Lecture note in Math., No. 247, Springer-Verlag, 1972.

Salinas, N.

[1] Extensions of C^*-algebras and essentially n-normal operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **82** (1976), 143—146.

[2] Homotopy invariance of Ext(A), *Duke Math. Jour.*, **44** (1977). 777—794.

Sarason, D.

[1] Representing mearsures for R(X) and their Greens functions. *Jour. Functional Anal.*, **7** (1971), 339—385.

[2] On products of Toeplitz operators. *Acta Sci. Math. (Szeged)*. **35** (1973), 7—12.

Schatten, R.

[1] Norm ideals of completely continuous operators, Springer-Verlag, 1960.

Simon, B.

[1] Notes on infinite determinants of Hibert space operators, *Adv. Math.*, **24** (1977), 244—273.

Singer, I. M.,

[1] Some remarks on operator theory and index theory. *Lecture Notes in Math.*, No. 575 Springes-Verlag, 1975.

Stampfli, J. G.

[1] Hyponormal operators, *Pacific Jour. Math.*, **12** (1962), 1453—1456.

[2] Hyponormal operators and spectral density. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **117** (1965), 469—476.

[3] Analytic extensions and spectral localization, *Jour. Math. Mech.*, **16** (1966), 287—296.

[4] A local spectral theory for operator, *I—V*, *Jour. functional Anal.*, **4** (1969), 1—10; *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75** (1969), 803—806.; *Trans. Amer. Math. Soc.*, **168** (1972), 133—151; *Indiana Univ. Math. Jour.*, **22** (1972), 159—167; *Trans. Amer. Math. Soc.*, **217** (1976), 285—296.

[5] An extension of Scoff Brown's invariant subspare theorem, *K-spectral sets. Jour. Oper. Theory*, **3** (1980), 3—21.

Stampfli, J. G., Wadhwa, B. L.

[1] An asymmetric Putnam-Fuglede theorem, *Indiana Univ. Math., Jour.*, **25** (1976), 359—365.

[2] On dominant operators, *Mh. Math.*, **84** (1978), 143—153.

Teodorescu, R. I.

[1] Sur les decomposition directes des contractions de L'espace de Hilbert, *Jour. Functional Anal.*, **18** (1975). 414—418.

Titchmarsh, E. C.

[1] Theory of Fourier Integral, 1945.

Voiculescu, D.

[1] A non-commutative Weyl-ven-Neumann theorem, *Rev. Romm. Math. Pure Appl.*, **21** (1976), 97—113.

[2] Remarks on Hillbert-Schmidt porturbations of almost-normal operators (Preprint).

Wadhwa, B. L.

[1] A hyponormal operators whose spectrum is not a spectral *Set*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **38** (1973), 83—85.

[2] M-hyponormal operator, *Duke. Math. Jour.*, **41** (1974), 655—660.

Williams, J. P.

[1] Operators similar to their adjoint, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **20** (1969), 121—123.

[2] On commutativity and the numerical range in Banach Algebras, *Jour. Functional Anal.*, **10** (1972), 326—329.

Widon, H.

[1] On the spectrum of a Toeplitz operator, *Pac. Jour. Math.*, **14** (1964), 365—375.

[2] Toeplitz determinants with singular generating functions. *Amer. Jour. math.*, **95** (1973), 333—383.

Yoshino, T.,

[1] On the spectrum of a hyponormal operator, *Tohoku. Math. Jour.*, **17** (1965), 305—309.

[2] Hyponormal operators in von Neumann Algebrae, *Tohoku Math. Jour.*, **28** (1976), 129—134.

Бродский. М. С., Лившиц, М. С.

[1] Спектральный анализ несамосопряженых орерамoров и примежу. точные системы, *Успехи Мат Наук.*, **13** (1958), 3—85.

Гельфанд, И. М. Виленкин, Н. Я-

[1] Обобщенные Функции 4, ГИФЛ, 1961 (夏道行译，广义函数论，科学出版社，1965).

Привалов. И. И.

[1] Граничные свойства однозначных аналитических функций М. 1950. (吴亲仁译，解析函数境界值理论，科学出版社，1956年).

Мусхелишвили Н. И.

[1] Сингулярные Интегральные Уравнения, ФМ, 1962. 朱季纳译，上海科学技术出版社，1966年

目　　录

第一章　不定度规空间上几何学

这一章将介绍不定度规空间上最基本的几何概念．这些内容基本上是内积空间，特别是 Hilbert 空间上相应概念的推广．它们不仅是不平凡的推广，而且也是今后所必需的．

§1　不定度规空间的基本概念

1. 不定度规空间

定义1.1　设 Π_0 是复数域 C 上线性空间，$(\cdot,\cdot)$ 是 Π_0 上双线性 Hermite 泛函，即满足

(i) 对任何 $x, y\in \Pi_0$，$(x, y)=\overline{(y, x)}$.

(ii) 对任何$\alpha, \beta\in$ C，$x, y, z\in \Pi_0$，

$$(\alpha x+\beta y, z)=\alpha(x, z)+\beta(y, z).$$

称$(\cdot,\cdot)$是 Π_0 上的准度规，而称 $(\Pi_0, (\cdot,\cdot))$ 是准不定度规空间．

定义 1.2　设 $(\Pi_0, (\cdot,\cdot))$ 是准不定度规空间，$x, y\in \Pi_0$. 如果 $(x,y)=0$，那末称 x（按$(\cdot,\cdot)$）直交于 y，记为 $x\perp y$. 如果存在 Π_0 中的非零向量 x，满足

$$(x, y)=0,\ y\in \Pi_0, \tag{1.1}$$

那末称准度规是退化的．否则，称为非退化的．如果准度规$(\cdot,\cdot)$是非退化的，则称准度规为度规，相应地，称$(\Pi_0, (\cdot,\cdot))$是不定度规空间．

显然，当 x 直交于 y 时，y 也直交于 x，即直交是相互的．又如果 $(\Pi_0, (\cdot,\cdot))$ 是准不定度规空间，令 Π_0 的子集

$$L_0=\{x\mid x\perp y,\ y\in \Pi_0\},$$

那末 L_0 必是 Π_0 的线性子空间．在商空间 $\Pi=\Pi_0/L_0$ 上，由 $(\cdot,\cdot)$ 可以诱导出一个双线性 Hermite 泛函 $(\cdot,\cdot)_{\Pi_0/L_0}$，显然 $(\Pi, (\cdot,

$\cdot)_{\Pi_0/L_0}$) 便是不定度规空间.

如无特殊申明，今后本书中总是假定 Π 是复数域 $\mathbf{C}$ 上线性空间，$(\cdot,\cdot)$ 是 Π 上的度规，即 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$是不定度规空间，并且常简写 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$为 Π.

2. 正、负、零性子空间

定义 1.3 设 Π 是不定度规空间，$x\in\Pi$，如果满足$(x,x)\geqslant 0$（或 $(x,x)\leqslant 0$），那末称 x 是 Π 上的半正（或半负）向量；如果满足 $(x,x)>0$（或$(x,x)<0$），那末称 x 是正(或负)向量；如果 $(x,x)=0$，那末称 x 是零性向量. 零性向量又称为迷向向量.

设 L 是 Π 的线性子空间，如果 L 中一切非零向量都是正（或负，或零性）的，那末称 L 是 Π 的正性（或负性，或零性）子空间. 零性子空间又称作迷向子空间. 如果 L 中一切向量都是半正（或半负)的，那末称 L 是半正（或半负）子空间.

设 L 是 Π 的正（负、半正、半负、零性）子空间，如果不存在 Π 的正（负、半正、半负、零性)子空间 L'，使得 L 是L'的真子空间，那么称 L 是 Π 的极大正(极大负、极大半正、极大半负、极大零性)子空间.

利用 Zorn 引理，容易证明如下命题：不定度规空间 Π 的任何一个正（负、半正、半负、零性）子空间 L 必可扩张成 Π 上一个极大正（极大负、极大半正、极大半负、极大零性）子空间，即必存在 Π 的某个极大正（极大负、极大半正、极大半负、极大零性）子空间 L'，使得 $L\subset L'$.

3. $A^{\perp}$，退化子空间

定义 1.4 设 A 是不定度规空间 Π 的子集. 称 Π 中集.

$$\{x\mid (x,y)=0,\ y\in A\}$$

为与 A 直交的集，记为 $A^{\perp}$. 设 L 是Π的线性子空间，如果 $L\cap L^{\perp}\neq\{0\}$，即 L 中存在非零向量与 L 中所有向量直交，那末称 L 是 Π 的退化子空间，否则称 L 是 Π 的非退化子空间.

显然，当 L 是 Π 的线性子空间时，如果把 $(\cdot,\cdot)$ 限制在 L 上，那末 $(L,(\cdot,\cdot))$ 是准不定度规空间. 而 $(L,(\cdot,\cdot))$ 为不定度

规空间的充要条件是 L 为 Π 的非退化子空间。当 L 是正或负的子空间时，L 将相应地按 $(\cdot, \cdot)$ 或 $-(\cdot, \cdot)$ 成为内积空间。当 L 是半正或半负子空间时，L 将相应地按 $(\cdot, \cdot)$ 或 $-(\cdot, \cdot)$ 成为准内积空间。

下列命题是显然的。

引理 1.1 设 Π 是不定度规空间，A 是 Π 的子集，L，M 都是 Π 的线性子空间，那末

(i) $A^{\perp}$ 是 Π 的线性子空间。

(ii) $L \subset L^{\perp\perp}$（这里 $L^{\perp\perp}$ 表示 $(L^{\perp})^{\perp}$）。

(iii) 当 L 是正（或负）子空间时，L 必是非退化的。

(iv) 当 $M \subset L$ 时，$M^{\perp} \supset L^{\perp}$。

定义 1.5 设 L_1，L_2 是不定度规空间 Π 的两个线性子空间。如果对一切 $x_j \in L_j, j=1,2$，都有 $(x_1, x_2)=0$，那么称 L_1, L_2 相互直交，记为 $L_1 \perp L_2$。称线性子空间 $L=\{x_1+x_2 | x_j \in L_j, j=1, 2\}$ 是 L_1，L_2 的线性和，记为 $L=L_1+L_2$。如果 $L_1 \cap L_2=\{0\}$，称 $L=L_1+L_2$ 是 L_1，L_2 的直接和，直接和常表示为 $L=L_1 \dotplus L_2$，如果 $L_1 \perp L_2$，并且 $L_1 \cap L_2=\{0\}$，称 $L=L_1+L_2$ 是 L_1，L_2 的直交直接和。直交直接和常表示为 $L=L_1 \oplus L_2$。

引理 1.2 设 L_1，L_2 是不定度规空间 Π 上两个线性子空间。如果 $\Pi=L_1+L_2$，并且 $L_1 \perp L_2$，那末 $\Pi=L_1 \oplus L_2$，并且 $L_1^{\perp}=L_2$，$L_2^{\perp}=L_1$（即 $L_j^{\perp\perp}=L_j$，$j=1, 2$）。

证 证明 $L_1 \cap L_2=\{0\}$。任取 $x \in L_1 \cap L_2$，根据 $L_1 \perp L_2$ 的假设，所以

$$x \perp L_1, \quad x \perp L_2 \tag{1.2}$$

从而 $x \perp \Pi$。在不定度规空间中，与全空间直交的只有零向量，所以 $x=0$。

既然 $L_1 \cap L_2=\{0\}$，所以 $\Pi=L_1 \oplus L_2$。又显然，$L_1^{\perp} \supset L_2$。

现在证明 $L_2 \supset L_1^{\perp}$。任取 $x \in L_1^{\perp}$，根据分解 $\Pi=L_1 \oplus L_2$，必存在唯一一对 $x_j \in L_j$，$j=1, 2$，使得 $x=x_1+x_2$。由于 $x \perp L_1$，$x_2 \perp L_1$，所以 $x_1=x-x_2 \perp L_1$。又因为 $x_1 \in L_1$，所以 $x_1 \perp L_2$，从而

$x_1 \perp \Pi$，因此，只有 $x_1 = 0$，即 $x = x_2 \in L_2$。这就是说，$L_1^\perp \subset L_2$。但上面已证明 $L_1^\perp \supset L_2$，从而 $L_1^\perp = L_2$。

同样可证明 $L_2^\perp = L_1$。证毕。

对于准不定度规空间 $(\Pi_0, (\cdot, \cdot)_0)$，引理 1.2 的结论一般不成立。下面是一个例子。

例 1.1 设 H_+, H_-, H_0 是三个 Hilbert 空间，内积分别为 $[\cdot, \cdot]_+$，$[\cdot,\cdot]_-$，$[\cdot,\cdot]_0$，并且 $\dim H_0 \geqslant 2$。用 Π_0 表示 H_+, H_-, H_0 的形式线性和全体所成的线性空间，在 Π_0 上作双线性 Hermite 泛函如下：对任何 $x_\pm, y_\pm \in H_\pm$，$x_0, y_0 \in H_0$，

$$
\begin{aligned}
(x_+ + x_- + x_0, y_+ + y_- + y_0)_0 = &-[x_-, y_-]_- \\
&+ [x_+, y_+]_+,
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

显然 $(\Pi_0, (\cdot, \cdot)_0)$ 成为准不定度规空间。对 Hilbert 空间 H_0，任作分解：$H_0 = H_0^1 \oplus H_0^2$，这里 $\oplus$ 是 Hilbert 空间 H_0 的直交和（即按 $[\cdot, \cdot]_0$ 的直交），并且 $\dim H_0^i \neq 0$，$i = 1, 2$。在 Π_0 上分别作 $L_1 = H_+ + H_0^1$，$L_2 = H_- + H_0^2$，由此可知 L_1，L_2 关于 $(\cdot, \cdot)$ 是直交的，即 $L_1 \perp L_2$，又由于 $L_1 \cap L_2 = \{0\}$，所以 $\Pi = L_1 \oplus L_2$ 是 $(\Pi_0, (\cdot, \cdot)_0)$ 上直交直接和。但是容易证明 $L_1^\perp = H_- + H_0 \neq L_2$，$L_2^\perp = H_2 + H_0 \neq L_1$。

在本书中，不定度规空间中的度规常用圆括号 $(\cdot, \cdot)$，而出现辅助的 Hilbert 空间中的内积常用方括号 $[\cdot, \cdot]$，而记号 $\perp$，$\oplus$ 常表示按不定度规的直交，直交直接和；如果出现 Hilbert 空间的直交，直交和时，为了避免记号上复杂化，我们仍用 $\perp$，$\oplus$。这样用是可以的，因为都表示“直交”，“直交直接和”。在具体场合究竟是按不定度规空间，还是按 Hilbert 空间，常在行文中加以交待。读者务必留心。

§2 完备的不定度规空间及其拓扑

在本节中将要介绍特别重要的一类不定度规空间——完备的不定度规空间。本书的算子理论就是建立在这种空间上的。

1. 完备的不定度规空间的定义

定义 2.1 设 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 是不定度规空间. 如果存在 Π 的正子空间 H_+,负子空间 H_-,使得

$$\Pi = H_- \oplus H_+, \tag{2.1}$$

并且 $(\cdot, \cdot)$ 限制在 H_+ 上时, $(H_+, (\cdot, \cdot))$ 成为 Hilbert 空间; 而 $-(\cdot, \cdot)$ 限制在 H_- 上时, $(H_-, -(\cdot, \cdot))$ 也成为 Hilbert 空间,那末称 Π 为完备的不定度规空间[1]. 而称分解 (2.1) 是 Π 的正则分解.

显然,当 $H_- = \{0\}$ 时,完备的不定度规空间就是通常的 Hilbert 空间. 同样,当 $H_+ = \{0\}$ 时, $(\Pi, -(\cdot, \cdot))$ 也是 Hilbert 空间. 所以,今后所讨论的不定度规空间, 总是假定 $H_\pm \neq \{0\}$. 并且假定 $\dim H_-$, $\dim H_+$ 中至少有一个是无限大(两者都有限的空间属于线性代数范畴).

关于完备的不定度规空间的定义, 在某些文献中经常采用下面两种等价的定义方式 A, B 之一.

A. 设 H_+, H_- 是两个 Hilbert 空间, $[\cdot, \cdot]_+$, $[\cdot, \cdot]_-$ 分别是 H_+, H_- 的内积, $\Pi = H_- + H_+$ 是形式线性和. 在 Π 上定义度规 $(\cdot, \cdot)$ 为

$$(x_- + x_+, y_- + y_+) = -[x_-, y_-]_- + [x_+, y_+]_+, \tag{2.2}$$

其中 $x_\pm, y_\pm \in H_\pm$. 称 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 是完备的不定度规空间.

B. 设 Π 是 Hilbert 空间, $[\cdot, \cdot]$ 是 Π 上内积. 又设 P_+ 为 Π 上任一个非零, 但也不是单位算子 I 的投影算子, 在 Π 上定义度规 $(\cdot, \cdot)$ 如下

$$(x, y) = [Jx, y], \quad x, y \in \Pi, \tag{2.3}$$

其中 $J = P_+ - P_-$, $P_- = I - P_+$. 称 J 为度规算子, $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 为完备的不定度规空间.

本书中只在个别场合采用 A 或 B 式定义.

显然,(2.3) 中 J 是 Hilbert 空间 $(\Pi, [\cdot, \cdot])$ 上自共轭的酉算

---

1) 为什么称做"完备的", 这可参看下面完备不定度规空间上拓扑这一小节(本节第三小节).

子，即 $J=J^{*}$[1]，$J^2=I$。又显然，如果将 (2.3) 式中 J 换成 Hilbert 空间 $(\Pi,[\cdot,\cdot])$ 上有界自共轭算子 A，并且 0 是 A 的正则点(即 A^{-1} 也是 $(\Pi,[\cdot,\cdot])$ 上有界算子) 时，由 (2.3) 产生的 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 也是完备的不定度规空间.

对于一般的不定度规空间 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$，未必有正则分解 (2.1)。这种空间的结构(特别是与拓扑相联系的几何结构)比完备的不定度规空间的结构更为复杂，因而它上面的算子理论更是难于展开，有意义的结果几乎一个也没有。关于一般不定空间的结构的讨论以及在什么条件下才具有上述正则分解 (即成为完备的不定度规空间) 可见 J. Bognár 的著作(文献[1])。本书中主要讨论完备的不定度规空间上算子，所以有关一般不定度规空间的结构不准备涉及。

2. 诱导内积

定义 2.2 设 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 是完备的不定度规空间，$\Pi=H_-\oplus H_+$ 是一个正则分解。对 $x,y\in\Pi$，有唯一分解 $x=x_-+x_+$，$y=y_-+y_+$，$x_\pm$，$y_\pm\in H_\pm$，在 Π 上引入新内积(容易验证它是内积)

$$[x,y]=-(x_-,y_-)+(x_+,y_+), \tag{2.4}$$

称 $[\cdot,\cdot]$ 是由正则分解 $\Pi=H_-\oplus H_+$ 诱导(或产生)的内积。记 $[\cdot,\cdot]$ 导出的 Π 上范数为

$$\|x\|=[x,x]^{\frac{1}{2}},\quad x\in\Pi. \tag{2.5}$$

显然，如果 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 是完备的不定度规空间，$\Pi=H_-\oplus H_+$ 是一个正则分解，由诱导内积 $[\cdot,\cdot]$ 得到的 $(\Pi,[\cdot,\cdot])$ 不仅是内积空间，而且是 Hilbert 空间。$H_\pm$ 还是 $(\Pi,[\cdot,\cdot])$ 的闭子空间。如果用 $P_\pm$ 分别表示 Hilbert 空间 $(\Pi,[\cdot,\cdot])$ 在 $H_\pm$ 上投影算子，$J=P_+-P_-$，那末 (2.4) 还可以写成

$$[x,y]=(Jx,y)=(x,Jy). \tag{2.6}$$

按照定义，对于完备的不定度规空间至少有一个正则分解

---

1) A^* 表示 Hilbert 空间上线性算子 A 的共轭算子.

(2.1)。根据这个正则分解的诱导内积 $[\cdot,\cdot]$，$(\Pi,[\cdot,\cdot])$（或 $(\Pi,\|\cdot\|)$）成为 Hilbert 空间，从而 Π 上有了拓扑。这个拓扑记为 $\mathscr{T}$，从形式上讲，它依赖于 Π 的正则分解，但在下一小节我们将证明拓扑 $\mathscr{T}$ 不依赖于 Π 的正则分解的选取。换句话说，$\mathscr{T}$ 是完备不定度规空间自身决定的。这样，在完备不定度规空间上可以引入集的"有界"、"极限"、"连续"、"闭"等等概念，这和通常 Hilbert 空间一样，不再一一加以具体定义。

注意到 $J^{-1}=J$，(2.6) 等价于

$$(x,y)=[x,Jy]=[Jx,y]. \tag{2.7}$$

因为 J 是 $(\Pi,[\cdot,\cdot])$ 上有界线性算子，所以 $(\cdot,\cdot)$ 是按 $[\cdot,\cdot]$ 的连续双线性泛函。因为 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上拓扑总是取为 $[\cdot,\cdot]$ 所生成的拓扑，所以又可以说度规 $(\cdot,\cdot)$ 必定是完备不定度规空间 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上二元连续函数。

引理 2.1 设 A 是完备不定度规空间 Π 上的子集，那末 $A^{\perp}$ 必是 Π 的闭线性子空间。

证 按定义

$$A^{\perp}=\{x\,|\,(x,y)=0,\ y\in A\}. \tag{2.8}$$

由于 (x,y) 是二元连续函数，从 (2.8) 可知 $A^{\perp}$ 是闭集。证毕。

推论 2.2 设 L_1，L_2 是完备不定度规空间 Π 上两个线性子空间，$L_1\perp L_2$，并且 $\Pi=L_1+L_2$，那末 L_1，L_2 都是闭子空间。

证 根据引理 1.2，$L_1^{\perp}=L_2$，$L_2^{\perp}=L_1$。由引理 2.1 立即得到 L_1，L_2 都是闭的。证毕。

设 A 是完备不定度规空间 Π 的子集，用 $\bar{A}$ 表示 A 的闭包，$\operatorname{span}\{A\}$ 表示由 A 生成的线性子空间，$\overline{\operatorname{span}}\{A\}$ 表示由 A 生成的闭线性子空间，显然 $\bar{A}\subset\overline{\operatorname{span}}\{A\}$。

推论 2.3 设 A 是完备的不定度规空间 Π 的子集，那么

$$\bar{A}\subset\overline{\operatorname{span}}\{A\}\subset A^{\perp\perp}. \tag{2.9}$$

证 因为 $A\subset A^{\perp\perp}$，所以 $\operatorname{span}\{A\}\subset A^{\perp\perp}$。又因为 $A^{\perp\perp}=(A^{\perp})^{\perp}$ 是闭的，所以 $\overline{\operatorname{span}}\{A\}\subset A^{\perp\perp}$，即 (2.9) 成立。证毕。

显然，完备的不定度规空间 Π 中的正子空间的闭包必定是半

正子空间;负子空间的闭包是半负子空间;退化子空间的闭包仍是退化的.

下面的例子说明正子空间的闭包确实可以不是正的，而只能是半正的.

例 2.1 设 $\Pi = l_-\oplus l_+$, $l_\pm = l^2$, $[\cdot,\cdot]_\pm$ 分别表示 $l_\pm$ 的内积. $\{e_i^+\}$, $\{e_i^-\}$ 分别是 l_+, l_- 中完备规范直交系. Π 上度规 $(\cdot,\cdot)$ 取为

$$(x_- + x_+, y_- + y_+) = -[x_-, y_-]_- + [x_+, y_+]_+,$$
$$x_\pm, y_\pm \in l_\pm.$$

令 $x_i = e_1^- + e_1^+ + \frac{1}{i}e_{i+1}^+$ $(i=1, 2, \cdots)$, $L = \mathrm{span}\{x_i | i \geq 1\}$. 显然 L 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot,\cdot))$ 的正子空间. 记 $e_1^+ + e_1^-$ 为 z, 令 $[\cdot,\cdot]$, $\|\cdot\|$ 为正则分解 $\Pi = l_-\oplus l_+$ 所诱导的内积和范数;由于

$$\|x_i - z\|^2 = [x_i - z, x_i - z] = \frac{1}{i^2}, \tag{2.10}$$

所以 $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = z$, 即 $z \in \bar{L}$. 但 z 是零性向量. 所以, $\bar{L}$ 是半正的, 而非正的.

3. 拓扑 $\mathscr{T}$ 一般说来，在一般不定度规空间上引入拓扑是困难的，对于完备的不定度规空间 Π，根据正则分解就可在 Π 上引入拓扑. 显然，完备的不定度规空间可以有很多的不同的正则分解，下面就是一例.

例 2.2 类似于例 2.1, 取 $\Pi = l_-\oplus l_+$. 今再作 Π 的另一个正则分解如下：令

$$l'_+ = \left\{a_1(2e_1^+ + e_1^-)/\sqrt{3} + \sum_{i=2}^{\infty} a_i e_i^+ \,\middle|\, \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty\right\},$$

$$l'_- = \left\{b_1(e_1^+ + 2e_1^-)/\sqrt{3} + \sum_{i=2}^{\infty} b_i e_i^- \,\middle|\, \sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^2 < \infty\right\}.$$

下面分四步来验证 $\Pi = l'_-\oplus l'_+$ 成立，并且是 Π 的正则分解.

(i) 显然，l'_+ 是线性子空间，并且对任何非零 $x = a_1(2e_1^+ + e_1^-)/\sqrt{3} + \sum_{i=2}^{\infty} a_i e_i^- \in l'_+$，

$$(x, x) = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 > 0,$$

即 l'_+ 是正子空间．令 $V: x \longmapsto (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$，易知 V 是内积空间 $(l'_+, (\cdot, \cdot))$ 到 Hilbert 空间 l^2 的保距同构，从而 l'_+ 按 $(\cdot, \cdot)$ 是 Hilbert 空间．

(ii) 类似可证 l'_- 按 $-(\cdot, \cdot)$ 也成为 Hilbert 空间．

(iii) 由于

$$(2e_1^+ + e_1^-)/\sqrt{3} \perp e_i^-, \ i = 2, 3, \cdots,$$

$$(2e_1^+ + e_1^-)/\sqrt{3} \perp (e_1^+ + 2e_1^-)/\sqrt{3},$$

由此得到 $(2e_1^+ + e_1^-)/\sqrt{3} \perp l'_-$．再注意到 $e_i^+ \perp l'_-$ $(i=2,3,\cdots)$，因此 $l'_- \perp l'_+$．

(iv) 又显然有 $\Pi = l'_- + l'_+$，并且 $l'_- \cap l'_+ = \{0\}$．

由上述 (i)—(iv) 和引理 1.2，立即可知 $\Pi = l'_- \oplus l'_+$ 也是正则分解．

设 $\Pi = H^i_- \oplus H^i_+ (i=1, 2)$ 是两个正则分解，由它们导出的内积、范数分别记为 $[\cdot, \cdot]_i$，$\|\cdot\|_i$．一般说来，不可能成立 $\|x\|_1 = \|x\|_2$，$x \in \Pi$．例如，在例 2.1 和例 2.2 中的两个正则分解所导出的范数分别记为 $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$ 显然，

$$\|e_1^+\|_1 = 1, \tag{2.11}$$

由于

$$e_1^+ = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{2e_1^+ + e_1^-}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{e_1^+ + 2e_1^-}{\sqrt{3}}, \tag{2.12}$$

立即得到

$$\|e_1^+\|_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}. \tag{2.13}$$

现在我们要证明完备的不定度规空间的任何两个正则分解所导出的范数必是等价的．为此，先证明一个引理．

引理 2.4 设 $\Pi = H^i_-\oplus H^i_+$ $(i=1, 2)$ 是两个正则分解，那末

$$\dim H^1_\pm = \dim H^2_\pm,$$

证 令 P 为 Π 在 H^1_- 上的投影算子，即当 $x = x_- + x_+$, $x_\pm \in H_\pm$ 时，$Px = x_-$．容易直接验证对一切 $x, y \in \Pi$,

$$(Px, y) = (x, Py). \tag{2.14}$$

再证

$$\overline{PH^2_-} = H^1_-. \tag{2.15}$$

这里的闭包是相对正则分解 $\Pi = H^1_-\oplus H^1_+$ 所导出的范数 $\|\cdot\|_1$ 取的．

事实上，如果有 $e \neq 0$, $e \in H^1_-\ominus PH^2_-$[1]，那么 e 必是负向量，而且

$$(e, Px) = 0, \quad x \in H^2_-.$$

但是 $(e, x)=(Pe, x) = (e, Px)$，所以对一切 $x \in H^2_-$, $(e, x)=0$，从而 $e \in H^2_+$．这又和 e 是负向量相矛盾，从而 (2.15) 成立．由 (2.15) 易知 $\dim H^1_- \leqslant \dim H^2_-$．

对调 H^1_-, H^2_- 的地位，立即可知 $\dim H^1_- = \dim H^2_-$．

同理可以得到 $\dim H^1_+ = \dim H^2_+$．证毕．

定理 2.5（范数等价定理） 设 $\Pi = H^i_-\oplus H^i_+$ $(i = 1, 2)$ 是两个正则分解，由这两个分解所导出的范数分别记为 $\|\cdot\|_i$ $(i = 1, 2)$，那末必存在常数 M, m, $M > m > 0$，使得

$$m\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant M\|x\|_2, \quad x \in \Pi.$$

证 设 $\{e^i_\lambda | \lambda \in \Lambda_-\}$, $\{f^i_\mu | \mu \in \Lambda_+\}$ $(i = 1, 2)$ 分别是 H^i_-, H^i_+ 中完备就范直交系．作 $\Pi \to \Pi$ 的算子 U 如下：对任何 Π 中的向量

$$x = \sum_\lambda a_\lambda e^1_\lambda + \sum_\mu b_\mu f^1_\mu, \quad \sum_\lambda |a_\lambda|^2 + \sum_\mu |b_\mu|^2 < \infty,$$

规定

---

1) $H^1_-\ominus PH^2_-$ 表示 Hilbert 空间 $(H^1_-, -(\cdot,\cdot))$ 的线性空间 PH^2_- 的直交子空间．

$$Ux = \sum_{\lambda} a_{\lambda} e_{\lambda}^{2} + \sum_{\mu} b_{\mu} f_{\mu}^{2}.^{1)} \tag{2.16}$$

显然，U 是 Π 到 Π 的线性双射，而且当 $x, y \in \Pi$ 时，

$$(Ux, Uy) = (x, y)^{1)}, \|Ux\|_2 = \|x\|_1. \tag{2.17}$$

令 $[\cdot, \cdot]_i$ 表示相应于 $\Pi = H_-^i \oplus H_+^i$ 的内积，$P_\pm^i$ 是 Hilbert 空间 $(\Pi, [\cdot, \cdot]_i)$ 在 $H_\pm^i$ 上的投影，$J_i = P_+^i - P_-^i$，利用 J_i 是 $(\Pi [\cdot, \cdot]_i)$ 上的自共轭、酉算子，立即有：对任何 $x, y \in \Pi$，

$$\begin{aligned}[Ux, J_2 y]_2 &= (Ux, y) = (Ux, UU^{-1}y) \\ &= (x, U^{-1}y) = [x, J_2 U^{-1} y]_2.\end{aligned} \tag{2.18}$$

令 $z = J_2 y$，注意到 $J_2^{-1} = J_2$，由 (2.18) 得到

$$[Ux, z]_2 = [x, J_2 U^{-1} J_2 z]_2, \quad x, z \in \Pi.$$

这就是说，定义在整个 Hilbert 空间 $(\Pi, [\cdot, \cdot]_2)$ 上的线性算子 U 的共轭算子是 $J_2 U^{-1} J_2$，但 $J_2 U^{-1} J_2$ 已经是定义在全空间 $(\Pi, [\cdot, \cdot]_2)$ 的算子，所以 $J_2 U^{-1} J_2$ 是定义在全空间的闭线性算子. 根据闭图象定理，$J_2 U^{-1} J_2$ 是 $(\Pi, [\cdot, \cdot]_2)$ 上有界算子. 利用 J_2 是 $(\Pi, [\cdot, \cdot]_2)$ 上酉算子以及逆算子定理，U 便是 $(\Pi, [\cdot, \cdot]_2)$ 上有界算子. 因此，对任何 $x \in \Pi$，

$$\|x\|_1 = \|Ux\|_2 \leqslant \|U\| \|x\|_2.$$

这说明 $\|\cdot\|_2$ 强于 $\|\cdot\|_1$.

同样可证 $\|\cdot\|_1$ 强于 $\|\cdot\|_2$. 证毕.

依据范数等价定理，今后在讨论与拓扑有关的性质时，将可自由地采用一些特定的正则分解.

设 $\Pi = H_-^i \oplus H_+^i$ $(i = 1, 2)$ 是两个正则分解，$\|\cdot\|_i$ 为相应的范数，称

$$k = \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2}$$

---

1) 实际上，这里所作的算子 U 是完备的不定度规空间 Π 上的酉算子（参见第二章 §2).

为这两个正则分解的范数比. 有关 k 的精确表达式将在第四章§1给出.

§3 子空间的结构

这一节主要讨论完备不定度规空间的线性子空间的结构，为进一步讨论算子作准备. 讨论的方法是用通常 Hilbert 空间上线性算子的性质来描述子空间的结构.

1. 线性子空间 L_A

定义 3.1 设 $\Pi = H_-\oplus H_+$ 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 的一个正则分解. 又设 A 是 Hilbert 空间 $(H_-, -(\cdot, \cdot))$ 到 Hilbert 空间 $(H_+, (\cdot, \cdot))$ 的线性算子，它的定义域、值域分别为 $\mathscr{D}(A)$, $\mathscr{R}(A)$. Π 上的线性子空间

$$L = \{x + Ax \mid x \in \mathscr{D}(A)\} \tag{3.1}$$

称做由算子 A 导出的线性子空间，常记 L 为 L_A.

如果将 Π 中向量 $x = x_- + x_+ (x_\pm \in H_\pm)$ 与 $H_- \times H_+$ 中的向量 $\{x_-, x_+\}$ 相对应，并在 $H_- \times H_+$ 上规定内积为

$$[\{x_-, x_+\}, \{y_-, y_+\}] = -(x_-, y_-) + (x_+, y_+). \tag{3.2}$$

显然，由正则分解 $\Pi = H_-\oplus H_+$ 所导出的 Π 上内积 $[\cdot, \cdot]$ 有

$$\begin{aligned}[x_- + x_+, y_- + y_+] &= -(x_-, y_-) + (x_+, y_+) \\ &= [\{x_-, x_+\}, \{y_-, y_+\}].\end{aligned} \tag{3.3}$$

由此可知 Hilbert 空间 $(\Pi, [\cdot, \cdot])$ 与 Hilbert 空间 $(H_- \times H_+, [\cdot, \cdot])$ 保距同构. 今后常不区分 $(\Pi, [\cdot, \cdot])$ 与 $(H_-\times H_+, [\cdot, \cdot])$，从而向量 $x = x_- + x_+$，又可写成 $x = \{x_-, x_+\}$. 这样，由 (3.1)可知：由算子 A 导出的线性子空间 L_A 就是 A 的图象 G_A (或 $G(A)$)：

$$\begin{aligned}G_A &= \{\{x, Ax\} \mid x \in \mathscr{D}(A)\} \\ &= \{x + Ax \mid x \in \mathscr{D}(A)\} = L_A.\end{aligned} \tag{3.4}$$

引理 3.1 下列命题成立.

(i) L_A 为 Π 上半负（半正）子空间的充要条件是：A 是 Hilbert 空间 $(H_-, -(\cdot, \cdot))$ 到 Hilbert 空间 $(H_+, (\cdot, \cdot))$ 的压缩（伸

长)算子，

(ii) L_A 为 Π 上负(正)子空间的充要条件是：对任何 $0 \neq x$ $(\in \mathscr{D}(A))$,

$$\|Ax\| < \|x\|(\|Ax\| > \|x\|).$$

(iii) L_A 为 Π 的闭线性子空间的充要条件是：A 是闭算子.

证 (i), (ii) 都是显然的. 只要注意到完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 的闭线性子空间就是 Hilbert 空间 $(\Pi, [\cdot, \cdot])$ 的闭线性子空间，因而也就是 G_A 是 $(H_- \times H_+, [\cdot, \cdot])$ 的闭线性子空间. 所以 L_A 是闭线性子空间等价于 A 是闭算子. 证毕.

2. 极大半负(半正)子空间 现在我们来证明必可用 L_A 来表示完备的不定度规空间 Π 的极大半负(半正)，极大负(正)子空间等.

引理 3.2 在完备的不定度规空间 Π 上，下列命题成立：

(i) 极大半负(极大半正)子空间必是闭线性子空间.

(ii) L_A 为 Π 上极大半负子空间的充要条件是，A 是 $\mathscr{D}(A) = H_-$ 的压缩算子.

(iii) L_A 为 Π 上极大负、闭的子空间的充要条件是 $\mathscr{D}(A) = H_-$，并且对任何 $0 \neq x$ $(\in \mathscr{D}(A))$, $\|Ax\| < \|x\|$.

(iv) 如果 L 是 Π 的极大半负子空间，那末必存在 A: $H_- \to H_+$, A 是 $\mathscr{D}(A) = H_-$ 的压缩算子，使得 $L = L_A$.

(v) 如果 L 是 Π 的极大负、闭的子空间，那末必存在 $A: H_- \to H_+$, A 满足 $\mathscr{D}(A) = H_-$，并且 $\|Ax\| < \|x\|(x \neq 0)$，使得 $L = L_A$.

证 (i) 因为半负子空间的闭包仍是半负子空间，所以一个半负子空间，如果它是极大半负的，就必然是闭的.

同样，极大半正子空间也必是闭的.

(ii) 如果 L_A 是 Π 的极大半负的，那末由半负性可知，对任何 $x \in \mathscr{D}(A)$,

$$\|Ax\| \leqslant \|x\|. \tag{3.5}$$

现证 $\mathscr{D}(A)$ 在 Hilbert 空间 $(H_-, -(\cdot, \cdot))$ 中稠密：如果不

对，必有非零 $x_- \in H_- \ominus \mathscr{D}(A)$，从而对任何 $x \in \mathscr{D}(A)$，

$$(x_-, x + Ax) = (x_-, x) + (x_-, Ax) = 0,$$

即 $x_- \perp L_A$。因为 x_- 是负向量，易知 $L' = \mathrm{span}\{x_-, L_A\} \supsetneqq L_A$，并且 L' 是半负的。这与 L_A 是极大半负的假设相矛盾，所以 $\mathscr{D}(A)$ 在 $(H_-, -(\cdot, \cdot))$ 中稠密。

由于 L_A 是极大半负的，由 (i) 可知 L_A 是闭的。再根据引理 3.1，A 是闭算子。但 A 是稠定、压缩 [见 (3.5)] 算子，所以

$$\mathscr{D}(A) = H_-.$$

反之，从 A 的压缩性可知 L_A 是半负的。如果 L_A 不是极大半负的，那末必有半负子空间 $L' \supsetneqq L_A$。任取 $x \in L'$，$x \bar{\in} L_A$，记 $x = x_- + x_+$ $(x_\pm \in H_\pm)$。由于 $\mathscr{D}(A) = H_-$，所以 $x_- + Ax_- \in L_A \subset L'$。因而正向量 $x_+ - Ax_- = (x_- + x_+) - (x_- + Ax_-) \in L'$，这与 L' 是半负的假设相冲突。所以 L_A 是极大半负的。

(iii) 的证明和 (ii) 相仿，只不过将 (3.5) 换成

$$\|Ax\| < \|x\|, \quad x \in H_-. \tag{3.6}$$

(iv) 对任何 $x \in L$，必有唯一 $x_\pm \in H_\pm$，使得 $x = x_- + x_+$，或 $x = \{x_-, x_+\}$。由于 L 是半负的，所以 L 中不存在形为 $\{0, x_+\}$ $(x_+ \neq 0)$ 的向量。由于 L 是线性空间，所以存在某个线性算子 A: $H_- \to H_+$，使得 L 是 A 的图象 G_A，而

$$\mathscr{D}(A) = \{x_- \mid \{x_-, x_+\} \in L\},$$

即 $L = L_A$。再利用已经被证明的 (ii)，立即得到 (iv) 的结论。

(v) 与 (iv) 相仿，并利用 (iii) 立即可证。证毕。

对于极大半正或极大正并且闭的子空间完全有类似于 (ii)—(iv) 的结果。不过算子 A 应是 Hilbert 空间 $(H_+, (\cdot, \cdot))$ 到 $(H_-, -(\cdot, \cdot))$ 的线性算子。

极大半负的子空间必是闭的，然而极大负的子空间未必都是闭的，下面是一例。

例 3.1 设 $\Pi = l_- \oplus l_+$，$l_\pm = l^2$，$[\cdot, \cdot]_\pm$ 是 $l_\pm$ 的内积，Π 上度

规为 $(\cdot,\cdot)$，由正分解 $\Pi = l_- \oplus l_+$ 所产生的内积为 $[\cdot,\cdot]$. $\{e_i^+\}$, $\{e_i^-\}$ $(i=1, 2, \cdots)$分别是 l_+, l_-的完备就范直交系. 令 $z = e_1^+ + e_1^-$, $l'_\pm = \overline{\text{span}}\{e_i^\pm \mid i \geqslant 2\}$. 又设 f 是全 Hilbert 空间 l'_- 上定义的无界线性泛函. 作 Π 的线性子空间

$$L = \{x + f(x) z \mid x \in l'_-\}, \tag{3.7}$$

现在证明 L 是 Π 的极大负子空间,但不是闭的.

当 $x = 0$ 时, $f(0) = 0$. 当 x 是 l'_- 中非零向量时,

$$(x + f(x) z, x + f(x) z) = -[x, x]_- < 0,$$

所以 L 是 Π 的负子空间,由于 f 是 l'_- 上无界的,所以存在 $x_n \in l'_-$ $(n = 1, 2, \cdots)$,使得

$$f(x_n) = 1, \|x_n\|^2 = [x_n, x_n]_- \leqslant 1/n^2, n = 1, 2, \cdots. \tag{3.8}$$

因为 $\{x_n + f(x_n) z\} \subset L$, 由 (3.8) 易知 $\{x_n + f(x_n) z\}$ 按完备内积空间的拓扑收敛于 z (即按 $[\cdot,\cdot]$收敛于 z).显然 $z \bar{\in} L$,所以 L 不是 Π 的闭集. 剩下的只要证明 L 是极大负的就可以了. 如果不是,必有 Π 的负子空间 $L' \supsetneqq L$. 任取 $y \in L'$, $y \bar{\in} L$, 设 $y = y'_+ + a e_1^+ + b e_1^- + y'_-$, $y'_\pm \in l'_\pm$,因为 $y'_- + f(y'_-) z \in L$,所以

$$\begin{aligned} 0 \neq y - (y'_- + f(y'_-) z) = \\ y'_+ + a e_1^+ + b e_1^- - f(y'_-) z \in L'. \end{aligned} \tag{3.9}$$

显然

$$a e_1^+ + b e_1^- - f(y'_-) z \neq 0, \tag{3.10}$$

否则在 L' 中将含有正向量 y'_+,这与假设 L' 是负的冲突. 记(3.9)式右边向量为 h,

$$h = y'_+ + \alpha e_1^+ + \beta e_1^-, \ \alpha = a - f(y'_-), \beta = b - f(y'_-).$$

显然也不会出现 $\alpha = \beta \neq 0$ (否则 h 是半正的). 作向量

$$\begin{aligned} h_n &= h - \beta(x_n + f(x_n) z) \\ &= y'_+ + (\alpha - \beta) e_1^+ - \beta x_n, \end{aligned} \tag{3.11}$$

由 (3.8) 易知充分大的 n 以后, h_n 是正向量, 这又与 L' 是负子空间的假设矛盾. 因此 L 是极大负的.

今后的例子中经常用到例 3.1 中所出现的完备的不定度规空

间 $\Pi = l_-\oplus l_+$, $l_\pm = l^2$. 在以后出现的时候我们就不再仔细交待它们上的内积和度规.

3. $L_A^\perp$ 现在用 A 来描述 $L_A^\perp$ 以及 L_A 为退化子空间, $\Pi=L_A\oplus L_A^\perp$ 何时成立等的条件.

设 $\Pi = H_-\oplus H_+$ 是正则分解. 如果 A 是 Hilbert 空间 $(H_-, -(\cdot,\cdot))$ 到 Hilbert 空间 $(H_+, (\cdot,\cdot))$ 的稠定线性算子, 那末 A^* 存在, 并且是 $(H_+, (\cdot,\cdot))$ 到 $(H_-, -(\cdot,\cdot))$ 的算子, 定义域为 $\mathscr{D}(A^*)$. 自然引入下面的线性子空间

$$L_{A^*} = \{A^*y + y \mid y\in \mathscr{D}(A^*)\}.$$

引理 3.3 假设 A 是 $(H_-, -(\cdot,\cdot))$ 到 $(H_+, (\cdot,\cdot))$ 的稠定线性算子, 那么

(i) $L_A^\perp = L_{A^*} = \{\{A^*y, y\}\mid y\in\mathscr{D}(A^*)\}$. 当 A^* 是稠定算子或 A 是稠定闭算子时, $L_A^{\perp\perp} = L_{A^{**}}$.

(ii) L_A 是退化子空间的充要条件, 是 $1\in\sigma_p(A^*A)$[1](或 $1\in\sigma_p(AA^*)$).

(iii) $\Pi=L_A\oplus L_A^\perp$ 成立的充要条件是 $\mathscr{R}(I-A^*A)=H_-$, $\mathscr{R}(I-AA^*)=H_+$. 或者 A 是稠定闭算子, 并且 $1\in\rho(A^*A)$[2] (或 $1\in\rho(AA^*)$, 或 $1\in\rho(A^*A)\cap\rho(AA^*)$).

证 (i) 在正则分解 $\Pi = H_-\oplus H_+$ 下, 显然, $y = y_- + y_+$ $(y_\pm\in H_\pm)$ 是 $L_A^\perp$ 中的向量的充要条件是对任何 $x\in\mathscr{D}(A)$,

$$0 = (x + Ax, y_- + y_+) = (x, y_-) + (Ax, y_+),$$

即

$$-(x, y_-) = (Ax, y_+),\quad x\in\mathscr{D}(A). \tag{3.12}$$

注意到 $(H_\pm, \pm(\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间, 所以(3.12) 等价于

$$y_+\in\mathscr{D}(A^*),\quad y_- = A^*y_+.$$

因此 $L_A^\perp = L_{A^*}$.

当 A^* 是稠定算子时, 不难类似可证 $L_A^{\perp\perp} = L_{A^{**}}$. 而当 A 是

1) $\sigma_p(T)$ 表示算子 T 的特征值全体.

2) $\rho(T)$ 表示算子 T 的正则点全体.

稠定闭算子时，根据 Hilbert 空间上算子理论知道 A^* 必是稠定的，并且 $A = A^{**}$，从而 $L_A^{\perp\perp} = L_{A^{**}} = L_A$.

(ii) L_A 退化，即 $L_A \cap L_A^{\perp} \neq \{0\}$. 因此 L_A 退化的充要条件是存在一对非零向量 $x \in \mathscr{D}(A)$, $y \in \mathscr{D}(A^*)$，使得

$$y = Ax, \quad x = A^*y. \tag{3.13}$$

而 (3.13) 成立的充要条件是有非零向量 x，使得 $x = A^*Ax$. 或者充要条件是有非零向量 y，使得 $y = AA^*y$.

(iii) 如果 $\Pi = L_A \oplus L_A^{\perp}$，那末对任何 $x_- = \{x_-, 0\} \in H_-$，必存在 $x \in \mathscr{D}(A)$, $y \in \mathscr{D}(A^*)$，使得

$$x_- = x + A^*y, \quad 0 = Ax + y. \tag{3.14}$$

这等价于对一切 $x_- \in H_-$，必有 $x \in \mathscr{D}(A)$，使得 $(I - A^*A)x = x_-$，即 $\mathscr{R}(I - A^*A) = H_-$.

同样，考虑 $x_+ = \{0, x_+\} \in H_+$，得到 $\mathscr{R}(I - AA^*) = H_+$.

反之，如果 $\mathscr{R}(I - A^*A) = H_-$, $\mathscr{R}(I - AA^*) = H_+$，那么将上述证明过程反过来就得到 $L_A \oplus L_A^{\perp} = \Pi$.

此外，如果 $L_A \oplus L_A^{\perp} = \Pi$ 成立，由 §1 引理 1.2 和 §2 引理 2.1，可知，L_A 是闭子空间. 再由引理 3.1 的 (iii)，A 是稠定闭算子. 由此便得到 A^*A (AA^*) 是自共轭算子. 又由于 $\mathscr{R}(I - A^*A) = H_-$，所以 $1 \in \rho(A^*A)$. 同样也可以证得 $1 \in \rho(AA^*)$.

反之，假设 A 是稠定闭算子，并且 $1 \in \rho(A^*A)$. 这时，令 $A = U|A|$ 是极分解，即 $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$，$U$ 是部分保距算子. 因为 $A^* = |A|U^*$, $AA^* = U|A|^2U^*$，利用 $1 \in \rho(A^*A)$ 的假设，易知 $1 \in \rho(AA^*)$. 这样，便有 $\mathscr{R}(I - A^*A) = H_-$, $\mathscr{R}(I - AA^*) = H_+$，从而 $\Pi = L_A \oplus L_A^{\perp}$ 成立.

同样可以证明，如果 A 是稠定闭算子，并且 $1 \in \rho(AA^*)$ (或 $1 \in \rho(AA^*) \cap \rho(A^*A)$)，那末 $\Pi = L_A \oplus L_A^{\perp}$ 成立. 证毕.

定理 3.4 设 $\Pi = H_- \oplus H_+$ 是完备的不定度规空间 Π 的正则分解，A 是 $\mathscr{D}(A)$ $(\subset H_-)$ 到 H_+ 的线性算子. 那末 L_A 是 Π 的极大负子空间，并且 $\Pi = L_A \oplus L_A^{\perp}$ 的充要条件是 $\mathscr{D}(A) = H_-$，并且存在常数 α 满足 $0 \leqslant \alpha < 1$，使得 $\|A\| \leqslant \alpha$. 而当 L_A 是极大

负子空间，并且 $\Pi = L_A \oplus L_A^{\perp}$ 时，$\Pi = L_A \oplus L_A^{\perp}$ 必是正则分解.

证 必要性 因为 $\Pi = L_A \oplus L_A^{\perp}$，所以 L_A 是闭的. 又因为 L_A 是极大负的，根据引理 3.2 的 (iii)，$\mathscr{D}(A) = H_-$，并且对一切 H_- 中非零 x，

$$\|Ax\| < \|x\|.$$

再根据引理 3.3 的(iii)，$1 \in \rho(A^*A)$，从而必存在数 α 满足 $0 \leqslant \alpha < 1$，使得 $\|A\| \leqslant \alpha$.

充分性 根据 $\mathscr{D}(A) = H_-$，$\|A\| \leqslant \alpha < 1$，从引理 3.2 的 (iii) 可知 L_A 是极大负闭的. 再由 $\|A\| \leqslant \alpha < 1$ 可知 $1 \in \rho(A^*A)$，利用引理 3.3 的 (iii)，必有 $\Pi = L_A \oplus L_A^{\perp}$.

最后证明 $\Pi = L_A \oplus L_A^{\perp}$ 是正则分解. 事实上，L_A 显然是负的闭子空间. 由于 $\mathscr{D}(A) = H_-$，$\|A\| \leqslant \alpha < 1$，所以 $\|A^*\| = \|A\| \leqslant \alpha < 1$，从而 $L_A^{\perp} = L_{A^*}$ 是极大正闭子空间. 要证明 $\Pi = L_A \oplus L_A^{\perp}$ 是正则分解，只要证明 L_A，$L_A^{\perp}$ 分别按 $-(\cdot,\cdot)$，$(\cdot,\cdot)$ 成为 Hilbert 空间就可以了. 例如，证明 L_A 按 $-(\cdot,\cdot)$ 成为 Hilbert 空间如下：设 $\{x_n\} \subset H_-$，并且使得 $\{x_n + Ax_n\}$ 按 $-(\cdot,\cdot)$ 是基本点列. 从而由

$$\begin{aligned}
&-(x_n - x_m + A(x_n - x_m),\ x_n - x_m + A(x_n - x_m)) \\
&\quad = -(x_n - x_m, x_n - x_m) - (A(x_n - x_m), A(x_n - x_m)) \\
&\quad \geqslant -(1-\alpha)(x_n - x_m, x_n - x_m),
\end{aligned}$$

立即可知 $\{x_n\}$ 必是 $(H_-, -(\cdot,\cdot))$ 上基本点列，利用 $(H_-, -(\cdot,\cdot))$ 的完备性以及 A 的连续性，则存在 x_0，使得

$$-(x_n - x_0, x_n - x_0) \to 0 (n \to \infty),$$

$$(A(x_n - x_0), A(x_n - x_0)) \to 0 (n \to \infty).$$

从而 $\{x_n + Ax_n\}$ 按 $-(\cdot,\cdot)$ 收敛于 $x_0 + Ax_0 \in L_A$，即 L_A 按 $-(\cdot,\cdot)$ 是完备的内积空间. 同样可证 $L_A^{\perp}$ 按 $(\cdot,\cdot)$ 也是 Hilbert 空间. 证毕.

在 Hilbert 空间的算子理论中，常用下列基本事实：如果 L 是 Hilbert 空间 H 的线性子空间，那末 L 的闭包 $\bar{L}$ 必也是 Hilbert 空间，并且 $H = \bar{L} \oplus L^{\perp}$. 然而当 L 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot,\cdot))$

的线性子空间的时候，正如例 2.1 所指出，即使 L 是正子空间，但 $\bar{L}$ 可以是退化的。自然 $\Pi=\bar{L}\oplus L^{\perp}$ 是不成立的，即使 L 是极大负闭子空间，也未必成立分解 $\Pi=L\oplus L^{\perp}$。由定理 3.4 可知，只要取 $\mathscr{D}(A)=H_-$，$\|Ax\|\leqslant\|x\|$ 对一切 H_- 中非零向量成立，但要求 $1\in\sigma(A^*A)$[1]，这时 L_A 就是极大负闭子空间，但 $\Pi=L_A\oplus L_A^{\perp}$ 却不能成立。利用定理 3.4，我们还可以给出 Π 上极大负闭子空间，但按 $-(\cdot,\cdot)$ 并不成为 Hilbert 空间的例子。

例 3.2 设 $H_\pm=L^2[0,1]$，在 $\Pi=H_-\oplus H_+$ 上取度规 $(\cdot,\cdot)$ 如下：对任何 $x_\pm(t)\in H_\pm, y_\pm(t)\in H_\pm$，

$$(x_-+x_+,y_-+y_+)=-\int_0^1 x_-(t)\overline{y_-(t)}\,dt+\int_0^1 x_+(t)\overline{y_+(t)}\,dt. \tag{3.15}$$

易知 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 成为完备的不定度规空间，并且 $\Pi=H_-\oplus H_+$ 是一个正则分解。作 $H_-\to H_+$ 的算子 A 如下：

$$A:\ x_-(t)\longmapsto tx_-(t),\quad x_-(t)\in H_-. \tag{3.16}$$

由 (3.16) 可知，$\mathscr{D}(A)=H_-$，$\|Ax_-\|<\|x_-\|$ 对一切 H_- 中非零 x_- 成立。因为 $1\in\sigma(A^*A)$，因此 $\Pi=L_A\oplus L_A^{\perp}$ 不能成立。

今证 L_A 按 $-(\cdot,\cdot)$ 也不成为 Hilbert 空间。事实上，在 H_- 中取点列

$$x_n(t)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{1-t^2}\right)^{\frac{1}{4}}, & t\in\left[0,\ 1-\dfrac{1}{n}\right];\\ 0\quad, & t\in\left(1-\dfrac{1}{n},\ 1\right].\end{cases}\qquad (n=1,2,\cdots) \tag{3.17}$$

显然，当 $m>n$ 时，

$$-(x_m-x_n+A(x_m-x_n),\ x_m-x_n+A(x_m-x_n))^{2)}$$
$$=\int_0^1(1-t^2)|x_m(t)-x_n(t)|^2dt$$

---

1) $\sigma(T)$ 表示算子 T 的谱.

2) 对于函数空间中的函数 $x(t)$，当把 $x(t)$ 视为向量时，常就简单地用 x 来表示.

$$= \int_{1-\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{m}} \left(\frac{1}{1-t^2}\right)^{\frac{1}{3}} dt. \tag{3.18}$$

由 (3.18) 可知 $\{x_n + Ax_n\}$ 是按 $-(\cdot,\cdot)$ 成为基本点列．但由于函数 $x_0(t) = \left(\frac{1}{1-t^2}\right)^{\frac{2}{3}} \overline{\in} L^2[0,1]$，由此可知，决不存在 $x(t) \in H_- = \mathscr{D}(A)$，使得 $\{x_n + Ax_n\}$ 按 $-(\cdot,\cdot)$ 收敛于 $x + Ax$．这就是说，L_A 不是 Hilbert 空间．

从上例可见，对于完备的不定度规空间上的算子，即使它有一个极大负闭的不变子空间，当把它限制在这个子空间上时，也不能简单地作为 Hilbert 空间上算子来研究．下面来讨论完备的不定度规空间的线性子空间什么时候按原来的度规也成为一个完备的不定度规空间．

4. 完备子空间

定义 3.2 设 $(\Pi, (\cdot,\cdot))$ 是完备的不定度规空间，L 是 Π 的闭线性子空间．如果 $(L, (\cdot,\cdot))$ 是完备的不定度规空间，那末称 L 是 Π 的完备子空间．

首先，我们将给出例子来说明：L 虽不是 Π 的闭线性子空间，但 $(L, (\cdot,\cdot))$ 可以是完备的不定度规空间．

例 3.3 设 $\Pi_1 = H_- \oplus H_+$ 是正则分解，$\dim H_- = 1$，而 H_+ 是可分无限维的．又设 e^- 是 $(H_-, -(\cdot,\cdot))$ 的单位向量，$\{e_i^+\}$ 是 $(H_+, (\cdot,\cdot))$ 的完备就范直交系．记 $z = e^- + e_1^+$，它是零性向量．令

$$\Phi_0 = \left\{ \sum_{i=2}^{n} x_i e_i^+ \,\middle|\, x_i \in \mathbf{C},\ i = 2, \cdots, n,\ n \geqslant 2 \right\}, \tag{3.19}$$

作商空间 $\Phi = (H_+ \ominus \operatorname{span}\{e_1^+\})/\Phi_0$．再任取一个 Φ 上非零线性泛函 f．对任何 $H_+ \ominus \{\alpha e_1^+\}$ 中向量 x，用 $\tilde{x}$ 表示 x 所在的等价类，$\tilde{x} \in \Phi$．作

$$L = \{x + f(\tilde{x})\, z \mid x \in H_+ \ominus \operatorname{span}\{e_1^+\}\}. \tag{3.20}$$

由于 $x \longmapsto f(\tilde{x})$ 是 $H_+ \ominus \operatorname{span}\{e_1^+\}$ 上（无界）线性泛函，所以 L 是

Π_1 的线性子空间．又由于

$$(x+f(\tilde{x})z, x+f(\tilde{x})z)=(x,x)\geq 0,$$

$$x\in H_+\ominus\text{span}\{e_1^+\}, \tag{3.21}$$

唯有 $x=0$ 时，才有 $(x+f(\tilde{x})z,\ x+f(\tilde{x})z)=0$．因此，$L$ 是 Π_1 的正子空间，由于 f 是无界泛函，所以 L 不是闭集．

现在证明 L 按 $(\cdot,\cdot)$ 成为 Hilbert 空间．设 $\{x_n+f(\tilde{x}_n)z\}\subset L$，其中 $x_n\in H_+\ominus\text{span}\{e_1^+\}$，$n=1,2,\cdots$，并且按 $(\cdot,\cdot)$，$\{x_n+f(\tilde{x}_n)z\}$ 是基本点列．由 (3.21) 可知，$\{x_n\}$ 必是 Hilbert 空间 $(H_+\ominus\text{span}\{e_1^+\},(\cdot,\cdot))$ 中基本点列，从而存在 $x\in H_+\ominus\text{span}\{e_1^+\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-x,x_n-x)=0. \tag{3.22}$$

再利用等式 (3.21)，就有

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-x+(f(\tilde{x}_n)-f(\tilde{x}))z,\ x_n-x+(f(\tilde{x}_n)-f(\tilde{x}))z)$$
$$=\lim_{n\to\infty}(x_n-x,x_n-x)=0,$$

即点列 $\{x_n+f(\tilde{x}_n)z\}$ 按 $(\cdot,\cdot)$ 收敛于 L 中的向量 $x+f(\tilde{x})z$．所以 L 按 $(\cdot,\cdot)$ 是 Hilbert 空间，自然它是完备的不定度规空间．

例 3.2 说明完备的不定度规空间 Π 的闭子空间 L（即使极大负闭的），按 $(\cdot,\cdot)$ 未必也成为不定度规空间（按 $-(\cdot,\cdot)$ 未必成为 Hilbert 空间）．这说明定义 3.2 中对 L 的两条假设① L 是闭线性子空间②$(L,(\cdot,\cdot))$是完备的不定度规空间是独立的．

引理 3.5 设 $\Pi=H_-\oplus H_+$ 是正则分解，L 是 Π 的线性子空间，那末

(i) $L=L_A\dotplus L_0^+$，其中 $L_0^+\subset H_+$，A 是 $\mathscr{D}(A)(\subset H_-)$到 H_+ 的某个线性算子．

(ii) 当 L 是闭子空间时，可以做到 $L=L_A\oplus L_0^+$．在有分解 $L=L_A\oplus L_0^+$ 的假设下，A 是由 L 唯一确定的，并且 L 为闭的充要条件是 L_A，L_0^+ 同时都是闭的．

证 (i) 显然，$L_0^+=L\cap H_+$ 必是 L 的线性子空间，L_0^+ 是 L

中一切形如$\{0,y\}$的向量全体。令$P_\pm$是Π在$H_\pm$上的投影。记$Y=P_+L$。显然，Y是H_+的线性子空间，并且$Y\supset L_0^+=P_+L_0^+$。在每个等价类$\tilde{y}\in Y/L_0^+$中，适当选取代表元$y\in\tilde{y}$，使代表元全体$\{y|y\in\tilde{y},\ \tilde{y}\in Y/L_0^+\}$构成$H_+$的线性子空间。作$P_-L$ $(\subset H_-)$到线性子空间$\{y|y\in\tilde{y},\ \tilde{y}\in Y/L_0^+\}$的线性算子$A$如下：对任何$\{x,y'\}\in L$，如果$y'\in\tilde{y}$，那么规定

$$Ax=y, \tag{3.23}$$

易知$\mathscr{D}(A)=P_-L$，A是线性算子，并且$\mathscr{R}(A)=\{y|y\in\tilde{y},\ \tilde{y}\in Y|L_0^+\}$，$L=L_A+L_0^+$。由于$L_A\cap L_0^+=\{0\}$，所以$L=L_A\dotplus L_0^+$。

(ii) 当L是Π的闭线性子空间时，显然L_0^+必是Π的闭线性子空间。因为$L_0^+\subset H_+$，所以L_0^+是Hilbert空间$(H_+,(\cdot,\cdot))$的闭线性子空间。这时可取$Y/L_0^+=Y\ominus L_0^+$。从而$L=L_A\oplus L_0^+$。

从L，L_0^+都是闭线性子空间，以及$L=L_A\oplus L_0^+$，易知L_A也必是闭线性子空间。

如果Π的线性子空间L已经有分解$L=L_A\oplus L_0^+$，那末$L_0^+=L\cap H_+$是由L完全确定的正子空间；如果又有分解$L=L_{A'}\oplus L_0^+$，显然$\mathscr{D}(A')=P_-L$，并且对任何$x\in P_-L$，

$$Ax-A'x=\{x,Ax\}-\{x,A'x\}\in L\cap H_+(=L_0^+), \tag{3.24}$$

$$Ax\in Y\ominus L_0^+,\ A'x\in Y\ominus L_0^+. \tag{3.25}$$

由(3.24)，(3.25)可知，对一切$x\in P_-L=\mathscr{D}(A)=\mathscr{D}(A')$，$Ax=A'x$，即$A=A'$。

最后，假设已经有分解$L=L_A\oplus L_0^+$，并且L_0^+，L_A都是闭线性子空间。只要注意到P_+L_A与L_0^+是Hilbert空间$(H_+,(\cdot,\cdot))$相互直交的线性子空间，易知L必是Π的闭线性子空间。证毕。

推论 3.6 设L是完备的不定度规空间Π的线性子空间。下列命题必成立。

(i) 如果L是闭的，那末$L=L^{\perp\perp}$。

(ii) $\bar{L}=L^{\perp\perp}$。

(iii) 如果$\bar{L}\neq\Pi$，必存在非零向量y，使得$y\perp\bar{L}$。

证 (i) 设 $\Pi = H_- \oplus H_+$ 是正则分解，如果 A 是 $H_- \to H_+$ 的稠定闭算子，那末由引理 3.3 的 (i) 有

$$L_A^\perp = L_{A^*},\quad L_A^{\perp\perp} = L_{A^*}^\perp = L_{A^{**}} = L_A.$$

对于一般的闭线性子空间 L，由引理 3.5 的(i) 和 (ii)，$L = L_A \oplus L_0^+$，并且 L_0^+，L_A 都是闭线性子空间．作空间 Π 的分解：

$$\Pi = [\overline{\mathscr{D}(A)} \oplus \overline{\mathscr{R}(A)}] \oplus [(H_- \ominus \mathscr{D}(A)) \oplus (H_+ \ominus \mathscr{R}(A))].$$

显然，$\Pi^{(1)} = \overline{\mathscr{D}(A)} \oplus \overline{\mathscr{R}(A)}$，$\Pi^{(2)} = (H_- \ominus \mathscr{D}(A)) \oplus (H_+ \ominus \mathscr{R}(A))$ 是按 $(\cdot,\cdot)$ 成为两个完备的不定度规空间，并且上述分解是正则分解．今视 L_A(以及相应的 L_{A^*})为 $\Pi^{(1)}$ 的闭线性子空间，L_0^+ 为 $\Pi^{(2)}$ 的闭线性子空间．由此可知

$$L^\perp = (L_A \oplus L_0^+)^\perp = L_{A^*} \oplus [(H_- \ominus \mathscr{D}(A)) \oplus [(H_+ \ominus \mathscr{R}(A)) \ominus L_0^+]],$$

$$L^{\perp\perp} = L_{A^{**}} \oplus L_0^+ = L_A \oplus L_0^+ = L.$$

(ii) 对一般的线性子空间 L，总有 $\bar{L} \subset L^{\perp\perp}$．另一方面 $\bar{L} \supset L$，所以 $\bar{L}^\perp \subset L^\perp$，从而 $\bar{L} = \bar{L}^{\perp\perp} \supset L^{\perp\perp}$．因此 $\bar{L} = L^{\perp\perp}$．

(iii) 用 $\bar{L}$ 代替 (i) 中的 L，得到 $\bar{L}$ 的分解，$\bar{L} = L_A \oplus L_0^+$；因为 L_A 是 $\Pi^{(1)}$ 的闭线性子空间，对任何非零向量 $y \in \mathscr{D}(A^*)$，$\Pi^{(1)}$ 中，非零向量 $\{A^*y, y\} \perp \bar{L}$．证毕．

注意，推论 3.6 的 (iii) 只是说必有非零 $y \perp \bar{L}$，并不一定有非零 $y, y \bar{\in} \bar{L}$，并且 $y \perp \bar{L}$．下面是一例．

例 3.4 设 $\Pi = H_- \oplus H_+$，$H_\pm = L^2[0,1]$ (见例 3.2)．取 $L = \{\{f, f\} | f \in H_-\}$．显然，$L$ 是 Π 的零性子空间，并且是闭线性子空间．但决不存在非零向量 g，$g \bar{\in} L$，使得 $g \perp L$．事实上，零性子空间 L 既可视为 Π 上半负又可视为 Π 上半正子空间．又因为 $P_\pm L = H_\pm$，根据引理 3.2 的 (ii)，L 是 Π 的极大半负的子空间，也是极大半正的子空间．由于 Π 中任何向量 g，不是半正就是半负的，所以如果 $g \bar{\in} L$，$g \perp L$，那末无论 g 是半正或半负，相应地严格包含 L 的半正或半负子空间 span $\{g, L\}$ 都将与 L 既是极大半正子空间又是极大半负子空间相矛盾．

由上例可见，在不定度规空间理论中，运用子空间的直交集时应特别谨慎。

推论 3.7 设 L 是完备的不定度规空间 Π 的闭线性子空间，在正则分解 $\Pi = H_-\oplus H_+$ 下，$L = L_A\oplus L_0^+$，那末

(i) L 是非退化的充要条件是 L_A 是非退化的。

(ii) 如果 L_A 是完备子空间，L 也是完备子空间。

证 (i) 因为 $L_0^+\perp L_A$，由此可知，当 L 非退化时，L_A 中不会存在非零向量与 L_A 直交，即 L_A 也是非退化的。

反之，设 L_A 是非退化的。对任何 $x\in L$，必有唯一表示：$x = x_A + x_0$，$x_A\in L_A$，$x_0\in L_0^+$。如果 $x\perp L$，则 $x\perp L_0^+$，$x\perp L_A$。可是，从 $x\perp L_0^+$ 以及 $L_A\perp L_0^+$ 可以得到 $x_0 = 0$，因而 $x\in L_A$，并且 $x\perp L_A$。由于 L_A 是非退化的，所以 $x = 0$，即 L 是非退化的。

(ii) 如果 L_A 是完备子空间，那末必存在 L_A 的正则分解 $L_A = N\oplus P$，其中 N,P 分别是 L_A 中的负的、正的线性子空间，并且 $(N,-(\cdot,\cdot))$，$(P,(\cdot,\cdot))$ 都是 Hilbert 空间。由于 $L_0^+\perp N\oplus P$，而 L_0^+,P 都按 $(\cdot,\cdot)$ 成为 Hilbert 空间，所以 $L_0^+\oplus P$ 按 $(\cdot,\cdot)$ 也成为 Hilbert 空间。这样分解

$$L = N\oplus(P\oplus L_0^+) \tag{3.26}$$

是 $(L,(\cdot,\cdot))$ 的正则分解，即 $(L,(\cdot,\cdot))$ 是完备的不定度规空间。又因为 L 是 Π 的闭线性子空间，所以 L 是 Π 的完备子空间。证毕。

引理 3.8 设 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 是不定度规空间，$\Pi^{(i)}(i = 1,2)$ 是 Π 的两个线性子空间，并且 $\Pi = \Pi^{(1)}\oplus\Pi^{(2)}$。下列命题成立。

(i) 如果 $(\Pi^{(i)},(\cdot,\cdot))(i = 1,2)$ 是两个完备的不定度规空间，那末 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 也是完备的不定度规空间。

(ii) 设 L 是 $\Pi^{(1)}$ 的线性子空间。如果 $(\Pi^{(i)},(\cdot,\cdot))$ 是两个完备的不定度规空间，那末 L 为 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上闭(或完备)的线性子空间的充要条件是，L 是完备的不定度规空间 $(\Pi^{(1)},(\cdot,\cdot))$ 的闭(或完备)的线性子空间。

证 (i) 因为假设 $(\Pi^{(i)},(\cdot,\cdot))(i = 1,2)$ 是完备的不定

度规空间，所以有正则分解

$$\Pi^{(i)} = H_-^{(i)} \oplus H_+^{(i)}, \quad i = 1, 2. \tag{3.27}$$

易知 $\Pi = (H_-^{(1)} \oplus H_-^{(2)}) \oplus (H_+^{(1)} \oplus H_+^{(2)})$ 是正则分解，从而 Π 是完备的不定度规空间.

(ii) 从正则分解 $\Pi = (H_-^{(1)} \oplus H_-^{(2)}) \oplus (H_+^{(1)} \oplus H_+^{(2)})$ 显然可见：Π 的拓扑在 $\Pi^{(1)}$ 上诱导出的拓扑，与正则分解 $\Pi^{(1)} = H_-^{(1)} \oplus H_+^{(1)}$ 产生的 $\Pi^{(1)}$ 的拓扑一致，因而 $\Pi^{(1)}$ 的线性子空间 L 在 $\Pi^{(1)}$ 上闭和在 Π 上闭是一致的.

由于 $(\Pi, (\cdot,\cdot))$ 和 $(\Pi^{(1)}, (\cdot,\cdot))$ 的度规 $(\cdot,\cdot)$ 在线性子空间 L 上限制是一致的，而 $(L, (\cdot,\cdot))$ 是否成为完备的不定度规空间是完全由 L 和 $(\cdot,\cdot)$ 确定的，所以，综合上面结果，就得到 L 为 $(\Pi, (\cdot,\cdot))$ 的闭（或完备）的线性子空间的充要条件是，L 是 $(\Pi^{(1)}, (\cdot,\cdot))$ 的闭（或完备）子空间．证毕.

定理 3.9 设 $\Pi = H_- \oplus H_+$ 是正则分解，L 是 Π 的闭线性子空间．那末

(i) 必唯一地存在 $\mathscr{D}(A)(\subset H_-)$ 到 H_+ 的闭线性算子 A，A 是单射，并且

$$L = L_0^- \oplus L_A \oplus L_0^+, \tag{3.28}$$

其中 $L_0^\pm = L \cap H_\pm$（因而 $L_0^\pm$ 是闭线性子空间）.

(ii) 必存在空间的分解 $\Pi = \Pi^{(0)} \oplus \Pi^{(1)} \oplus \Pi^{(2)} \oplus \Pi^{(3)}$，$\Pi^{(i)}$ $(0 \leqslant i \leqslant 3)$ 都是完备子空间，其中

$$\Pi^{(0)} = \overline{\mathscr{D}(A)} \ominus \overline{\mathscr{R}(A)}, \quad \Pi^{(1)} = L_0^-, \quad \Pi^{(2)} = L_0^+, \tag{3.29}$$

$$\Pi^{(3)} = (H_- \ominus (\mathscr{D}(A) \oplus L_0^-)) \oplus (H_+ \ominus (\mathscr{R}(A) \oplus L_0^+)). \tag{3.30}$$

定理 3.9 是引理 3.5 的一般化，它的成立是显而易见的.

从引理 3.8、定理 3.9 的结论中明显地看出，对于 Π 上的闭线性子空间 L，要讨论它的完备性、直交可分解性（即什么时候 $\Pi = L \oplus L^\perp$ 成立）等，实质上只要讨论 $L = L_A$ 的情况就可以了，同时 A 在正则分解 $\Pi = H_- \oplus H_+$ 下具有如下性质：$\overline{\mathscr{D}(A)} = H_-$，$\overline{\mathscr{R}(A)} = H_+$，并且 A 是单射、闭的线性算子.

引理 3.10 设 L 是完备的不定度规空间 Π 上半负(或半正)闭子空间，那末 L 按 $-(\cdot,\cdot)$ (或 $(\cdot,\cdot)$) 成为 Hilbert 空间的充要条件是下式成立：

$$\Pi = L \oplus L^{\perp}. \tag{3.31}$$

证 显然，只要就 L 是半负的情况加以证明.

设 $\Pi = H_- \oplus H_+$ 是正则分解，显然又可不妨在假定 $L = L_A$，而 $\overline{\mathscr{D}(A)} = H_-$，$\overline{\mathscr{R}(A)} = H_+$，并且 A 是单射、闭算子情况下加以证明.

必要性 因为 L_A 是半负的，所以对任何 $x \in \mathscr{D}(A)$，$\|Ax\| \leqslant \|x\|$. 又因为 $\overline{\mathscr{D}(A)} = H_-$，$A$ 是闭算子，所以 $\mathscr{D}(A) = \overline{\mathscr{D}(A)} = H_-$，并且是 Hilbert 空间 $H_- \to$ Hilbert 空间 H_+ 的压缩算子. 令 $A = U|A|$ 是极分解，因为 A 是单射，并且值域 $\overline{\mathscr{R}(A)} = H_+$，所以 U 是 Hilbert 空间 $H_- \to$ Hilbert 空间 H_+ 的酉算子. 根据引理 3.3 的(iii)，只要证明存在 $\varepsilon_0 (0 < \varepsilon_0 < 1)$ 使得

$$\|A\| = \||A|\| \leqslant 1 - \varepsilon_0 \tag{3.32}$$

就可以了.

用反证法来证明：如果满足 (3.32) 的 ε_0 不存在，那么对任何 $0 < \varepsilon < 1$，

$$(E_{1-0} - E_{1-\varepsilon}) H_- \neq \{0\}, \tag{3.33}$$

其中 $E_t (0 \leqslant t \leqslant 1)$ 是 $|A|$ 的谱系.

(I) 先假定 $(H_-, -(\cdot,\cdot))$ 是可分的. 由 (3.33) 可知，存在定义在 $[0,1]$ 的一切 Borel 集 $\mathscr{B}$ 上的有限的数值测度 μ，使得

$$\mu((1-\varepsilon, 1)) \neq 0, \quad 0 < \varepsilon < 1, \tag{3.34}$$

并且 $(H_-, -(\cdot,\cdot))$ 在酉同构下视为 $L^2([0,1], \mathscr{B}, \mu; \mathscr{H}(t))$，其中 $\mathscr{H}$ 是可分的 Hilbert 空间，对每个 $t \in [0,1]$，$\mathscr{H}(t)$ 是 $\mathscr{H}$ 的闭线性子空间，$L^2([0,1], \mathscr{B}, \mu; \mathscr{H}(t))$ 就是 $[0,1]$ 上取值于 $\mathscr{H}$，并且 $f(t) \in \mathscr{H}(t)$ 的强可测，关于 μ 平方可积的向量值函数全体所成的 Hilbert 空间. 而算子 $|A|$ 在酉同构意义下视为

$$|\hat{A}|: f(t) \longmapsto t f(t), \quad f(t) \in L^2([0,1], \mathscr{B}, \mu; \mathscr{H}(t)). \tag{3.35}$$

任取 $[0,1]$ 上满足下面条件的强可测函数 f: 对任何 $\varepsilon\ (0<\varepsilon<1)$,

$$\int_0^{1-\varepsilon}\|f(t)\|^2 d\mu(t)<\infty,\int_0^1\|f(t)\|^2 d\mu(t)=\infty,$$

$$\int_0^1(1-t^2)\|f(t)\|^2 d\mu(t)<\infty. \tag{3.36}$$

利用这个 f,作 $\mathscr{D}(A)=H_-$ 中的点列:

$$x_n(t)=\begin{cases}f(t), & t\in\left[0,1-\dfrac{1}{n}\right];\\ 0, & t\in\left[1-\dfrac{1}{n},1\right].\end{cases}\qquad (n=1,2,\cdots) \tag{3.37}$$

类似于例 3.2, 容易证明 L_A 中点列 $\{x_n, Ax_n\}$ 按 $-(\cdot,\cdot)$ 是基本的. 由于 L_A 按 $-(\cdot,\cdot)$ 是 Hilbert 空间, 因而存在 $x(t)\in\mathscr{D}(A)=H_-$,使得 $\{x_n, Ax_n\}$ 按 $-(\cdot,\cdot)$ 收敛于 $\{x, Ax\}$,即

$$\begin{aligned}&\int_0^1(1-t^2)\|x_n(t)-x(t)\|^2 d\mu(t)\\ &\quad=-(\{x_n-x, A(x_n-x)\},\\ &\qquad\{x_n-x, A(x_n-x)\})\to 0(n\to\infty).\end{aligned} \tag{3.38}$$

从 (3.38) 易知只有 $x(t)=f(t)$. 再由 (3.36) 就得到

$$\int_0^1\|x(t)\|^2 d\mu(t)=\infty.$$

这与假设 $x(t)\in H_-$相矛盾. 从而 (3.32) 成立.

(II) 如果 $(H_-,-(\cdot,\cdot))$ 不是可分的,这时先取 H_- 中一个向量 x_0,它满足: 对任何 ε, $0<\varepsilon<1$,

$$\mu_{x_0}((1-\varepsilon,1))=((E_{1-0}-E_{1-\varepsilon})x_0, x_0)\neq 0. \tag{3.39}$$

这种 x_0 显然存在. H_{x_0} 表示包含 x_0 并且关于 $|A|$ 不变的最小闭子空间. 由于 U 是 $(H_-,-(\cdot,\cdot))\to(H_+,(\cdot,\cdot))$的酉算子,所以有分解 $H_+=UH_{x_0}\oplus U(H_-\ominus H_{x_0})$. 令

$$A_0=A|_{H_{x_0}}, A_1=A|_{H_-\ominus H_{x_0}},$$

$$\Pi^{(0)}=H_{x_0}\oplus UH_{x_0}, \Pi^{(1)}=(H_-\ominus H_{x_0})\oplus U(H_-\ominus H_{x_0}). \tag{3.40}$$

显然 $L_{A_0}\subset\Pi^{(0)}$, $L_{A_1}\subset\Pi^{(1)}$,并且

$$L_A = L_{A_0} \oplus L_{A_1}. \tag{3.41}$$

注意,(3.41) 中的$\oplus$也是 Hilbert 空间 $(L_A, -(\cdot, \cdot))$ 上的直交和,因而 $(L_A, -(\cdot, \cdot))$ 的线性子空间 L_{A_0} 中的基本点列的极限仍在 L_{A_0} 中。在 (3.39) 的条件下,和 (I) 中一样讨论 $\Pi^{(0)}$ 中的 L_{A_0},同样会产生矛盾。必要性证毕。

充分性　由假设 (3.31) 得到 $\Pi = L_A \oplus L_A^{\perp}$. 由半负性可知 A 是压缩的,因而从 A 是稠定闭性立即得到 $\mathscr{D}(A) = H_-$. 令 $A = U|A|$ 是极分解,显然 U 是 $(H_-, -(\cdot, \cdot)) \to (H_+, (\cdot, \cdot))$ 的酉算子. 根据引理 3.3 的 (iii), 从 $\Pi = L_A \oplus L_A^{\perp}$ 的成立可推出 (3.32) 成立. 利用 (3.32) 来证明 $(L_A, -(\cdot, \cdot))$ 是 Hilbert 空间,就和定理 3.4 中相应的部分的证明一样. 这里从略。证毕。

推论 3.11　设 L 是完备不定度规空间 Π 上半负(或半正)子空间,那末 L 是 Π 上的完备子空间的充要条件是

$$\Pi = L \oplus L^{\perp}. \tag{3.42}$$

证　不妨就半负情况加以证明.

必要性　因为 L 是完备子空间,所以 L 是闭的线性子空间;又因为 L 是半负的,那末 $(L, -(\cdot, \cdot))$ 必成为 Hilbert 空间. 由引理 3.10 可知 (3.42) 必定成立.

充分性　从 (3.42) 的成立可知, L 必是闭线性子空间. 又根据引理 3.10, L 必按 $-(\cdot,\cdot)$ 成为 Hilbert 空间,即 L 本身就是 L 的一个正则分解,所以 L 是完备子空间. 证毕.

推论 3.12　设 L 是完备的不定度规空间 Π 上半负(或半正)子空间.

(i) 如果 $(L, -(\cdot, \cdot))$ (或$(L, (\cdot, \cdot))$)成为 Hilbert 空间,并且 L 是闭的,那末 $L^{\perp}$ 必是 Π 的完备子空间.

(ii) 如果 L 是 Π 的完备子空间,那末 $L^{\perp}$ 必是 Π 的完备子空间.

证　不妨就 L 是半负的情况加以证明. 因为 (i), (ii) 实际上是一样的,所以只证 (i). 下面分两步来证明.

(I) 假设 L 在正则分解 $\Pi = H_- \oplus H_+$ 之下, $L = L_A, \overline{\mathscr{D}(A)}$

$=H_-$，$\overline{\mathscr{R}(A)}=H_+$，并且 A 是单射，闭算子，根据引理 3.10 以及它的证明过程可见，不仅

$$\Pi=L_A\oplus L_A^\perp, \tag{3.43}$$

而且 $\|A\|\leqslant\alpha<1$（α是常数）．从而 $\|A^*\|\leqslant\alpha<1$，$L_A^\perp=L_{A^*}$ 是正性完备子空间．

（II）由于一般闭线性子空间 L 总有分解 $L=L_0^-\oplus L_A\oplus L_0^+$．当 L 半负时，$L_0^+=\{0\}$．从定理 3.9（并用定理 3.9 的记号）

$$\Pi=\Pi^{(0)}\oplus\Pi^{(1)}\oplus\Pi^{(2)}\oplus\Pi^{(3)}\ (\Pi^{(2)}=\{0\}), \tag{3.44}$$

而 $\Pi^{(0)}=\overline{\mathscr{D}(A)}\oplus\overline{\mathscr{R}(A)}$，$A$ 在 $\Pi^{(0)}$ 上满足（I）中条件，所以 L_{A^*} 是 $\Pi^{(0)}$ 的正的完备子空间．根据引理 3.8 的（ii），L_{A^*} 是 Π 的正的完备子空间（即不仅 L_{A^*} 是闭的，而且 $(L_{A^*},(\cdot,\cdot))$ 成为 Hilbert 空间）．由（3.44）并利用（3.30）容易算得

$$\begin{aligned}L^\perp&=L_{A^*}\oplus\Pi^{(3)}\\&=(H_-\ominus(\mathscr{D}(A)\oplus L_0^-))\oplus\\&\quad[(H_+\ominus\mathscr{R}(A))\oplus L_{A^*}].\end{aligned} \tag{3.45}$$

显然，（3.45）构成 $L^\perp$ 的正则分解，而 $L^\perp$ 显然是 Π 的闭集．因此 $L^\perp$ 是 Π 的完备子空间．证毕．

下面是完备不定度规空间关于完备子空间的直交分解的基本定理．

定理 3.13 设 L 是完备的不定度规空间 Π 的线性子空间，那末 L 是完备子空间的充要条件是

$$\Pi=L\oplus L^\perp. \tag{3.46}$$

证 必要性 因 L 是完备的，所以 L 是闭的．按定理 3.9，分解

$$L=L_0^-\oplus L_A\oplus L_0^+ \tag{3.47}$$

中 $L_0^\pm$，L_A 都是 Π 的闭线性子空间，又因 $(L,(\cdot,\cdot))$ 是成为完备的不定度规空间，并且有分解（3.47），所以 L_0^- 可以视为空间 $(L,(\cdot,\cdot))$ 的子集 $L_A\oplus L_0^+$ 的直交集，所以 L_0^- 是 $(L,(\cdot,\cdot))$的闭线性子空间．同样，L_0^+，L_A 也是 $(L,(\cdot,\cdot))$ 的闭线性子空间，根据引理 3.10 及推论 3.12，L_0^- 和 $L_A\oplus L_0^+$ 是 $(L,$

$(\cdot,\cdot))$ 的完备子空间。如果再在完备的不定度规空间$(L_A\oplus L_0^+,(\cdot,\cdot))$考察分解$L_A\oplus L_0^+$，并再次利用引理3.10及推论3.12，便得到$L_A$，$L_0^+$都是$(L_A\oplus L_0^+,(\cdot,\cdot))$的完备子空间，则$(L_A,(\cdot,\cdot))$更应该是完备的不定度规空间。但已知$L_A$是$\Pi$的闭线性子空间，所以$L_A$是$\Pi$的完备子空间。根据引理3.8的(ii)以及定理3.9，L_A是$\Pi^{(0)}=\overline{\mathscr{D}(A)}\oplus\overline{\mathscr{R}(A)}$的完备子空间。由此可见，不妨假设$L=L_A$，且$A$在正则分解$\Pi=H_-\oplus H_+$下满足：$\overline{\mathscr{D}(A)}=H_-$，$\overline{\mathscr{R}(A)}=H_+$，同时在$A$是单射、闭算子的条件下证明(3.46)成立就可以了。

令$A=U|A|$是极分解，显然，U是$(H_-,-(\cdot,\cdot))\to(H_+,(\cdot,\cdot))$的酉算子，又令$|A|=\int_0^\infty\lambda dE_\lambda$是$|A|$的谱分解；$H_1=(E_1-E_0)H_-$，$H_2=(I-E_1)H_-$；$A_i=A|_{H_i}$，$i=1,2$，因为$H_1$，$H_2$在$(H_-,-(\cdot,\cdot))$互为直交补，而$U$是酉算子，所以$L_A=L_{A_1}\oplus L_{A_2}$。$L_{A_1}$，$L_{A_2}$分别是$\Pi$的半负、半正子空间。在完备的不定度规空间$(L_A,(\cdot,\cdot))$上，对分解$L_A=L_{A_1}\oplus L_{A_2}$应用引理3.10，则$L_{A_1}$，$L_{A_2}$是$(L_A,(\cdot,\cdot))$的完备子空间。值得注意的是，$L_{A_1}$，$L_{A_2}$分别按$-(\cdot,\cdot)$，$(\cdot,\cdot)$成为Hilbert空间。这样，$L_A=L_{A_1}\oplus L_{A_2}$是$(L_A,(\cdot,\cdot))$的正则分解。由于$A$是闭算子，显然$A_1$，$A_2$也都是闭算子，从而$L_{A_1}$，$L_{A_2}$是$\Pi$的闭线性子空间。这样，$L_{A_1}$，$L_{A_2}$分别是$\Pi$的半负、半正的完备子空间，相仿于引理3.10的必要性的证明，存在ε_0，$0<\varepsilon_0<1$，使得

$$\|A_1\|\leqslant 1-\varepsilon_0,\quad \|A_2^{-1}\|\leqslant 1-\varepsilon_0.$$

即1是$|A|$的正则点，因此$1\in\rho(A^*A)$，根据引理3.3的(iii)，

$$\Pi=L_A\oplus L_A^\perp. \tag{3.48}$$

充分性　根据(3.46)，L是Π的闭线性子空间。从定理3.9可知，我们不妨在正则分解$\Pi=H_-\oplus H_+$下假设$L=L_A$，其中$\overline{\mathscr{D}(A)}=H_-$，$\overline{\mathscr{R}(A)}=H_+$，$A$是单射且为闭的算子。由于(3.48)成立，根据引理3.3的(iii)，$1\in\rho(A^*A)\cap\rho(AA^*)$。由此可知$1\in\rho(|A|)$。这样，$L_{A_1}$，$L_{A_2}$分别按$-(\cdot,\cdot)$，$(\cdot,\cdot)$成为Hilbert空

间，从而 $L_A = L_{A_1} \oplus L_{A_2}$ 是 $(L_A, (\cdot, \cdot))$ 的正则分解。又因为 L_A 是闭的，所以 L_A 是完备子空间。证毕。

推论 3.14 设 $\Pi^{(i)}$ $(i=1,2)$ 是完备的不定度规空间 Π 的两个线性子空间，并且 $\Pi = \Pi^{(1)} \oplus \Pi^{(2)}$。又设 L_i $(i=1,2)$ 是 $\Pi^{(i)}$ 的线性子空间。那么

(i) $\Pi^{(i)}$ $(i=1,2)$ 都是 Π 的完备子空间。

(ii) $L_1 \oplus L_2$ 为 Π 的闭（或完备）线性子空间的充要条件是，L_i $(i=1,2)$ 分别是 $(\Pi^{(i)}, (\cdot, \cdot))$ 的闭（或完备）线性子空间。

证 (i) 实际上是定理 3.13 的直接推论。

(ii) 根据 (i)，$\Pi^{(i)}$ $(i=1,2)$ 是完备子空间，因而有正则分解

$$\Pi^{(i)} = H_-^{(i)} \oplus H_+^{(i)}, \quad i=1,2. \tag{3.49}$$

显然

$$\Pi = (H_-^{(1)} \oplus H_-^{(2)}) \oplus (H_+^{(1)} \oplus H_+^{(2)}) \tag{3.50}$$

构成 Π 的正则分解。由 (3.49)、(3.50) 分别产生的内积记为 $[\cdot, \cdot]_i$, $(i=1,2)$, $[\cdot, \cdot]$，可知

$$(\Pi, [\cdot, \cdot]) = (\Pi^{(1)}, [\cdot, \cdot]_1) \oplus (\Pi^{(2)}, [\cdot, \cdot]_2), \tag{3.51}$$

这里 $\oplus$ 是普通 Hilbert 空间意义下的直交和（其实，这里也是按不定度规 $(\cdot, \cdot)$ 的直交直接和）。Π, $\Pi^{(i)}$ $(i=1,2)$ 中分别在上述内积下，$L_1 \oplus L_2$ 不仅是按 $(\cdot, \cdot)$ 的直交直接和，而且也是按 $[\cdot, \cdot]$ 的直交和。从而 $L_1 \oplus L_2$ 为 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 的闭线性子空间的充要条件是，L_i $(i=1,2)$ 分别是 $(\Pi^{(i)}, (\cdot, \cdot))$ 的闭线性子空间。

如果 $L^{(i)}$ $(i=1,2)$ 分别是 $(\Pi^{(i)}, (\cdot, \cdot))$ 的完备子空间，那末 L_i $(i=1,2)$ 是 $(\Pi^{(i)}, (\cdot, \cdot))$ 的闭线性子空间，根据上面已证明的事实，$L_1 \oplus L_2$ 是 Π 的闭线性子空间。又因为 $(L_i, (\cdot, \cdot))$ $(i=1,2)$ 都是完备的不定度规空间，所以 $(L_1 \oplus L_2, (\cdot, \cdot))$ 是完备空间，从而 $L_1 \oplus L_2$ 是 Π 的完备子空间。

反之，如果 $L = L_1 \oplus L_2$ 是 Π 的完备子空间，那么由 L 的闭性，立即得到 L_i $(i=1,2)$ 分别是 $\Pi^{(i)}$ 的闭线性子空间。由于 $(L, (\cdot, \cdot))$ 构成完备的不定度规空间，在空间 $(L, (\cdot, \cdot))$ 上考

察分解 $L = L_1 \oplus L_2$，根据定理 3.13，L_1, L_2 都是 $(L, (\cdot, \cdot))$ 的完备子空间，并且 $(L_i, (\cdot, \cdot))$ $(i = 1, 2)$ 都构成完备的不定度规空间。从而 $L_i (i = 1, 2)$ 分别是 $(\Pi^{(i)}, (\cdot, \cdot))$ 的完备子空间。证毕。

一般说来：L_1, L_2 是两个闭线性子空间，$L_1 \cap L_2 = \{0\}$，并且 $L_1 \perp L_2$。但这时却不能断言 $L_1 \oplus L_2$ 是闭线性子空间。

例 3.5 设 $\Pi = H_- \oplus H_+$，$H_\pm = L^2[0, 1]$。令 $L^2[0,1]$ 上算子

$$A: f(t) \longmapsto tf(t),\quad f(t) \in L^2[0,1].$$

今视 A 为 $H_- \to H_+$ 的线性算子。取 $L_1 = L_A$，$L_2 = L_A^\perp (= L_{A^*})$。显然，$L_1, L_2$ 分别是 Π 的负、正闭线性子空间，并且 $L_1 \perp L_2$，由于 $1 \bar{\in} \sigma_p(A^*A)$，所以 L_A 非退化，即 $L_1 \cap L_2 = \{0\}$。

对任何 $f: f(t) \in L^2[0, 1]$，$(1 - t^2)^{-1} f(t) \in L^2[0, 1]$，显然，

$$\{f, 0\} = \{(1 - t^2)^{-1} f, t(1 - t^2)^{-1} f\} + \{-t^2(1 - t^2)^{-1} f, -t(1 - t^2)^{-1} f\},$$

即 $\{f, 0\} \in L_1 \oplus L_2$。注意，满足条件：$f(t) \in L^2[0,1]$，$(1 - t^2)^{-1} f(t) \in L^2[0, 1]$ 的 $f(t)$ 全体在 $L^2[0, 1]$ 中稠密，因而如果 $L_1 \oplus L_2$ 是 Π 的闭线性子空间，那么必然 $L_1 \oplus L_2 \supset H_-$。同样又有 $L_1 \oplus L_2 \supset H_+$。这样，便有 $\Pi = L_A \oplus L_A^\perp$。这显然与 $1 \in \sigma(A^*A)$ 相矛盾。

从定理 3.13 还可得到下面重要的推论。为此引入如下记号：设 L_1, L_2 是两个完备子空间，$L_1 \subset L_2$。记 $L_2 \cap L_1^\perp$ 为 $L_2 \ominus L_1$。显然，当 L_2 是 Hilbert 空间时，这里的 $\ominus$ 就与普通 Hilbert 空间情况一致。注意，本书中 $\ominus$ 只对完备的子空间 L_1, L_2 使用。

推论 3.15 设 L_1, L_2 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 的两个完备子空间。那么

(i) $L_1^\perp$ 是完备子空间。

(ii) 如果线性子空间 $L \subset L_1$，那末 L 是 Π 的完备子空间的充要条件是 L 是完备的不定度规空间 $(L_1, (\cdot, \cdot))$ 的完备子空间。

(iii) 当 $L_1 \perp L_2$ 时，$L = L_1 \oplus L_2$ 必是 Π 的完备子空间。

(iv) 当 $L_1 \subset L_2$ 时，$L = L_2 \ominus L_1 (= L_2 \cap L_1^\perp)$ 必是 Π 的完备

子空间，并且 $L_2 = L_1 \oplus L$.

证 (i) 是定理 3.13 的直接推论. 取 $\Pi^{(1)} = L_1$, $\Pi^{(2)} = L_1^{\perp}$, 根据引理 3.8 的 (ii)，立即可得本推论的 (ii).

(iii) 因为 $L_2 \subset L_1^{\perp}$, 根据本推论的 (i), (ii), 立即可知 L_2 是 $(L_1^{\perp}, (\cdot, \cdot))$ 的完备子空间，从而 $\Pi = L_1 \oplus L_2 \oplus L'$, 其中 $L_2 \oplus L' = L_1^{\perp}$. 根据定理 3.13, $L_1 \oplus L_2$ 是 Π 的完备子空间.

(iv) 因为 L_1, L_2 是 Π 的完备子空间，所以 $\Pi = L_2 \oplus L_2^{\perp}$, 而且 L_1 是$(L_2, (\cdot, \cdot))$的完备子空间，所以 $L_2 = L_1 \oplus L$, 并且

$$\Pi = L_1 \oplus L \oplus L_2^{\perp}. \tag{3.52}$$

由此可知 $L_1^{\perp} = L \oplus L_2^{\perp}$, $L = L_2 \cap L_1^{\perp}$, 并且 L 是 Π 的完备子空间. 证毕.

推论中的 (iii) 不能推广成可列个完备子空间的和（即使和后再取闭包）的情况. 例子是容易给出的.

上面是用直交分解来判断线性子空间的完备性. 下应将从拓扑方面来判断线性子空间的完备性.

引理 3.16 设 L 是完备的不定度规空间 Π 的负（或正）子空间，并且按 $-(\cdot, \cdot)$ (或 $(\cdot, \cdot)$) 成为 Hilbert 空间，那末 L 是完备子空间的充要条件是 $\bar{L}$ 仍是负(或正)子空间，或者 $\bar{L}$ 是非退化线性子空间.

证 必要性是显然的. 下面证明充分性，并且只就 L 是负子空间情况加以证明. 显然，只要证明 $L = \bar{L}$ 即可.

因为 $(\cdot, \cdot)$ 关于 Π 上拓扑 $\mathscr{T}$ 是二元连续函数，而 L 按 $\mathscr{T}$ 在 $\bar{L}$ 上稠密，自然 L 按 $-(\cdot, \cdot)$ 也在 $\bar{L}$ 中稠密. 因此，对任何 $x \in \bar{L}$, 必有 $x_n \in L$ $(n = 1, 2, \cdots)$，使得

$$\lim_{n \to \infty} -(x_n - x, x_n - x) = 0. \tag{3.53}$$

由 (3.53) 可知 $\{x_n\}$ 按 $-(\cdot, \cdot)$ 是基本点列. 但 $(L, -(\cdot, \cdot))$ 是 Hilbert 空间，所以必存在 $x_0 \in L$，使得

$$\lim_{n \to \infty} -(x_n - x_0, x_n - x_0) = 0. \tag{3.54}$$

由 (3.53)、(3.54) 立即得到

$$-(x-x_0, x-x_0)=0. \tag{3.55}$$

然而 $x-x_0\in\bar{L}$,而 $\bar{L}$ 是负子空间(或非退化子空间),所以 $x-x_0\in L$,即 $L=\bar{L}$. 证毕.

为推广引理 3.16,再证下面引理.

引理 3.17 设 L 是完备的不定度规空间 Π 的半负(或半正)子空间. 如果 L 中有零性向量 z,那末 $z\perp L$.

证 只就 L 是半负情况加以证明. 如果结论不对,必有 $x\in L$, $(x,z)\neq 0$.

任取复数 λ, $x+\lambda z\in L$. 因此

$$0\geqslant(x+\lambda z, x+\lambda z)=(x,x)+\lambda(z,x)+\bar{\lambda}(x,z)$$

对一切复数 λ 成立. 这显然是不可能的. 证毕.

定理 3.18 设 L 是完备的不定度规空间 Π 的线性子空间, 并且 $(L,(\cdot,\cdot))$ 成为完备的不定度规空间. 那末 L 是 Π 的完备子空间的充要条件是 $\bar{L}$ 是非退化的.

证 必要性 因为 L 是完备子空间,所以 L 是闭的,即 $L=\bar{L}$. 又因为 $(L,(\cdot,\cdot))$ 成为完备的不定度规空间,所以 L (即 $\bar{L}$)是非退化的.

充分性 显然,仅需证明 $L=\bar{L}$. 因为 $(L,(\cdot,\cdot))$ 是完备的不定度规空间,所以有正则分解:

$$L=N\oplus P, \tag{3.56}$$

其中 N,P 分别是负、正子空间, 并且分别按 $-(\cdot,\cdot)$, $(\cdot,\cdot)$ 成为 Hilbert 空间.

先证 $\bar{N}$ 是 Π 的负子空间. 如果不对, 半负子空间 $\bar{N}$ 中必有零性向量 z,根据引理 3.17, $z\perp N$. 又因为 $N\perp P$,所以 $\bar{N}\perp P$,从而

$$z\perp N, z\perp P. \tag{3.57}$$

由此立即得到 $z\perp\overline{N\oplus P}=\bar{L}$. 显然这与 $\bar{L}$ 的非退化假设相矛盾.

同样可证 P 是 Π 的正子空间.

根据引理 3.16,N,P 都是 Π 的完备子空间. 再利用推论 3.15 的 (iii), $L=N\oplus P$ 是 Π 的完备子空间. 证毕.

5. 非退化闭线性子空间的分解 这一小节主要给出非退化闭

线性子空间的分解定理.

定理 3.19 设 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 是完备的不定度规空间，那末 L 是 Π 的非退化闭线性子空间的充要条件将有下列分解

$$L = N \oplus P, \tag{3.58}$$

其中 N, P 分别是负、正闭线性子空间，并且存在完备子空间 $\Pi^{(i)}$ $(i=1,2)$，使得

$$\Pi = \Pi^{(1)} \oplus \Pi^{(2)},\ N \subset \Pi^{(1)},\ P \subset \Pi^{(2)}. \tag{3.59}$$

证 **充分性** 由推论 3.14 的 (ii) 立即可知，L 是 Π 的闭线性子空间. 从 (3.58) 的分解易知，L 必是非退化的.

必要性 从定理 3.9 易知，不妨假设在正则分解 $\Pi=H_-\oplus H_+$ 下，对 $L=L_A$ 的情况加以证明，其中 A 是满足 $\overline{\mathscr{D}(A)}=H_-$，$\overline{\mathscr{R}(A)}=H_+$，并且 A 是单射、闭线性算子.

因为 L_A 是非退化的，所以 $1\bar{\in}\sigma_p(A^*A)$，从而 $1\bar{\in}\sigma_p(AA^*)$.

令 $A=U|A|$ 是极分解，$1\bar{\in}\sigma_p(|A|)$，U 是 $(H_-,-(\cdot,\cdot))$ 到 $(H_+,(\cdot,\cdot))$ 的酉算子. 又令 $|A|=\int_0^\infty \lambda dE_\lambda$ 是谱分解，类似于定理 3.13 的证明，令 $H_1=(E_1-E_0)H_-$，$H_2=(I-E_1)H_-$，$A_i=A|_{H_i}$，$i=1,2$，有 $L_A=L_{A_1}\oplus L_{A_2}$. 取

$$N=\{\{x,A_1x\}|x\in H_1\}\ (\text{即 } N=L_{A_1}),$$
$$P=\{\{y,A_2y\}|y\in H_2\cap\mathscr{D}(A)\}(\text{即} P=L_{A_2}),$$
$$\Pi^{(1)}=H_1\oplus\overline{\mathscr{R}(A_1)},\quad \Pi^{(2)}=H_2\oplus\overline{\mathscr{R}(A_2)}.$$

显然，$\Pi^{(i)}$ $(i=1,2)$ 都是完备子空间，$\Pi^{(1)}\supset N$，$\Pi^{(2)}\supset P$，并且 N 是负子空间，P 是正子空间（因为 $1\bar{\in}\sigma_p(|A|)$）. 再利用 $\overline{\mathscr{D}(A)}=H_-$，$\overline{\mathscr{R}(A)}=H_+$，$A$ 是单射、闭算子，易知 $\mathscr{R}(A_1)\perp\mathscr{R}(A_2)$，且 A_1，A_2 都是闭线性算子. 从而 N，P 是两个闭线性子空间，并且 $H_+=\overline{\mathscr{R}(A_1)}\oplus\overline{\mathscr{R}(A_2)}$. 这样 $\Pi=\Pi^{(1)}\oplus\Pi^{(2)}$. 证毕.

§4 标准分解

完备的不定度规空间 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 有正则分解 $\Pi=H_-\oplus$

H_+，它是我们考察问题（包括以后线性算子的研究）最常用的基本分解之一．空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 对于它的线性子空间 L 是否有直交分解 $\Pi = L \oplus L^\perp$，这一点在今后线性算子的研究中具有很重要的地位．可是，正如定理 3.13 所指出的，能做到分解 $\Pi = L \oplus L^\perp$ 的 L 必是 Π 的完备子空间．然而，在讨论算子时，由算子所产生的某些重要空间，例如算子的零空间、值域、特征子空间、根子空间等等，一般说来，容易证明它们在一定条件下是闭线性子空间，但未必是完备子空间，甚至它们是退化的子空间，则自然不可能有直交分解．根据 Hilbert 空间线性算子理论的经验，这对 Π 空间上线性算子理论的展开是很不利的．为了今后算子理论的需要，我们还要引入另一类重要的分解——标准分解．以后各章中将会看到它比直交分解更为被广泛采用．标准分解是由于讨论退化子空间的结构而导入的，所以本节内容实质上是讨论一般的闭线性子空间（特别是退化子空间的）结构．

1. 零性子空间　退化子空间的一种极端情况是零性子空间．

设 $\Pi = H_- \oplus H_+$ 是正则分解，V 是 Hilbert 空间 $(H_-, -(\cdot, \cdot))$ 到 Hilbert 空间 $(H_+, (\cdot, \cdot))$ 的（线性）保距算子，定义域 $\mathscr{D}(V)$，值域 $\mathscr{R}(V)$．这种保距算子全体记为 $\mathbf{V}$．用 $\mathbf{Z}$ 表示 Π 的零性子空间全体，$P_\pm$ 表示在正则分解 $\Pi = H_- \oplus H_+$ 下 Π 在 $H_\pm$ 上的投影，$J = P_+ - P_-$．对任何 $Z \in \mathbf{Z}$，用 $Z_\pm$ 表示 $P_\pm Z$．

引理 4.1　设 $\Pi = H_- \oplus H_+$ 是正则分解．下列命题成立．

(i) 对任何 $V \in \mathbf{V}$，L_V，$L_{V^{-1}}$[1] $\in \mathbf{Z}$．

(ii) 映射 $\tau: V \longmapsto L_V$ 是 $\mathbf{V}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的双射．

(iii) 当 $V_1, V_2 \in \mathbf{V}$，并且 $\mathscr{D}(V_1) \perp \mathscr{D}(V_2)$，$\mathscr{R}(V_1) \perp \mathscr{R}(V_2)$ 时，规定 $V_1 \oplus V_2: \alpha x_1 + \beta x_2 \longmapsto \alpha V_1 x + \beta V_2 x$，$(x_i \in \mathscr{D}(V_i)$，$i = 1, 2$，$\alpha, \beta \in \mathbf{C})$，则 $L_{V_1 \oplus V_2} = L_{V_1} \oplus L_{V_2}$．

(iv) 对任何 $V \in \mathbf{V}$，L_V 是 Π 的闭线性子空间的充要条件是

$$\mathscr{D}(V) = \overline{\mathscr{D}(V)}, \quad \mathscr{R}(V) = \overline{\mathscr{R}(V)}. \tag{4.1}$$

---

1) V^{-1} 是 $\mathscr{R}(V)\ (\subset H_+) \to \mathscr{D}(V)\ (\subset H_-)$ 的保距算子，这里的 $L_{V^{-1}}$ 实际上表示 $\{\{V^{-1}y, y\} \mid y \in \mathscr{R}(V)\}$．

证 (i) 利用 V, V^{-1} 的保距性，可直接验证 $L_V, L_{V^{-1}} \in \mathbf{Z}$.

(ii) 对 $\mathbf{V}$ 中不同的 V_1, V_2,它们的图象 G_{V_1}, G_{V_2} 显然也不相同,即 $L_{V_1} \neq L_{V_2}$,从而 τ 是 $\mathbf{V}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的单射.

反之，对任何 $Z \in \mathbf{Z}$, 显然 Z 中不含形为 $\{0, y\}(y \neq 0)$ 的向量.因而 Z 必是 $H_- \to H_+$ 的某个线性算子 V 的图象.显然,$\mathscr{D}(V) = Z_-$, $\mathscr{R}(V) = Z_+$. 利用 Z 中向量都是零性的,易知 $V \in \mathbf{V}$,即 τ 是满射.

(iii),(iv) 都甚显然. 证毕.

引理 4.2 设 $Z_1, Z_2 \in \mathbf{Z}$, $Z_1 = L_{V_1}$, $Z_2 = L_{V_2}$. 下列命题成立.

(i) $\bar{Z}_1 \in \mathbf{Z}$, 并且 $\bar{Z}_1 = L_{\bar{V}_1}$,这里 $\bar{V}_1$ 是 V_1的最小闭扩张.

(ii) 当 $Z_1 \perp Z_2$ 时,那末 $Z_1 + Z_2 \in \mathbf{Z}$, 并且 $\bar{Z}_1 \perp \bar{Z}_2$.

本引理是显然的.

如果 $Z_i = L_{V_i} \in \mathbf{Z}$, $i=1, 2$, 并且 $Z_1 \perp Z_2$. 由引理 4.2 的 (ii) 可知，必存在 $V \in \mathbf{V}$, 使得 $L_V = Z_1 + Z_2$. 一般说来，即使再满足 $Z_1 \cap Z_2 = \{0\}$,也未必成立 $L_V = L_{V_1 \oplus V_2}$ (注意,只有 $\mathscr{D}(V_1) \perp \mathscr{D}(V_2)$, $\mathscr{R}(V_1) \perp \mathscr{R}(V_2)$ 时，才能定义 $V_1 \oplus V_2$ (参见引理 4.1 的(iii))).

例 4.1 设 $\Pi = H_- \oplus H_+$ 是正则分解，$\dim H_\pm \geqslant 2$. 又设 $e_i^\pm$ $(i = 1, 2)$ 分别是 $(H_\pm, \pm(\cdot, \cdot))$ 两个就范直交向量. 取 $Z_1 = \operatorname{span}\{z_1\}$, $z_1 = e_1^- + e_1^+$; $Z_2 = \operatorname{span}\{z_2\}$, $z_2 = z_1 + \beta(e_2^- + e_2^+)$ (β 是非零常数), 由于

$$(z_1, z_2) = (e_1^-, e_1^-) + (e_1^+, e_1^+) = 0,$$

所以 $Z_1 \perp Z_2$. 显然 Z_i $(i = 1,2)$ 都是零性子空间,并且 $Z_1 \cap Z_2 = \{0\}$.然而,相应于 $Z_i (i=1, 2)$ 的 L_{V_i} 并不满足 $\mathscr{D}(V_1) \perp \mathscr{D}(V_2)$ ($\mathscr{R}(V_1) \perp \mathscr{R}(V_2)$ 也不满足).

2. 退化子空间的结构 设 L 是不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上的线性子空间. 令

$$Z_L = L \cap L^\perp. \tag{4.2}$$

显然,Z_L 正是 L 中能与整个 L 直交的向量全体,即

$$Z_L = \{x \mid x \in L, \text{并且} (x, y) = 0, y \in L\}.$$

引理 4.3 设 L 是完备的不定度规空间 Π 的线性子空间，下列命题成立。

(i) L 为退化的充要条件是 $Z_L \neq \{0\}$。

(ii) 当 L 闭时，L 为退化的充要条件是，$L^\perp$ 是退化的。

(iii) 如果 L 是退化的，那末 $\bar{L}$ 必是退化的，并且

$$\bar{Z}_L \subset Z_{\bar{L}}. \tag{4.3}$$

(iv) 如果 L 是半负（或半正）子空间，那末 Z_L 正是 L 中零性向量全体。

证 (i), (ii) 是显然的，(iv) 由引理 3.17 立即可得。

今证明 (iii) 因 L 是退化的，所以 $Z_L \neq \{0\}$。任取 $z \in Z_L$，由于 $z \perp L$，所以 $z \perp \bar{L}$。由此可见，$\bar{L}$ 不仅退化，而且

$$Z_L \subset Z_{\bar{L}}. \tag{4.4}$$

但 $\bar{L}, \bar{L}^\perp$ 是两个闭集，所以 $Z_{\bar{L}} = \bar{L} \cap \bar{L}^\perp$ 是闭集，由 (4.4) 立即得到 (4.3)，证毕。

定理 4.4 设 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 是完备的不定度规空间。L 为 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 的闭线性子空间的充要条件，是存在三个完备子空间 $\Pi^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$，以及负闭线性子空间 N，正闭线性子空间 P，零性闭线性子空间 Z，使得

$$\Pi = \Pi^{(1)} \oplus \Pi^{(2)} \oplus \Pi^{(3)}, \; L = N \oplus Z \oplus P,$$
$$N \subset \Pi^{(1)}, \; P \subset \Pi^{(2)}, \; Z \subset \Pi^{(3)}, \tag{4.5}$$

并且 Z 是 $(\Pi^{(3)}, (\cdot, \cdot))$ 上既是极大半正又是极大半负的子空间。

证 由推论 3.14 的 (ii) 知道，定理 4.4 的充分性是显然的。下面证明必要性，

我们不妨假定在正则分解 $\Pi = H_- \oplus H_+$ 之下，$L = L_A$，而且 $\mathscr{D}(A) = H_-$，A 是闭算子。

记相应于 1 的算子 A^*A, AA^* 的特征子空间（可能只有零向量）分别为 E, F。显然 E, F 分别是 H_-, H_+ 的闭线性子空间。取 $\Pi^{(3)} = E \oplus F$，由此易知 $\Pi^{(3)}$ 是完备子空间，并且 $\Pi^{(3)} = E \oplus$

F是正则分解．对任何 $x\in E$，记 $y=Ax$．由引理 3.3 的 (ii) 易知

$$Z_L=L\cap L^{\perp}=\{\{x,Ax\}|x\in E\}$$
$$=\{\{A^*y,y\}|y\in F\}. \tag{4.6}$$

取 $Z=Z_L$，由于 Z 是零性子空间（既可视为半负，又可视为半正子空间），而 A 在整个 E 上有定义，A^* 在整个 F 上有定义．所以，由引理 3.2 的 (ii) 可知，Z 是 $\Pi^{(3)}$ 的既是极大半负，又是极大半正子空间．由极大性，Z 是 $\Pi^{(3)}$（从而是 Π）的闭线性子空间．

取 $\Pi'=(H_-\ominus E)\oplus(H_+\ominus F)$，$L'=\{\{x,Ax\}|x\in(H_-\ominus E)\cap\mathscr{D}(A)\}$，显然 $\Pi=\Pi'\oplus\Pi^{(3)}$．今证 $L'\subset\Pi'$：对任何 $x\in(H_-\ominus E)\cap\mathscr{D}(A)$，$y\in E$，由于 $Z\perp L$，$x\perp y$，所以

$$0=(\{x,Ax\},\{y,Ay\})=(Ax,Ay), \tag{4.7}$$

即 Ax 与一切 Ay 直交，或者说与 F 直交．从而 $Ax\in H_+\ominus F$，即 $L'\subset\Pi'$．

由于 $\mathscr{D}(A)=E\oplus((H_-\ominus E)\cap\mathscr{D}(A))$，$\Pi'\perp\Pi^{(3)}$，从而 $L=L'\oplus Z$ $(Z\subset\Pi^{(3)},\ L'\subset\Pi')$．由于 1 不再是 A'^*A' $(A'=A|_{H_-\ominus E})$ 的特征值，从而 L' 是 Π' 中的非退化闭线性子空间．

对于 Π' 的 L'，再应用定理 3.19，立即得到 (4.5)．证毕．

应该注意，Π 上一个线性子空间 L，如果能有分解

$$L=N\oplus Z\oplus P, \tag{4.8}$$

其中 N,P,Z 分别是负、正、零性子空间．显然就有

$$Z=Z_L(Z_L=L\cap L^{\perp}).$$

另外，定理 4.4 表明：对闭线性子空间的考察可以化成闭零性子空间和闭非退化子空间去考察．

3. 对偶族

定义 4.1 设 Λ 是指标集，$\{z_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$，$\{z_\lambda^*|\lambda\in\Lambda\}$是不定度规空间 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上两个向量族．如果对任何 $\lambda,\mu\in\Lambda$，

$$(z_\lambda,z_\mu^*)=\delta_{\lambda\mu}, \tag{4.9}$$

这里 $\delta_{\lambda\mu}$ 是 Kronecker 函数（即当 $\lambda=\mu$ 时，$\delta_{\lambda\mu}=1$；当 $\lambda\neq\mu$ 时，$\delta_{\lambda\mu}=0$）．那末，称 $\{z_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$，$\{z_\lambda^*|\lambda\in\Lambda\}$（或简写作 $\{z_\lambda\}$，$\{z_\lambda^*\}$）是对偶的．如果 $\{z_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$，$\{z_\lambda^*|\lambda\in\Lambda\}$是对偶族，并且对一切 $\lambda\in$

$\Lambda, z_\lambda = z_\lambda^*$，那末称 $\{z_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是自对偶族.

从 (4.9) 易知，对偶族 $\{z_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$，$\{z_\lambda^* \mid \lambda \in \Lambda\}$ 中的每一向量族都是线性无关的向量族.

如果 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 是 Hilbert 空间，那末 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 的任何就范直交系 $\{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 都是自对偶族. 不定度规空间与 Hilbert 空间本质区别之一，就在于线性子空间可以是退化的. 对于退化子空间(其特例是零性子空间)，Hilbert 空间中的"就范直交系"概念在此失效了，而较多用对偶族概念.

在完备的不定度规空间上，也存在和普通 Hilbert 空间相类似的如下定理.

定理 4.5 设 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 是完备的不定度规空间，并且是可分的[1]. 如果 $\{z_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$，$\{z_\lambda^* \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是对偶族，那末 $\overline{\overline{\Lambda}}$[2] $\leqslant \aleph_0$.

证 设 $\Pi = H_- \oplus H_+$ 是正则分解，由它产生的范数为 $\|\cdot\|$. 令 $L = \overline{\operatorname{span}}\{z_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. 显然，$L$ 是 Π 的可分的闭线性子空间，因而存在一列向量 $\{x_i\} \subset L$，$\{x_i\}$ 在 L 中稠密. 对于每个 x_i，显然存在至多可列个指标 $\lambda_j^{(i)} \in \Lambda, j = 1, 2, \cdots$，使得 $x_i \in L_i$，其中 $L_i = \overline{\operatorname{span}}\{z_{\lambda_j^{(i)}} \mid j = 1, 2, \cdots\}$.

如果 Λ 不是可列无限集，任取 $\lambda \in \Lambda - \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\lambda_j^{(i)} \mid j = 1, 2, \cdots\}$. 由于 $z_\lambda \in L$，所以存在 $\{x_i\}$ 的子列 $\{x_{n_i}\}$ 收敛于 z_λ，但 $x_{n_i} \in L_{n_i}$，所以必可用 $\{z_{\lambda_j^{(n_i)}} \mid j = 1, 2, \cdots\}$ 中向量的线性组合所成的序列收敛于它，从而必存在用 $\{z_{\lambda_j^{(i)}} \mid i = 1, 2, \cdots; j = 1, 2, \cdots\}$ 中向量的线性组合组成的序列 $\{\varphi_l\}$ $(\varphi_l = \sum_{i,j=1}^{n_l} a_{ij} z_{\lambda_j^{(i)}}, l = 1, 2, \cdots)$，使得

$$\lim_{l \to \infty} \|\varphi_l - z_\lambda\| = 0. \tag{4.10}$$

由于 $(\cdot, \cdot)$ 关于 $\|\cdot\|$ 是二元连续的，因此，

$$1 = (z_\lambda, z_\lambda^*) = (\lim_{l \to \infty} \varphi_l, z_\lambda^*) = \lim_{l \to \infty} (\varphi_l, z_\lambda^*) = 0, \tag{4.11}$$

这是矛盾的. 所以 $\overline{\overline{\Lambda}} \leqslant \aleph_0$，证毕.

1) 即 Π 按拓扑 $\mathscr{T}$ 是可分的.

2) $\overline{\overline{\Lambda}}$ 表示集 A 的势.

对于无限维可分空间，显然确实存在势为 $\aleph_0$ 的对偶族。

引理 4.6 设 Z 是完备的不定度规空间 Π 的零性闭线性子空间。那末在 Z 中必存在一族线性无关的向量 $\{z_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$，使得

(i) $\overline{\text{span}}\{z_\lambda|\lambda\in\Lambda\}=Z$.

(ii) 存在线性无关族 $\{z_\lambda^*|\lambda\in\Lambda\}$, $Z^*=\overline{\text{span}}\{z_\lambda^*\}$ 是零性空间，并且 $\{z_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$, $\{z_\lambda^*|\lambda\in\Lambda\}$ 是对偶族。

(iii) $\overline{\text{span}}\{z_\lambda, z_\mu^*\lambda, \mu\in\Lambda\}=Z+Z^*$，并且 $Z+Z^*$ 是完备子空间。

证 设 $\Pi=H_-\oplus H_+$ 是正则分解。因为 $Z\in\mathbf{Z}$，由引理 4.1，存在 $V\in\mathbf{V}$，使得 $Z=L_V$。因为 Z 是闭线性子空间，所以 V 是闭算子，从而 $\mathscr{D}(V)=\overline{\mathscr{D}(V)}$, $\mathscr{R}(V)=\overline{\mathscr{R}(V)}$.

在 Hilbert 空间 $(\mathscr{D}(V), -(\cdot,\cdot))$ 上任取一个完备就范直交系 $\{e_\lambda^-|\lambda\in\Lambda\}$，作 $z_\lambda=\{e_\lambda^-, Ve_\lambda^-\}$, $\lambda\in\Lambda$，显然 $\{z_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 就满足(i)的要求。

如果取 $Z^*=L_{-V}=\{\{x,-Vx\}|x\in\mathscr{D}(V)\}$，并取 $z_\lambda^*=-\frac{1}{2}\{e_\lambda^-, -Ve_\lambda^-\}$ $\lambda\in\Lambda$. 容易验证 $\{z_\lambda^*|\lambda\in\Lambda\}$ 满足(ii)的要求。

由于

$$e_\lambda^-=\frac{1}{2}(z_\lambda-2z_\lambda^*),\quad Ve_\lambda^-=\frac{1}{2}(z_\lambda+2z_\lambda^*),$$

由此可知 $\overline{\text{span}}\{\{z_\lambda\}\cup\{z_\lambda^*\}\}=\overline{\text{span}}\{z_\lambda, z_\mu^*|\lambda,\mu\in\Lambda\}=\mathscr{D}(V)\oplus\mathscr{R}(V)$. 由于 $\mathscr{D}(V)$, $\mathscr{R}(V)$ 分别是 $(H_-, -(\cdot,\cdot))$, $(H_+,(\cdot,\cdot))$ 的闭线性子空间，所以 $\Pi'=\mathscr{D}(V)\oplus\mathscr{R}(V)$ 是 Π 的完备子空间，并且 $\Pi'=Z+Z^*$. 于是，完成了(iii)的证明。

必须注意，在一般情况下，即使 $\{z_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$, $\{z_\lambda^*|\lambda\in\Lambda\}$ 构成对偶族。但 $\overline{\text{span}}\{z_\lambda, z_\mu^*|\lambda,\mu\in\Lambda\}$ 可能是退化的。

例 4.2 设 $\Pi=l_-\oplus l_+$, $l_\pm=l^2$. 令 $\{e_i^\pm\}$ 分别是 $(l_\pm, [\cdot,\cdot]_\pm)$ (见例 3.1) 的完备就范直交系，$z=e_1^-+e_1^+$, $z_i=\frac{1}{i}(e_{i+1}^++e_{i+1}^-)+z$, $z_i^*=\frac{i}{2}(e_{i+1}^+-e_{i+1}^-)$, $i=1,2,\cdots$. 显然，$\{z_i\}$, $\{z_i^*\}$ 成为对偶族。但由 $\{z_i\}$, $\{z_i^*\}$ 张成的闭线性子空间 $L=l'_-\oplus Z\oplus l'_+$，其

中 $Z = \text{span}\{z\}$, $L'_{\pm} = \overline{\text{span}}\{e_i^{\pm} | i \geqslant 2\}$. L 是退化的.

同样，即使做到 $\overline{\text{span}}\{z_\lambda, z_\mu^* | \lambda, \mu \in \Lambda\}$是非退化的. 但它仍未必是完备的.

例 4.3 设 $\Pi^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ 是完备的不定度规空间的两个完备子空间，并且 $\Pi = \Pi^{(1)} \oplus \Pi^{(2)}$. 又设 $\Pi^{(i)} = H_-^{(i)} \oplus H_+^{(i)} (i = 1,2)$ 是正则分解，并且 $H_{\pm}^{(i)} = L^2[0, 1] (i = 1, 2)$. 令

$$A: f(t) \longmapsto tf(t), \quad f(t) \in L^2[0, 1].$$

视 A 为 $H_-^{(1)} \to H_+^{(1)}$ 的算子，它产生的线性子空间记为 L_1. 再视 A^* 为 $H_+^{(2)} \to H_-^{(2)}$ 的算子，它产生的线性子空间记为 L_2. 显然，$L_i \subset \Pi^{(i)}$, $i = 1, 2$，并且 L_1, L_2 分别是 Π 的负、正子空间. 由于 $L_i (i = 1, 2)$ 分别是 $\Pi^{(i)}$ 的闭非退化子空间，所以 $L = L_1 \oplus L_2$ 也是 Π 的闭非退化子空间. 利用 Π 的可析性，易知在内积空间 $(L_1, -(\cdot, \cdot))$, $(L_2, (\cdot, \cdot))$ 中分别存在就范直交系 $\{e_i^-\}$ $\{e_i^+\}$，使得 $\overline{\text{span}}\{e_i^-\} = L_1$, $\overline{\text{span}}\{e_i^+\} = L_2$，作 $z_i = \sqrt{\frac{1}{2}}(e_i^- + e_i^+)$, $z_i^* = \sqrt{\frac{1}{2}}(-e_i^- + e_i^+)$, $i = 1, 2, \cdots$，易知 $\{z_i\}$, $\{z_i^*\}$ 是 Π 的对偶族，$L_1 \oplus L_2 = \overline{\text{span}}\{z_i, z_j^* | i, j = 1, 2, \cdots\}$是非退化的，但不是完备的.

4. *H.D.*对

定义 4.2 设 Z, Z^* 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 的两个零性子空间. 如果对任何 $z \in Z$, $z^* \in Z^*$ $(z \neq 0, z^* \neq 0)$，总存在 $z' \in Z$, $z^{*\prime} \in Z^*$，使得

$$(z, z'^*) \neq 0, \quad (z', z^*) \neq 0. \tag{4.12}$$

那么称 $\{Z, Z^*\}$ 是偶对. 如果 $\{Z, Z^*\}$ 是偶对，并且存在对偶族 $\{z_\lambda | \lambda \in \Lambda\} (\subset Z)$, $\{z_\lambda^* | \lambda \in \Lambda\} (\subset Z^*)$，满足下列条件：

$$Z = \left\{ \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda z_\lambda \,\middle|\, \sum_{\lambda \in \Lambda} |a_\lambda|^2 < \infty \right\}^{1)},$$

---

1) 满足 $\sum_{\lambda \in \Lambda} |a_\lambda|^2 < \infty$ 为 $\{a_\lambda\}$ 最多只有可列个数不是零，因而 $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda z_\lambda$ 是可列个向量和的级数，它的收敛是按 Π 上拓扑 $\mathcal{T}$ 的意义下的收敛.

$$Z^* = \left\{ \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda z_\lambda^* \,\middle|\, \sum_{\lambda \in \Lambda} |b_\lambda|^2 < \infty \right\}. \tag{4.13}$$

那末,称 $\{Z, Z^*\}$ 是 Hilbert 意义下偶对. 简称为 $H.\ D.$ 对.

从定义 4.2 可见,对于零性子空间 Z,如记

$$\tilde{Z} = \left\{ \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda z_\lambda \,\middle|\, \sum_{\lambda \in \Lambda} |a_\lambda|^2 < \infty \right\}.$$

显然,一般说来, $\tilde{Z} \subset \bar{Z}$, 而 Z 和 $\tilde{Z}$ 的关系既可能发生 $Z \supsetneqq \tilde{Z}$,又可能 $Z \subsetneqq \tilde{Z}$ 或其它,这依赖于 $\{z_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ 在 Z 中的选取.

对 $H.\ D.$ 对 $\{Z, Z^*\}$, 今后常依据 (4.13), 在 Z 和 Z^* 上分别引入新的内积 (采用同一符号) $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\langle z, z' \rangle = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \bar{a}'_\lambda,\ z = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda z_\lambda,\ z' = \sum_{\lambda \in \Lambda} a'_\lambda z_\lambda; \tag{4.14}$$

$$\langle z^*, z^{*\prime} \rangle = \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda \bar{b}'_\lambda,\ z^* = \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda z_\lambda,\ z^{*\prime} = \sum_{\lambda \in \Lambda} b'_\lambda z_\lambda^*.$$

易知 $(Z, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $(Z^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是两个 Hilbert 空间. 并且

$$(z, z^*) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \bar{b}_\lambda. \tag{4.15}$$

今后常把 $(Z^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 按 (4.15) 方式视为 $(Z, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 的共轭空间. 和通常 Hilbert 空间一样, 在下面的自然 (线性)映射

$$\tau^*: z_\lambda^* \longmapsto z_\lambda,\ \lambda \in \Lambda \tag{4.16}$$

之下,把 $(Z^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 和 $(Z, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 一致化,在这样的一致化前提下,有 $(Z^*, \langle \cdot, \cdot \rangle) = (Z, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

如果 $\{z_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$, $\{z_\lambda^* | \lambda \in \Lambda\}$ 是对偶族, 显然, $Z = \mathrm{span}\{z_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$, $Z^* = \mathrm{span}\{z_\lambda^* | \lambda \in \Lambda\}$ 是偶对. 由例 4.2 可知, 当 $\{Z, Z^*\}$ 是偶对时, $\{\bar{Z}, \bar{Z}^*\}$ 未必是偶对.

定理 4.7 设 Z, Z^* 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 的两个零性子空间.

(i) 如果 $\bar{Z} + \bar{Z}^*$ 或 $\overline{Z + Z^*}$ 是非退化的子空间, 那末 $\{Z, Z^*\}$ 必是偶对.

(ii) 如果 $\bar{Z}+\bar{Z}^*$ 是完备子空间，那末必存在 $Z^{*\prime}$，使得 $\{\bar{Z}, Z^{*\prime}\}$ 是 $H.D.$ 对，并且 $\bar{Z}+Z^{*\prime}=\bar{Z}+\bar{Z}^*$.

证 (i) 如果 $\{Z, Z^*\}$ 不成偶对，因而可不妨设存在 $z\in Z$，$z\neq 0$，并且 $z\perp Z^*$，从而 $z\perp\bar{Z}^*$. 又由于 $z\perp Z$，所以 $z\perp\bar{Z}$，从而 $z\perp\bar{Z}+\bar{Z}^*$，即 $\bar{Z}+\bar{Z}^*$ 退化，这与假设矛盾. 当假设 $\overline{Z+Z^*}$ 是非退化时，这时必有 $\bar{Z}+\bar{Z}^*$ 非退化，从而 $\{Z, Z^*\}$ 也必是偶对.

(ii) 因为 $\bar{Z}+\bar{Z}^*$ 是完备子空间，所以不妨设 $\Pi=\bar{Z}+\bar{Z}^*$，令 $\Pi=H_-\oplus H_+$ 是正则分解，根据引理 4.1，存在 $V, V'\in\mathbf{V}$，使得

$$\bar{Z}=L_V,\quad \bar{Z}^*=L_{V'}. \tag{4.17}$$

因为 $\bar{Z}, \bar{Z}^*$ 是闭的，所以 $\mathscr{D}(V)$，$\mathscr{D}(V')$；$\mathscr{R}(V)$，$\mathscr{R}(V')$ 分别是 $(H_-, -(\cdot,\cdot))$，$(H_+(\cdot,\cdot))$ 中闭线性子空间.

今证 $\mathscr{D}(V)=H_-$. 如果不对，必有 $x\in H_-\ominus\mathscr{D}(V)$ $(x\neq 0)$ 以及 $\{n, p\}\in\bar{Z}$，$\{n^*, p^*\}\in\bar{Z}^*$，使得

$$n+n^*=x,\quad p+p^*=0. \tag{4.18}$$

因为 $\bar{Z}, \bar{Z}^*\in\mathbf{Z}$，所以

$$\|n\|=\|p\|, \|n^*\|=\|p^*\|. \tag{4.19}$$

由 (4.18)，(4.19) 立即得到

$$\|n\|^2+\|x\|^2=\|n^*\|^2=\|p^*\|^2=\|n\|^2. \tag{4.20}$$

由此可知，只有 $x=0$，这与假设矛盾.

同样可证，$\mathscr{R}(V)=H_+$，$\mathscr{D}(V')=H_-$，$\mathscr{R}(V')=H_+$ 等.

在 $(H_-, -(\cdot,\cdot))$ 上任取完备就范直交系 $\{e_\lambda^- | \lambda\in\Lambda\}$，因为 $\mathscr{D}(V)=H_-$，所以 $z_\lambda=\{e_\lambda^-, Ve_\lambda^-\}\in Z$. 作 $z_\lambda^*=\frac{1}{2}\{-e_\lambda^-, Ve_\lambda^-\}$，

显然 $\{z_\lambda | \lambda\in\Lambda\}$，$\{z_\lambda^* | \lambda\in\Lambda\}$ 是对偶族. 令 $Z^{*\prime}=\overline{\operatorname{span}}\{z_\lambda^*\}$，并用 $\{z_\lambda | \lambda\in\Lambda\}$，$\{z_\lambda^* | \lambda\in\Lambda\}$ 按 (4.14) 引入新内积，易知 $\{\bar{Z}, Z^{*\prime}\}$ 是 $H.D.$ 对，并且 $\bar{Z}+\bar{Z}^*=\bar{Z}+Z^{*\prime}$. 证毕.

注意容易举出例子说明定理 4.7 的 (ii) 中条件“$\bar{Z}+\bar{Z}^*$ 是完备子空间”不能换成“$\overline{Z+Z^*}$ 是完备子空间”.

显然，对于 Π 的任何零性子空间 Z，如果 Z 是闭的，只要取 $Z^*=JZ$ (J 是正则分解 $\Pi=H_-\oplus H_+$ 下的 P_+-P_-，$P_\pm$ 是 Π 在

H_+ 上的投影). 那末, $\{Z, Z^*\}$ 便是 $H.\ D.$. 对于有限维情况,有下面更一般的结果.

推论 4.8 设 Z, Z^* 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 的两个零性子空间.

(i) 如果 $Z + Z^*$ 是有限维空间,并且非退化,那末 $\{Z, Z^*\}$ 是偶对.

(ii) 如果 $\{Z, Z^*\}$ 是偶对, $\dim Z = l < \infty$, 那末 $\dim Z^* = l$, $Z \cap Z^* = \{0\}$,并且 $Z + Z^*$ 是非退化的.

(iii) 如果 (i), (ii) 中的条件有一个满足, 那末 $\{Z, Z^*\}$ 是 $H.D.$ 对.

(iv) 如果 (i),(ii) 中的条件有一个满足, 那末对 Z 中任何线性基 $\{z_i'\}$ $(i = 1, 2, \cdots, l)$, 必存在 Z^* 中相应的线性基 $\{z_i^{*\prime}\}$ $(i = 1, 2, \cdots, l)$,使得 $\{z_i'\}, \{z_i^{*\prime}\}$ 为对偶族, 并且在任意确定的对偶族 $\{z_i\}, \{z_i^*\}$ 下, $\{z_i^{*\prime}\}$ 被 $\{z_i'\}$ 唯一确定.

证 (i) Π 上有限维空间必是闭的, 由定理 4.7 的 (i) 立即得到本推论的 (i).

(ii) 设 $\{z_i'\}$ $(i = 1, 2, \cdots, l)$ 是 Z 的一个线性基. 在 Z^* 中任取 $\{z_i^{*\prime}\}$ $(i = 1, 2, \cdots, l)$, 满足 $(z_i^{*\prime}, z_i') \neq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, l)$. 然后类似于 Gram-Schmidt 正交化方式逐步作出对偶族 $\{z_i\}$, $\{z_i^*\}$ 如下:

取 $z_1 = z_1'$, $z_1^* = \dfrac{1}{(z_1', z_1^{*\prime})} z_1^{*\prime}$. 如果 $(z_2', z_1^*) = 0$, 取 $z_2 = z_2'$. 否则, 令 $z_2 = -(z_2', z_1^*) z_1 + z_2'$, 便有 $(z_2, z_1^*) = 0$. 再取 $z_2^* = \dfrac{1}{(z_2, z_2^{*\prime})} z_2^{*\prime} - \dfrac{(z_1, z_2^{*\prime})}{(z_2, z_2^{*\prime})} z_1^*$. 如此一直进行下去,便得到 $\{z_i\}, \{z_i^*\}$ 构成的对偶族,同时证明了[1] $\dim Z^* \geqslant \dim Z = l$. 再对调 Z, Z^* 的地位,又得到 $\dim Z^* \leqslant \dim Z = l$, 即 $\dim Z = \dim Z^*$.

对任何 $z \in Z \cap Z^*$, 如果 $z \neq 0$, 那末它作为 Z^* 中向量, 必有 $z' \in Z$, 使得 $(z, z') \neq 0$, 这又与 Z 是零性子空间的假设相矛盾.

---

1) 注意,对偶族 $\{z_i\}$, $\{z_i^*\}$ 必是两个线性无关族.

所以 $Z\cap Z^*=\{0\}$.

再证 $Z+Z^*$ 是非退化的. 因为 $Z\cap Z^*=\{0\}$, 所以对任何 $x\in Z+Z^*$, 必有唯一的 $z\in Z$, $z^*\in Z^*$, 使得 $x=z+z^*$. 但又因 $\{Z, Z^*\}$ 是偶对, 所以又存在 $z'\in Z$, $z^{*\prime}\in Z^*$, 使得

$$(z, z^{*\prime})\neq 0, \quad (z', z^*)\neq 0.$$

从而决不可能有非零向量 $x\in Z+Z^*$, 使得 $x\perp Z+Z^*$, 即 $Z+Z^*$ 必是非退化的.

(iii) 按 (ii), 存在对偶族 $\{z_i\}$, $\{z_i^*\}$. 用这个对偶族按 (4.14) 引入内积, 因为 $Z+Z^*$ 是有限维, 易知 $\{Z, Z^*\}$ 必是 $H.D.$ 对.

(iv) 在对偶族 $\{z_i\}$, $\{z_i^*\}$ 下, 记 $z_i'=\sum_{j=1}^{l}a_{ij}z_j (i=1,2,\cdots,l)$, 又记 $A=(a_{ij})$[1], 取 $(b_{ij})=A^{*-1}$, 作 $z_i^{*\prime}=\sum_j b_{ij}z_j^*$ 即为所求. 显然, 当 $\{z_i'\}$ 给定后, 即 A 给定后, $\{z_i^{*\prime}\}$ 就被唯一确定了. 证毕.

注 从推论 4.8 的 (ii) 的证明可知: 如果 $\{Z, Z^*\}$ 是不定度规空间 Π 的偶对, 并且 Z, Z^* 都是零性子空间, 那末必然 $Z\cap Z^*=\{0\}$, 并且 $Z+Z^*$ 是非退化的.

5. 标准分解

定义 4.3 设 $(\Pi, (\cdot,\cdot))$ 是完备的不定度规空间, N, P 分别是 Π 上的负、正子空间, Z, Z^* 是 Π 的两个零性子空间. 如果有下列分解

$$\Pi=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P, \tag{4.21}$$

那末称 (4.21) 是 Π 的标准分解.

引理 4.9 设 $\Pi=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$ 是标准分解. 那末

(i) $N, P, Z+Z^*$ 都是完备子空间,

(ii) $Z=\bar{Z}$, $Z^*=\bar{Z}^*$, 并且 $\{Z, Z^*\}$ 是偶对.

(iii) 存在零性子空间 $Z^{*\prime}$, 使得 $Z+Z^*=Z+Z^{*\prime}$, $\{Z, Z^{*\prime}\}$ 是 $H.D.$ 对, 并且可以选出对偶族 $\{z_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$, $\{z_\lambda^*|\lambda\in\Lambda\}$, 使得 $\{z_\lambda|\lambda\in\Lambda\}\subset Z$.

---

1) (a_{ij}) 表示 $l\times l$ 矩阵, a_{ij} 为矩阵元.

(iv) 存在正则分解 $\Pi = H_-\oplus H_+$，使得

$$H_-\supset N, H_+\supset P. \tag{4.22}$$

证 (i) 是定理 3.13 的直接推论。

(ii) 因为 $\Pi^{(0)} = Z + Z^*$ 是完备子空间，由定理 4.7 的 (ii)，$\{Z, Z^*\}$ 是偶对。根据推论 4.8 后面的注，$Z\cap Z^* = \{0\}$。

同样，因为 $\bar{Z} + Z^*$ 也是完备子空间 $\Pi^{(0)}$，所以 $\bar{Z}\cap Z^*=\{0\}$。如果 $Z \neq \bar{Z}$，那末存在 $z_0\in \bar{Z}$，$z_0\bar{\in}Z$。根据分解 $\Pi^{(0)} = Z\dotplus Z^*$，必有唯一的 $z\in Z$，$z^*\in Z^*$，使得 $z_0 = z + z^*$，从而 $z^*=z_0-z\in \bar{Z}$。显然，只有 $z^* = 0$，即 $z_0 = z$，这与假设 $z_0\bar{\in}Z$ 相矛盾。这样，就得到 $Z = \bar{Z}$。

同样可以证明 $Z^* = \bar{Z}^*$。

(iii) 应用定理 4.7 的 (ii)，立即可得本引理的 (iii)。

(iv) 如令 $\Pi^{(0)} = H_-^{(0)}\oplus H_+^{(0)}$，那末 $\Pi = (H_-^{(0)}\oplus N)\oplus(H_+^{(0)}\oplus P)$ 便是正则分解，并满足 (4.22)。证毕。

推论 4.10 设 $\Pi=N\oplus\{Z + Z^*\}\oplus P$ 是标准分解，那末 $N\oplus Z$，$N\oplus Z^*$ 都是 Π 的极大半负子空间，而 $P\oplus Z$，$P\oplus Z^*$ 都是 Π 的极大半正子空间。

证 根据引理 4.9 的 (ii)，(iv)，如记 $\Pi^{(0)} = H_-^{(0)}\oplus H_+^{(0)}$ 在 $H_\pm^{(0)}$ 上投影为 $P_\pm^{(0)}$，那末由定理 4.7 的 (ii) 的证明可知 $P_-^{(0)}Z = P_-^{(0)}\bar{Z} = H_-^{(0)}$，从而在正则分解 $\Pi = (H_-^{(0)}\oplus N)\oplus(H_+^{(0)}\oplus P)$ 下，如记 Π 在 $(H_-^{(0)}\oplus N)$ 上投影为 P_-，那末便有 $P_-(N\oplus Z) = H_-^{(0)}\oplus N$。由引理 3.2 的 (ii) 可知，$N\oplus Z$ 是 Π 的极大半负子空间。

同样可证推论的其它结论。证毕。

6. 线性子空间与标准分解

定义 4.4 设 L 是完备的不定度规空间 Π 的闭线性子空间。如果存在闭负子空间 N_L，闭正子空间 P_L，闭零性子空间 Z_L，使得

$$L = N_L\oplus Z_L\oplus P_L, \tag{4.23}$$

那么称 (4.23) 是 L 的标准分解。

显然，在标准分解 (4.23) 中，$Z_L = L\cap L^\perp$。根据定理 4.4，任何闭线性子空间 L 不仅必存在标准分解，而且还可有完备子空间

$\Pi^{(i)}(i=1,2,3)$，使得 $\Pi=\Pi^{(1)}\oplus\Pi^{(2)}\oplus\Pi^{(3)}$，并且 $\Pi^{(3)}\supset Z_L$，$\Pi^{(1)}\supset N$，$\Pi^{(2)}\supset P$（见(4.5)）．Z_L 还是 $\Pi^{(3)}$ 中既极大半负又极大半正的子空间．

当然，闭线性子空间 L 的标准分解并不唯一．

例 4.4 设 $\Pi=l_-\oplus l_+$，$l_\pm=l^2$，$\{e_i^\pm|i=1,2,\cdots\}$ 分别是 $l_\pm$ 的完备就范直交系．令 $z=e_1^-+e_1^+$，$L=\mathrm{span}\{e_2^-,z\}$．显然，取 $N_L=\mathrm{span}\{e_2^-\}$，$Z=\mathrm{span}\{z\}$ 或取 $N_L'=\mathrm{span}\{e_2^-+z\}$，$Z'=Z$ 时，就有标准分解

$$L=N_L\oplus Z,\ L=N_L'\oplus Z'. \tag{4.24}$$

下面给出闭线性子空间的分解能扩张成全空间的标准分解的定理．

定理 4.11 设 L 是完备的不定度规空间 Π 的闭线性子空间，并且有分解

$$L=N_L\oplus Z_L\oplus P_L, \tag{4.25}$$

其中 N_L,P_L,Z_L 分别是负、正、零性子空间．那么存在标准分解 $\Pi=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$，使得

$$N_L\subset N,\ P_L\subset P,\ Z_L\subset Z \tag{4.26}$$

成立的充要条件是，N_L，P_L 都是 Π 的完备子空间．

证 **必要性** 因为 L 是闭线性子空间，而 $N,P,Z+Z^*$ 都是完备子空间，所以

$$N_L=N\cap L,\ P_L=P\cap L,\ Z_L=Z\cap L=\{Z+Z^*\}\cap L$$

都是闭线性子空间．根据推论 3.14 的(ii)，N_L，P_L，Z_L 分别是完备的不定度规空间 $N,P,Z+Z^*$ 的闭线性子空间．尤其，当 $(N,-(\cdot,\cdot))$，$(P,(\cdot,\cdot))$ 都是 Hilbert 空间时，$(N_L,-(\cdot,\cdot))$，$(P_L,(\cdot,\cdot))$ 也都是 Hilbert 空间．从而 N_L，P_L 是两个完备子空间．

充分性 由于 N_L 是完备子空间，根据定理 3.13，$\Pi=N_L\oplus N_L^\perp$，并且 $N_L^\perp$ 是完备子空间．再由于 P_L 是完备子空间，并且 $P_L\subset N_L^\perp$．从而 P_L 是完备的不定度规空间 $(N_L^\perp,(\cdot,\cdot))$ 的完备子空间．因此

$$N_L^\perp=P_L\oplus\Pi'，并且\ Z_L\subset\Pi'.$$

令 $\Pi' = H'_-\oplus H'_+$ 是 Π' 的正则分解，$P'_\pm$ 是 Π' 在 $H'_\pm$ 上的投影．取 $\Pi^{(3)}=(P'_-Z_L)\oplus(P'_+Z_L)$，根据分解 (4.25)，有 $Z_L=L\cap L^\perp$，所以 Z_L 是 Π 的闭线性子空间，从而 Z_L 也是 $(\Pi',(\cdot,\cdot))$ 的闭线性子空间．由引理 4.1 的 (iv)，易知 $P'_\pm Z_L$ 是 $(\Pi',(\cdot,\cdot))$ 的闭线性子空间．这样 $\Pi^{(3)}=(P'_-Z_L)\oplus(P'_+Z_L)$ 是 $(\Pi',(\cdot,\cdot))$ (从而是 Π)的完备子空间．如取 $Z^*=J'Z(J'=P'_+-P'_-)$，易知

$$\Pi^{(3)}=\{Z+Z^*\}, \tag{4.27}$$

$$\Pi'=\Pi^{(3)}\oplus[(H'_-\ominus P'_-Z_L)\oplus(H'_+\ominus P'_+Z_L)]. \tag{4.28}$$

显然，取 $N=N_L\oplus(H'_-\ominus P'_-Z_L)$，$P=P_L\oplus(H'_+\ominus P'_+Z_L)$，那么标准分解 $\Pi=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$ 就满足 (4.26)．证毕．

定理 4.11 表明：闭线性子空间 L 的分解 $L=N_L\oplus Z_L\oplus P_L$ 如果能扩张成全空间 Π 的标准分解，那末分解 $L=N_L\oplus Z_L\oplus P_L$ 必是标准分解，并且 N_L，P_L 都还是完备子空间．

定理 4.12 设 $\Pi=H_-\oplus H_+$ 是正则分解，L 是 Π的闭线性子空间，并且在上述正则分解下，$L=L_0^-\oplus L_A\oplus L_0^+$ (见 §3 定理 3.9 的 (i))．如果 1 是 A^*A 的正则点或孤立谱点，那末必存在 L 的标准分解能扩张成 Π 的标准分解，即

$$\begin{cases}L=N_L\oplus Z_L\oplus P_L,\ \Pi=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P,\\ N_L\subset N,\ P_L\subset P\ \ Z_L\subset Z.\end{cases} \tag{4.29}$$

其实还可做到

$$N_L\subset N\subset H_-,\ P_L\subset P\subset H_+,\ Z_L=Z. \tag{4.30}$$

反之，如果 L 的某个标准分解能扩张成 Π 的标准分解，即 (4.29) 成立，那末必存在正则分解 $\Pi=H_-\oplus H_+$，使得 L 在这个正则分解下的表示 $L=L_0^-\oplus L_A\oplus L_0^+$ 中的 A 具有下列性质：1 或是 A^*A 的正则点，或是 A^*A 的孤立谱点．

证 设在正则分解 $\Pi=H_-\oplus H_+$ 下，$L=L_0^-\oplus L_A\oplus L_0^+$，取 $Z_L=\{\{x,Ax\}|A^*Ax=x\}$ (如果 $1\bar{\in}\sigma_p(A^*A)$，那末 $Z_L=\{0\}$)，$Z^*=JZ(J=P_+-P_-)$，$N_L=\{\{x,Ax\}|x\in E_1\}$，$P_L=\{\{x,Ax\}|x\in(H_-\ominus E_1)\cap\mathscr{D}(A)\}$，其中 E_1 是 A^*A 在 $[0,1)$ 上谱子空间．显然，若取

$N = N_L \oplus (H_- \ominus \mathscr{D}(A))$, $P = P_L \oplus (H_+ \ominus \mathscr{R}(A))$, $Z = Z_L$, 则立即可知 $\Pi = N \oplus \{Z + Z^*\} \oplus P$ 是满足 (4.30) 的标准分解。

反之,设 $\Pi' = \{Z + Z^*\}$ 的分解 $\Pi' = H'_- \oplus H'_+$ 是正则分解。取 $H_- = N \oplus H'_-$, $H_+ = P \oplus H'_+$, 显然 $\Pi = H_- \oplus H_+$ 是正则分解。由于 $N_L \subset N \subset H_-$, $P_L \subset P \subset H_+$, 所以 L 在上述正则分解下的表示 $L = L_0^- \oplus L_A \oplus L_0^+$,中 $L_0^- = N_L$, $L_0^+ = P_L$,如果 $Z_L = \{0\}$,则 $L_A = \{0\}$; 如果 $Z_L \neq \{0\}$, 则 $L_A = Z_L$. 由此可知, 1 或是 A^*A 的孤立谱点 (当 $Z_L \neq \{0\}$), 或是 A^*A 的正则点 (当 $Z_L = \{0\}$). 证毕。

若 Π 的一个线性子空间 L 能表示成

$$L = N'_L \oplus Z'_L \oplus P'_L, \tag{4.31}$$

其中 N'_L, P'_L, Z'_L 分别是负、正、零性子空间。当 L 是闭线性子空间时,从 (4.31) 易知 $Z_L = L \cap L^\perp = Z'_L$ 必是闭的。但 N'_L, P'_L 未必是闭的。

例 4.5 假设 $L = N_L \oplus Z_L \oplus P_L$ 是闭线性子空间的标准分解,又假定 $\dim Z_L \geqslant 1$, $\dim N_L = \infty$. 任取非零向量 $z \in Z_L$, 以及定义在整个 N_L 上的无界 (按 Π 上拓扑)线性泛函 f. 这时取

$$N'_L = \{x + f(x)z \mid x \in N_L\}, \tag{4.32}$$

显然 N'_L 仍是负子空间,并且

$$L = N'_L \oplus Z_L \oplus P_L. \tag{4.33}$$

由于 f 的无界性, N'_L 不是闭线性子空间。尤其当 N_L 还是 Π 的完备子空间时, N'_L 显然按 $-(\cdot, \cdot)$ 还是 Hilbert 空间。

由此可见,在 $Z_L \neq \{0\}$ 的情况下,分解(4.31)中的 N'_L, P'_L 的性质是依赖于它们本身的选取方式的,但有下面定理。

定理 4.13 设 L 是完备的不定度规空间 Π 的闭线性子空间。如果有一个分解

$$L = N_L \oplus Z_L \oplus P_L, \tag{4.34}$$

使得 N_L, P_L 都是 Π 的完备子空间。那末,对 L 的任何分解

$$L = N'_L \oplus Z'_L \oplus P'_L, \tag{4.35}$$

只要 $N'_L \oplus P'_L$（或 N'_L 和 P'_L）是闭线性子空间时，N'_L，P'_L 必都是 Π 的完备子空间。

证 先考察 $N'_L \oplus P'_L$ 是闭的情况。根据定理 4.11，存在标准分解 $\Pi = N \oplus \{Z + Z^*\} \oplus P$。为简单起见，不妨可以认为 $N = N_L$，$P = P_L$，$Z = Z_L (= Z'_L)$。令 $\Pi^{(1)} = N \oplus P$，$\Pi^{(2)} = \{z + z^*\}$，$L' = N'_L \oplus P'_L$。

显然，对任何 $x' \in L'$，必有唯一的 $x \in \Pi^{(1)}$，$z \in Z$，使得

$$x' = x + z. \tag{4.36}$$

如果 $x = 0$，显然必有 $z = 0$。否则将有 $x' = z \in Z$，这与 $L' \cap Z = \{0\}$ 相矛盾。又因为 L' 是线性空间，所以存在 $\Pi^{(1)} \to Z$ 的线性算子 B，使得 $z = Bx$。从而

$$x' = x + Bx. \tag{4.37}$$

由于 $\Pi^{(1)} \oplus Z = L' \oplus Z$，所以 $\mathscr{D}(B) = \Pi^{(1)}$。再利用 L' 是闭的假设，因而 B 是 $\Pi^{(1)} \to \Pi^{(2)}$ 的闭算子。由闭图象定理，B 是有界线性算子。

现在证明 $(L', (\cdot, \cdot))$ 是完备的不定度规空间。作

$$N'' = \{x + Bx \mid x \in N_L\},\ P' = \{y + By \mid y \in P_L\}. \tag{4.38}$$

显然，N''，P' 分别是负、正子空间，并且 $L' = N'' \oplus P'$。

对于 N'' 中任何点列 $\{x_n + Bx_n\}$，由于

$$\begin{aligned} -((x_n - x_m) + B(x_n - x_m),\ (x_n - x_m) + B(x_n - x_m)) \\ = -(x_n - x_m,\ x_n - x_m), \end{aligned} \tag{4.39}$$

所以 $\{x_n + Bx_n\}$ 按 $-(\cdot, \cdot)$ 为基本的充要条件是，$\{x_n\}$ 按 $-(\cdot, \cdot)$ 也是基本的。但 N 是完备子空间，所以存在 $x \in N$，使得

$$\lim_{n \to \infty} -(x_n - x, x_n - x) = 0. \tag{4.40}$$

从 (4.40)，并注意到 B 是有界的，立即可知 $\{x_n + Bx_n\}$ 按 $-(\cdot, \cdot)$ 收敛于 N'' 中向量 $x + Bx$，即 $(N'', -(\cdot, \cdot))$ 是 Hilbert 空间。

同样可证 $(P', (\cdot, \cdot))$ 也是 Hilbert 空间。这样，$L' = N'' \oplus P'$ 是正则分解，即 L' 是完备的不定度规空间。

既然 Π 的完备子空间 L' 有分解 $L' = N'_L \oplus P'_L$，根据定理 3.14，

N'_L, P'_L 都是 $(L', (\cdot, \cdot))$ 的完备子空间，从而也都是 Π 的完备子空间。

再考察 N'_L, P'_L 分别是闭线性子空间的情况。用 N'_L, P'_L 代替上面讨论的 L'，仍可得到如下事实：对任何 $n' \in N'_L, p' \in P'_L$，必存在唯一的 $n \in \Pi^{(1)}, p \in \Pi^{(1)}$，以及 $\Pi^{(1)} \to Z$ 的线性算子 B_1, B_2，使得

$$n' = n + B_1 n, p' = p + B_2 p. \tag{4.41}$$

令 $N'' = \{n | n' = n + B_1 n, n' \in N'_L\}$，$P' = \{p | p' = p + B_2 p, p' \in P'_L\}$。显然 $N'' \subset \Pi^{(1)}, P' \subset \Pi^{(1)}$，$\mathscr{D}(B_1) = N''$，$\mathscr{D}(B_2) = P'$。从 $N'_L \perp P'_L$ 以及 $Z \perp N \oplus P$，容易得到

$$N'' \perp P'. \tag{4.42}$$

对任何 $x \in \Pi^{(1)}$，根据 (4.35)，必有 $n' \in N'_L, p' \in P'_L, z' \in Z$，使得 $x = n' + p' + z'$。又由 (4.41) 立即得到

$$x = n + p + B_1 n + B_2 p + z'. \tag{4.43}$$

但是 $x \in \Pi^{(1)}, n + p \in \Pi^{(1)}, B_1 n + B_2 p + z' \in Z$，因而只有 $x = n + p$，即

$$\Pi^{(1)} = N'' \oplus P'. \tag{4.44}$$

对完备的不定度规空间 $(\Pi^{(1)}, (\cdot, \cdot))$ 用定理 3.14 的结论，N'', P' 是 $(\Pi^{(1)}, (\cdot, \cdot))$ 完备子空间。再对 Π 的完备子空间 $\Pi^{(1)}$，用引理 3.9 的结论，就得到 N'', P' 是 Π 的完备子空间。

N'', P' 既是完备子空间，它们就都是闭线性子空间。因为 N'_L, P'_L 都是闭线性子空间，所以 B_1, B_2 是闭算子。然而 $\mathscr{D}(B_1) = N''$，$\mathscr{D}(B_2) = P'$ 都是闭线性子空间，所以 B_1, B_2 是有界线性算子。

利用 N'', P' 是完备子空间，B_1, B_2 是有界的，以及 N'_L, P'_L 是闭线性子空间，立即可以得到 N'_L, P'_L 必是 Π 的完备子空间。证毕。

推论 4.14 设 L 是完备的不定度规空间 Π 的闭线性子空间。

(i) 如果有一个标准分解 $L = N_L \oplus Z_L \oplus P_L$ 能扩张成 Π 的标准分解 $\Pi = N \oplus \{Z + Z^*\} \oplus P$ (即 $N \supset N_L$, $P \supset P_L$, $Z \supset Z_L$)，那末它的任何标准分解 $L = N'_L \oplus Z_L \oplus P'_L$ 也必能扩张成 Π 的标准分解。

(ii) 如果有一个标准分解 $L = N_L \oplus Z_L \oplus P_L$，使得 N_L, P_L 是

Π 的两个完备子空间,那末它们任何标准分解 $L=N'_L\oplus Z_L\oplus P'_L$ 中的 N'_L, P'_L 都是完备子空间.

证 (ii) 是定理 4.13 的直接推论. 利用 (ii) 和定理 4.11 就得到(i), 证毕.

定理 4.15 设 L 是完备的不定度规空间 Π 的闭线性子空间. 如果在正则分解 $\Pi=H_-\oplus H_+$ 之下, $L=L_0^-\oplus L_A\oplus L_0^+$, 并且 $1\in\rho(A^*A)$ 或 1 是 $\sigma(A^*A)$ 的孤立点, 那末在任何正则分解 $\Pi=H'_-\oplus H'_+$ 之下, 分解 $L=L_0^{-\prime}\oplus L_{A'}\oplus L_0^{+\prime}$ 中的 A' 也满足: $1\in\rho(A'^*A')$ 或 1 是 $\sigma(A'^*A')$ 的孤立点.

证 在正则分解 $\Pi=H_-\oplus H_+$ 之下, 如果 $1\in\rho(A^*A)$, 那末 $L=(L_0^-\oplus N_L)\oplus(L^+\oplus P_L)$, 其中

$$\begin{cases}N_L=\{\{x,Ax\}\mid x\in E_1,\ E_1\text{ 是 }A^*A\text{ 在 }[0,1)\text{ 上谱子空间}\}\\ P_L=\{\{x,Ax\}\mid x\in E_2\cap\mathscr{D}(A),\\ \qquad\qquad E_2\text{ 是 }A^*A\text{ 在 }(1,\infty)\text{上谱子空间}\}.\end{cases}\tag{4.45}$$

显然,由于 $1\in\rho(A^*A)$, L 是 Π 的完备子空间,因而 $\Pi=L\oplus L^\perp$, 因此,在任何正则分解 $\Pi=H'_-\oplus H'_+$ 之下, $L=L_0^{-\prime}\oplus L_{A'}\oplus L_0^{+\prime}$ 中的 $L_{A'}$ 必是完备子空间. 再利用引理 3.3 的 (iii), 立即有 $1\in\rho(A'^*A')$.

现在再证明 1 是 $\sigma(A^*A)$ 的孤立点情况. 令

$$Z_L=\{\{x,Ax\}\mid x=A^*Ax,\ x\in\mathscr{D}(A)\};$$

显然 $L=N_L\oplus Z_L\oplus P_L$, N_L, P_L 仍如 (4.45) 中的形式. 由于 1 是 $\sigma(A^*A)$ 的孤立点,易知 N_L, P_L 是 Π 的两个完备子空间. 根据定理 4.11,存在标准分解 $\Pi=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$,使得 $Z=Z_L$, $N\supset N_L$, $P\supset P_L$. 由定理 4.13 可知, 对 L 的任何分解 $L=N'_L\oplus Z_L\oplus P'_L$, 只要 $N'_L\oplus P'_L$ 是 (或 N'_L, P'_L 同时是) 闭线性子空间, 就能扩张成 Π 的标准分解 $\Pi=N'\oplus\{Z+Z^{*\prime}\}\oplus P'$.

设 $\Pi=H'_-\oplus H'_+$ 是正则分解, $L=L_0^{-\prime}\oplus L_{A'}\oplus L_0^{+\prime}$. 由于 $Z_L=L\cap L^\perp\neq\{0\}$, 因此 $1\in\sigma_p(A'^*A')$, 并且

$$Z_L=\{\{x,A'x\}\mid x=A'^*A'x,\ x\in\mathscr{D}(A')\}.$$

现在只要证明 1 是 $\sigma(A'^*A')$ 的孤立点即可. 令

$N' = \{\{x, A'x\} | x \in E_1', E_1'$ 是 A'^*A' 在 $[0,1)$ 的谱子空间$\}$，

$P' = \{\{x, A'x\} | x \in E_2' \cap \mathscr{D}(A')$，$E_2'$ 是 A'^*A' 在 $(1, \infty)$ 的谱子空间$\}$. 因为 A' 是闭算子，所以 N'，P' 都是闭线性子空间，并且 $N' \perp P'$. 由此易知

$$L = (L_0^{-\prime} \oplus N') \oplus Z_L \oplus (L_0^{+\prime} \oplus P'),$$

并且 $L_0^{-\prime} \oplus N'$，$L_0^{+\prime} \oplus P'$ 都是闭线性子空间. 由定理 4.13 知道，$L_0^{-\prime} \oplus N'$，$L_0^{+\prime} \oplus P'$ 是两个完备子空间，由定理 3.13，N'，P' 分别是 $(L_0^{-\prime} \oplus N', (\cdot, \cdot))$，$(L_0^{+\prime} \oplus P', (\cdot, \cdot))$ 的完备子空间. 但 $L_0^{-\prime} \oplus N'$，$L_0^{+\prime} \oplus P'$ 是 Π 的两个完备子空间，所以 N'，P' 也都是 Π 的完备子空间. 再对 N'，P' 应用引理 3.3 的(iii)，立即可知 1 是 A'^*A' 的孤立谱点. 证毕.

引理 4.16 设 L 是完备的不定度规空间 Π 的负（或正）的子空间，并且按 $-(\cdot, \cdot)$（或 $(\cdot, \cdot)$）成为 Hilbert 空间. 那末在 $\bar{L}$ 的任何分解 $\bar{L} = N + Z_{\bar{L}}(Z_{\bar{L}} = \bar{L} \cap \bar{L}^{\perp})$ 中，只要 N 是闭线性子空间，N 就必定是完备子空间. 满足 N 为闭的分解 $\bar{L} = N \oplus Z$ 是存在的.

证 我们不妨就 L 是负子空间的情况加以证明. 这里 $\bar{L}$ 是半负的，根据定理 4.4 $\bar{L} = N \oplus Z(Z = Z_{\bar{L}} = \bar{L} \cap \bar{L}^{\perp})$，$N$ 是负闭线性子空间，并且 N，Z 分别包含在完备子空间 $\Pi^{(1)}$，$\Pi^{(2)}$ 中，而 $\Pi = \Pi^{(1)} \oplus \Pi^{(2)}$. 下面先就这种特殊分解来证明 N 是完备子空间. 为此，显然只要证明 $(N, -(\cdot, \cdot))$ 是 Hilbert 空间.

设 $\Pi^{(i)} = H_-^{(i)} \oplus H_+^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ 是正则分解，由它们导出的内积为 $[\cdot, \cdot]_i$，在 Π 上取正则分解：$\Pi = (H_-^{(1)} \oplus H_-^{(2)}) \oplus (H_+^{(1)} \oplus H_+^{(2)})$. 显然，可由它导出内积 $[\cdot, \cdot] = [\cdot, \cdot]_1 + [\cdot, \cdot]_2$ 和范数 $\|\cdot\|$. 设 $\{x_n\} \subset N$，并且按 $-(\cdot, \cdot)$ 是基本点列. 因为 $N \subset \bar{L}$，所以存在 $\{y_n\} \subset L$，使得

$$\|y_n - x_n\| < 1/n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

因而 $\{y_n\}$ 也按 $-(\cdot, \cdot)$ 是基本点列. 按假设，存在 L 中向量 y，使得

$$\lim_{n \to \infty} -(y_n - y, y_n - y) = 0. \tag{4.46}$$

由于 $y_n \in L \subset \overline{L} = N \oplus Z$，所以每个 y_n 有唯一分解：$y_n = x'_n + z_n$, $x'_n \in N$, $z_n \in Z$. 注意到 $N \subset \Pi^{(1)}$, $Z \subset \Pi^{(2)}$ 以及 (4.45)，则有

$$\|z_n\| < \frac{1}{n}, \|x'_n - x_n\| < \frac{1}{n}, n = 1, 2, \cdots. \qquad (4.47)$$

令 $y = x + z$, $x \in N$, $z \in Z$, 由 (4.46) 得到

$$\lim_{n\to\infty} -(x'_n - x, x'_n - x) = 0. \qquad (4.48)$$

再根据 (4.47) 和 (4.48) 就得到

$$\lim_{n\to\infty} -(x_n - x, x_n - x) = 0, \qquad (4.49)$$

即 $(N, -(\cdot, \cdot))$ 是 Hilbert 空间.

既然 $\overline{L}$ 存在一个分解 $\overline{L} = N \oplus Z$，使得 N 是完备子空间. 由定理 4.13 或推论 4.14，立即可知 $\overline{L}$ 的任何标准分解 $\overline{L} = N' \oplus Z$ 中 N' 也必是完备子空间. 证毕.

定理 4.17 设 L 是完备的不定度规空间 Π 的线性子空间. 如果 $(L, (\cdot, \cdot))$ 是完备的不定度规空间，那末在 $\overline{L}$ 的任何分解 $\overline{L} = L' \oplus Z (Z = \overline{L} \cap \overline{L}^{\perp})$ 中，只要 L' 是闭线性子空间，L' 必是 Π 的完备子空间. 满足 L' 是闭线性子空间的分解 $\overline{L} = L' \oplus Z$ 是存在的.

证 显然，满足 L' 为闭线性子空间的分解 $\overline{L} = L' \oplus Z (Z = \overline{L} \cap \overline{L}^{\perp})$ 是存在的. 根据定理 4.13，我们只要证明有一个分解 $\overline{L} = L' \oplus Z$ 中的 L' 是完备子空间就可以了.

设 $L = L_- \oplus L_+$ 是 $(L, (\cdot, \cdot))$ 的正则分解. 对 L_- 应用引理 4.16 以及定理 4.4，就存在分解

$$\overline{L}_- = N \oplus Z_1, \ Z_1 = \overline{L}_- \cap \overline{L}_-^{\perp},$$

其中 N 是 Π 的完备子空间. 因为 $L_+ \perp \overline{L}_-$，所以 L_+ 是完备子空间 $N^{\perp}$ 的线性子空间（自然 $Z_1 \subset N^{\perp}$）. 在 $(N^{\perp}, (\cdot, \cdot))$ 中对 L_+ 再应用引理 4.16，便知存在分解

$$\overline{L}_+ = Z_2 \oplus P, \ Z_2 = \overline{L}_+ \cap \overline{L}_+^{\perp} \cap N^{\perp},$$

其中 P 是 $(N^{\perp}, (\cdot, \cdot))$ 的完备子空间，从而 P 是 Π 的完备子空间. 因此，存在分解 $\Pi = \Pi^{(1)} \oplus \Pi^{(2)} \oplus \Pi^{(3)}$, $\Pi^{(1)} = N$, $\Pi^{(2)} = P$, $\Pi^{(3)} = \Pi \cap (N \oplus P)^{\perp}$，而 $Z_2 \subset \Pi^{(3)}$.

由于 $Z_1 \perp L_+$，所以 $Z_1 \perp \bar{L}_+$，从而 $Z_1 \perp Z_2$，$Z_1 \perp P$. 由此可知 $Z_1 \subset \Pi^{(3)}$. 由于 $Z_1 \perp Z_2$，所以 $Z_1 + Z_2$ 是 $\Pi^{(3)}$ 中零性子空间. 记 $Z = \overline{Z_1 + Z_2}$，显然

$$\bar{L}_- + \bar{L}_+ \subset N \oplus Z \oplus P. \tag{4.50}$$

由于 $N \oplus P \oplus Z$ 是闭线性子空间，所以

$$\bar{L} \subset N \oplus Z \oplus P. \tag{4.51}$$

另一方面，因为 $N \oplus Z_1 = \bar{L}_-$，$P \oplus Z_2 = \bar{L}_+$，所以 N，P，$Z_1 + Z_2$ 都是 $\bar{L}$ 的线性子空间，因而 $Z \subset \bar{L}$. 于是有

$$\bar{L} = N \oplus Z \oplus P.$$

这里的 N，P 是 Π 的完备子空间. 证毕.

§5 Π_K 空间结构

在 §1—§4 中着重讨论的是一般的完备的不定度规空间，在本节中将应用前面的结果来讨论特殊的不定度规空间 $(\Pi_K, (\cdot, \cdot))$.

1. Π_K 空间及其拓扑

定义 5.1 设 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 是完备的不定度规空间，又设 $\Pi = H_- \oplus H_+$ 是正则分解. 如果 $\dim H_- = \dim H_+ = \infty$，则称 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 是 Крейн (Krein) 空间；如果 $\dim H_- = K < \infty$，$\dim H_+ = \infty$，则称 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 是 Понтрягин (Pontrjagin) 空间[1]，称 K 为负指标. 负指标为 K 的 Понтрягин 空间常简记为 $(\Pi_K, (\cdot, \cdot))$ 或 Π_K.

由 §2 的范数等价定理 (定理 2.5) 知道，Π_K 上任何正则分解 $\Pi_K = H_- \oplus H_+$ 所导出的内积 $[\cdot, \cdot]$ 所产生的 Π_K 上拓扑彼此等价. 这个拓扑记为 $\mathscr{T}$.

2. 子空间的结构 这里不拟一一例举 §3 中所有结果在 Π_K 中相应的情况，而只将 Π_K 中特有的重要结果列出，并加以证明.

首先注意，按 §3 记号，由于 $\dim H_- = K < \infty$，所以任何 $H_- \to$

1) 有的文章中称 $\dim H_- = \infty$，$\dim H_+ = K$ 为 Понтрягин 空间. 显然，它与本书中用法没有实质性区别.

H_+ 的线性算子 A 总是 $\mathscr{D}(A)\subset(H_-, -(\cdot,\cdot))$ 到 $(H_+, (\cdot,\cdot))$ 的有界线性算子，并且 A^*A，AA^* 只有有限个（个数不超过 $\dim\mathscr{D}(A)$）点谱

定理 5.1（维数定理） 设 L 是 Π_K 的负（或半负）子空间，那么 L 是 Π_K 的极大负（或极大半负）子空间的充要条件是下面二者之一。

(i) 在正则分解 $\Pi_K = H_-\oplus H_+$ 之下，$P_-L = H_-$，其中 P_- 是 Π_K 在 H_- 上投影。

(ii) $\dim L = K$。

证 首先注意，在正则分解 $\Pi_K = H_-\oplus H_+$ 之下，显然，L 为 Π_K 的负（或半负）子空间的充要条件是存在 $H_-\to H_+$ 的线性算子 A，对任何 $x\in\mathscr{D}(A)$ $(\subset H_-)$，

$$\|Ax\| < \|x\| \ (\text{或 } \|Ax\| \leqslant \|x\|), \tag{5.1}$$

使得 $L = L_A$。根据引理 3.2 的 (iii) 的必要性证明可知，L_A 是极大负子空间时，必然 $\overline{\mathscr{D}(A)}=H_-$。但 $\dim H_-<\infty$，所以 $\mathscr{D}(A)=\overline{\mathscr{D}(A)} = H_-$。而 $\mathscr{D}(A) = P_-L$，所以由引理 3.2 的(ii)，(iii) 立即得到 L 为 Π_K 上极大负（极大半负）子空间的充要条件是 $P_-L = H_-$。

现在证明 (ii) 也是充要条件。

假设 (ii) 成立。由于 L 中不存在形如 $\{0, y\}$ $(y\neq 0)$ 的向量，所以对任何非零 $x\in L$，$P_-x\neq 0$，即 L 中任何一组线性无关向量 $x_1, \cdots, x_l$ 所相应的 $P_-x_1, \cdots, P_-x_l$ 也必是线性无关组。因为 $\dim L = K$，所以 $\dim P_-L = K = \dim H_-$，从而 $P_-L = H_-$。根据本定理的 (i) 可知，L 是极大负（或极大半负）子空间。

反之，假设 L 是极大负（或极大半负）子空间，根据本定理的 (i)，$P_-L = H_-$。由此可知，$\dim L \geqslant \dim H_- = K$。再由于 P_- 将 L 中线性无关组必映射成线性无关组，所以又必然有 $\dim L\leqslant \dim H_- = K$。从而 $\dim L = K$。证毕。

推论 5.2 设 L 是 Π_K 的负（或半负）子空间，那末

(i) L 必是 Π_K 的闭线性子空间；

(ii) L 不是 Π_K 的极大负（或极大半负）子空间的充要条件是 $\dim L < K$，或是 $P_- L \neq H_-$。

本推论是显而易见的。

定理 5.3 在 Π_K 上下列命题成立。

(i) Π_K 的任何负子空间 N 必是完备子空间。

(ii) Π_K 上任何正子空间 P，如果 $(P, (\cdot, \cdot))$ 成为 Hilbert 空间，并且 $\bar{P}$ 是非退化的，那末 P 必是完备子空间（从而 $P = \bar{P}$）。

证 (i) 因为 $\dim N \leqslant K$，而有限维空间必是闭线性子空间，并且 $(N, -(\cdot, \cdot))$ 也必是 Hilbert 空间，所以 N 是完备子空间。

(ii) 是引理 3.16 或定理 3.18 的直接推论。证毕。

定理 5.4 Π_K 上任何非退化的闭线性子空间必是完备子空间。

证 设 $\Pi_K = H_- \oplus H_+$ 是正则分解。根据定理 3.9，

$$L = L_0^- \oplus L_A \oplus L_0^+. \tag{5.2}$$

显然，L_0^-，L_0^+ 都是完备子空间。由 L 的非退化性，从 (5.2) 推出，L_A 必是非退化的。在完备子空间 $\Pi' = \mathscr{D}(A) \oplus \overline{\mathscr{R}(A)}$（注意 $\mathscr{D}(A) = \overline{\mathscr{D}(A)}$）应用引理 3.3 的 (ii)，立即有

$$1 \bar{\in} \sigma_p(A^*A) = \sigma(A^*A), \tag{5.3}$$

即 $1 \in \rho(A^*A)$。再根据引理 3.3 的 (iii)，$\Pi' = L_A \oplus L_{A^*}$。从而 L_A 是 $(\Pi', (\cdot, \cdot))$ 的完备子空间。根据推论 3.14 的 (ii)，立即可知 L 是完备子空间。也可直接令 $L_A = N \oplus P$ 是 L_A 的正则分解，易知 $L = (L_0^- \oplus N) \oplus (L_0^+ \oplus P)$ 就是 $(L, (\cdot, \cdot))$ 的正则分解，从而 L 是 Π 的完备子空间。证毕。

推论 5.5 Π_K 上任何有限维非退化子空间必是完备子空间。特别，如果 N 是 Π_K 的极大负子空间，那末必有

$$\Pi_K = N \oplus N^{\perp}, \tag{5.4}$$

并且 (5.4) 是 Π_K 的正则分解。

本推论是显然的。

下面的推论也是显然的。

推论 5.6 设 L 是 Π_K 的非退化的闭线性子空间。下列命题成

立.

(i)（子空间的分解）. N 是 L 中任一极大负子空间,那末

$$L = N \oplus M, \tag{5.5}$$

其中 $M = L \cap N^{\perp}$,并且 (5.5) 是 $(L, (\cdot, \cdot))$ 的正则分解.

(ii) 记 L 中极大负子空间的维数为 K', 那末 $K' \leqslant K$, 并且 $(L, (\cdot, \cdot))$ 是 $\Pi_{K'}$ 空间.

(iii) 记 $L^{\perp}$ 中极大负子空间的维数为 K'',那末

$$\Pi_K = L \oplus L^{\perp}, \text{并且 } K' + K'' = K. \tag{5.6}$$

定理 5.7 设 L 是 Π_K 的闭线性子空间. 下列命题成立.

(i) L 必可分解成如下形式:

$$L = N_L \oplus Z_L \oplus P_L, \tag{5.7}$$

其中 N_L, P_L, Z_L 分别是负、正、零性子空间. 凡是 (5.7) 形式的分解必有 $Z_L = L \cap L^{\perp}$, 并且 $\dim N_L$ 是 L 中极大负子空间的维数.

(ii) 存在 L 的分解 (5.7),并且 P_L 是 Π_K 的闭线性子空间（从而 P_L 必是 Π_K 的完备子空间).

(iii) 当分解 (5.7) 中 P_L 是闭线性子空间时（即 (5.7) 是 L 的标准分解时),存在标准分解 $\Pi_K = N \oplus \{Z + Z^*\} \oplus P$,使得

$$N_L \subset N, \ P_L \subset P, Z_L = Z, \tag{5.8}$$

并且 $\{Z, Z^*\}$ 是 $H.\ D.$ 对.

(iv) 当 (5.7) 是标准分解时,有分解

$$L^{\perp} = (N \ominus N_L) \oplus Z_L \oplus (P \ominus P_L), Z_{L^{\perp}} = Z_L. \tag{5.9}$$

(5.9) 是 $L^{\perp}$ 的标准分解,并且

$$\dim N_L + \dim (N \ominus N_L) + \dim Z_L = K. \tag{5.10}$$

证 显然, 由定理 4 可知, 对于闭线性子空间 L, 必有分解 (5.7),而且 N_L, Z_L, P_L 都是闭线性子空间. 从 (5.7) 易知 $Z_L \perp L$, 所以 $Z_L \subset L \cap L^{\perp}$. 反之, 对任何 $x \in L \cap L^{\perp}$, 必有唯一的 $n \in N$, $z \in Z_L$, $p \in P$. 使得 $x = n + z + p$. 由于 $x \perp N$, $x \perp P$, 所以 $n = p = 0$,即 $x = z \in Z_L$,也即 $Z_L = L \cap L^{\perp}$.

由于 $Z_L \oplus P_L$ 是半正子空间, 从 (5.7) 易知 N_L 必是 L 中极大负子空间. 这样就证明了 (i),并且也证明了 (ii).

因为 P_L 是闭线性子空间，又显然 P_L 是非退化. 根据定理 5.4, P_L 是 Π_K 的完备子空间，而 N_L 是有限维负子空间，所以 N_L 也是 Π_K 的完备子空间. 根据定理 4.11，必存在满足 (5.8) 的标准分解 $\Pi_K = N\oplus\{Z + Z^*\}\oplus P$. 从标准分解的意义或直接从推论 4.8，立即可知 $\{Z, Z^*\}$ 是 $H.D.$ 对. 这就证明了 (iii).

(iv) 也是很明显的. 证明略.

定理 5.8 设 L 是 Π_K 的线性子空间. 下列命题成立.

(i) L 必可分解成如下形式:

$$L = N_L\oplus Z_L\oplus P_L, \tag{5.11}$$

其中 N_L, P_L, Z_L 分别是负、正、零性子空间，$Z_L = L\cap L^{\perp}$. 并且可以做到 N_L 是在 L 中任意取定的极大负子空间.

(ii) 设 $\bar{P}_L = Z_1\oplus P_0$, $Z_1=\bar{P}\cap\bar{P}^{\perp}$, P_0 为正闭线性子空间（即 Π_K 的正完备子空间）. 那么

$$\bar{L} = N_L\oplus Z_L\oplus\bar{P}_L = N_L\oplus\{Z_L + Z_1\}\oplus P_0. \tag{5.12}$$

(iii) $\dim N_L$ 是 L（也是 $\bar{L}$）的极大负子空间的维数.

证 (i) 在 L 中任取一个 L 的极大负子空间 N_L，因为 N_L 必是完备的，所以 $\Pi = N_L\oplus N_L^{\perp}$，从而

$$L = N_L\oplus L'.$$

显然，L' 中不再含有负向量，因此 L' 是正或半正子空间. 令 $Z = L'\cap L'^{\perp}$，显然

$$\begin{aligned}Z &= L'\cap L'^{\perp} = \{y\,|\,(x, y) = 0,\ x\in L',\ y\in L'\}\\ &= \{y\,|\,(x+n, y) = 0,\ x\in L',\ y\in L',\ n\in N_L\}\\ &= \{y\,|\,(x, y) = 0,\ x\in L,\ y\in L'\} = \{y\,|\,(x, y) = 0,\\ &\qquad x\in L,\ y\in L\} = L\cap L^{\perp} = Z_L.\end{aligned}$$

在商空间 L'/Z 的每个等价类中适当选代表向量，使所选代表向量的全体 P_L 构成线性空间（用超限归纳法来作），从而 $L' = Z\oplus P_L$. 由此可得 (5.11).

(ii) 因为 $\bar{P}_L$ 是闭线性子空间，而 $N_L\oplus Z_L$ 是有限维空间，所以 $N_L\oplus Z_L\oplus\bar{P}_L$ 是闭线性子空间，从而 $\bar{L}\subset N_L\oplus Z_L\oplus\bar{P}_L$.

相反地，包含关系 $\bar{L}\supset N_L\oplus Z_L\oplus\bar{P}_L$ 是显然的. 所以 (5.12) 成

立。

(iii) 由 (5.11) 可知，L 中极大负子空间维数至少大于或等于 $\dim N_L$。如果 N_L' 是 L 的一个极大负子空间，令 $x_1, \cdots, x_l$ 是 N_L' 中线性基。根据分解(5.11)，则对每个 x_i 有唯一分解 $x_i = n_i + z_i + p_i$，$n_i \in N_L$，$z_i \in Z$，$p_i \in P_L$。由于 $x_1, \cdots, x_l$ 是线性无关的，并且 $Z_L + P_L$ 中不含负向量这个事实，立即可知 $n_1, \cdots, n_l$ 也必是 N_L 中线性无关向量组，从而 $\dim N_L' \leqslant \mathrm{dmi} N_L$，即 L 中极大负子空间的维数决不超过 $\dim N_L$。从而 (iii) 成立。

当 L 有分解 (5.11) 时，$\bar{L}$ 就有分解 (5.12)。从 (5.11)，(5.12) 可知，L，$\bar{L}$ 具有相同的极大负子空间的维数。证毕。

第二章　完备的不定度规空间上算子的一般理论

本章中主要是讨论完备的不定度规空间$(\Pi, (\cdot, \cdot))$上某些重要算子的一般理论、有关完备的不定度规空间上的自共轭算子、酉算子、压缩算子的深入的性质将分章讨论。

§1　稠定、闭和对称算子

1. 共轭算子　设T是完备的不定度规空间$(\Pi, (\cdot, \cdot))$到完备的不定度规空间$(\Pi', (\cdot, \cdot)')$的线性算子，$\mathscr{D}(T)\subset\Pi$. 对于某个$y\in\Pi'$，能够有$z\in\Pi$，使得

$$(Tx, y)' = (x, z),\ x\in\mathscr{D}(T). \tag{1.1}$$

这种y的全体记为$\mathscr{D}^{\dagger}$，显然$\mathscr{D}^{\dagger}$是Π的线性子空间，并且对于$y\in\mathscr{D}^{\dagger}$，只有一个$z\in\Pi$适合(1.1)的充要条件是$\mathscr{D}(T)$在$\Pi$中稠密，与Hilbert空间类似，引入如下定义.

定义 1.1　设$(\Pi, (\cdot, \cdot))$，$(\Pi', (\cdot, \cdot)')$是两个完备的不定度规空间. T是Π到Π'的线性算子，如果$\mathscr{D}(T)$在Π中稠密，那么称T是稠定算子，当T是Π到Π'的稠定算子时，作$\mathscr{D}^{\dagger}(\subset\Pi')$到$\Pi$的算子$T^{\dagger}: y\longmapsto z$，其中$y\in\mathscr{D}^{\dagger}$，而$z$是使(1.1)成立的向量，即

$$(Tx, y)' = (x, T^{\dagger}y),\ x\in\mathscr{D}(T),\ y\in\mathscr{D}^{\dagger}. \tag{1.2}$$

称$T^{\dagger}(\mathscr{D}(T^{\dagger}) = \mathscr{D}^{\dagger})$为$T$的共轭算子，或伴随算子.

设$\Pi = H_-\oplus H_+$，$\Pi' = H'_-\oplus H'_+$都是正则分解. $[\cdot, \cdot]$，$[\cdot, \cdot]'$为分别由它们导出的内积，相应的范数记为$\|\cdot\|$，$\|\cdot\|'$. $P_{\pm}$，$P'_{\pm}$分别是Π在$H_{\pm}$和Π'在$H'_{\pm}$上的投影、令 $J=P_+-P_-$，$J'=P'_+-P'_-$.那末(1.2)式等价于下式：

$$[J'Tx, y]' = [Jx, T^{\dagger}y],\ x\in\mathscr{D}(T),\ y\in\mathscr{D}(T^{\dagger}). \tag{1.3}$$

由于 T 是 Hilbert 空间 $(\Pi, [\cdot, \cdot])$ 到 Hilbert 空间 $(\Pi', [\cdot, \cdot]')$ 的稠定线性算子，因此 T^*[1] 存在，当注意到 $J^2 = I$, $J'^2 = I\ J^{-1} = J$, $J'^{-1} = J'$, $J^* = J$, $J'^* = J'$ 时，易知 (1.3) 等价于

$$T^\dagger = JT^*J'. \tag{1.4}$$

换言之，$\mathscr{D}(T^\dagger) = J'\mathscr{D}(T^*)$，且 $T^\dagger = JT^*J'$.

(1.4) 式是沟通 Hilbert 空间共轭算子概念和完备的不定度规空间共轭算子概念的桥梁。

2. 闭算子

定义 1.2 设 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$, $(\Pi', (\cdot, \cdot)')$ 是两个完备的不定度规空间，T 是 Π 到 Π' 的线性算子，$\mathscr{D}(T) \subset \Pi$. 如果当 $\{x_n\}$ $(\subset \mathscr{D}(T))$, $\{Tx_n\}$ 都是基本列时，必然有 $x \in \mathscr{D}(T)$，使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx, \tag{1.5}$$

那末称 T 是闭算子.

显然，T 是 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 到 $(\Pi', (\cdot, \cdot)')$ 的闭算子，等价于将 T 视为 Hilbert 空间 $(\Pi, [\cdot, \cdot])$ 到 Hilbert 空间 $(\Pi', [\cdot, \cdot]')$ 的线性算子时是闭的，类似地也可用图象来描述。

定义 1.3 设 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$, $(\Pi', (\cdot, \cdot)')$ 是两个不定度规空间，$\Pi \times \Pi'$ 是乘积集，在 $\Pi \times \Pi'$ 上引入度规：

$$((\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\})) = (x_1, x_2) + (y_1, y_2)'. \tag{1.6}$$

称 $(\Pi \times \Pi', ((\cdot, \cdot)))$ 为 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$, $(\Pi', (\cdot, \cdot)')$ 的乘积空间，或记为 $(\Pi, (\cdot, \cdot)) \times (\Pi', (\cdot, \cdot)')$，或简记成 $\Pi \times \Pi'$.

有时为了防止混淆，由 (1.6) 定义的 $\Pi \times \Pi'$ 上度规明确表示为 $(\cdot, \cdot) \oplus (\cdot, \cdot)'$.

引理 1.1 $(\Pi \times \Pi', ((\cdot, \cdot)))$ 为完备的不定度规空间的充要条件是 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$, $(\Pi', (\cdot, \cdot)')$ 都是完备的不定度规空间。

证 充分性 设 $\Pi = H_- \oplus H_+$, $\Pi' = H'_- \oplus H'_+$ 都是正则分解，显然 $(H_- \times H'_-, -((\cdot, \cdot)))$ 和 $(H_+ \times H'_+, ((\cdot, \cdot)))$ 都是 Hilbert

---

[1] 本书中“†”表示不定度规空间意义下的共轭运算，而“*”和通常一样，表示 Hilbert 空间意义下的共轭运算.

空间，即 $\Pi \times \Pi' = (H_- \times H'_-)\oplus(H_+ \times H'_+)$ 是 $(\Pi \times \Pi', ((\cdot, \cdot)))$ 的正则分解. 所以 $(\Pi \times \Pi', ((\cdot, \cdot)))$ 是完备的不定度规空间.

必要性 考察完备的不定度规空间 $(\Pi \times \Pi', ((\cdot, \cdot)))$ 的两个线性子空间

$$L_1 = \{\{x, 0\} | x \in \Pi\},$$
$$L_2 = \{\{0, y\} | y \in \Pi'\}. \tag{1.7}$$

显然 $L_1 \perp L_2$，并且

$$\Pi \times \Pi' = L_1 \oplus L_2. \tag{1.8}$$

根据第一章定理 3.13，L_1，L_2 都是 $(\Pi \times \Pi', ((\cdot, \cdot)))$ 的完备子空间. 由于 $(L_1, ((\cdot, \cdot)))$ 和 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 可视为同一的，因而 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 是完备的不定度规空间. 同理，$(\Pi', (\cdot, \cdot)')$ 也是完备的不定度规空间. 证毕.

推论 1.2 设 Π_K，$\Pi_{K'}$ 是两个 Понтрягин 空间，那么 $\Pi_K \times \Pi_{K'}$ 也是 Понтрягин 空间，并且是 $\Pi_{K+K'}$.

证 设 $\Pi_K = H_- \oplus H_+$ $(\dim H_- = K)$， $\Pi_{K'} = H'_- \oplus H'_+$ $(\dim H'_- = K')$ 都是正则分解，因而

$$\Pi_K \times \Pi_{K'} = (H_- \times H'_-)\oplus(H_+ \times H'_+) \tag{1.9}$$

也是正则分解. 由于 $\dim H_- \times H'_- = \dim H_- + \dim H'_- = K + K'$，所以 $\Pi_K \times \Pi_{K'}$ 是 $\Pi_{K+K'}$.

设 $\Pi = H_- \oplus H_+$，$\Pi' = H'_- \oplus H'_+$ 都是正则分解，由它们导出的内积分别是 $[\cdot, \cdot]$，$[\cdot, \cdot]'$. 由 $\Pi \times \Pi'$ 的正则分解 (1.9) 所导出的内积 $[[\cdot, \cdot]]$，显然满足等式 $[[\cdot, \cdot]] = [\cdot, \cdot]\oplus[\cdot, \cdot]'$.

定义 1.4 设 T 是不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 到不定度规空间 $(\Pi', (\cdot, \cdot)')$ 的线性算子，$\mathscr{D}(T) \subset \Pi$. 称 $(\Pi \times \Pi', ((\cdot, \cdot)))$ 上的子集

$$G(T) = \{\{x, Tx\} | x \in \mathscr{D}(T)\}$$

是算子 T 的图象.

引理 1.3 (i) $(\Pi \times \Pi', ((\cdot, \cdot)))$ 的线性子空间 L 为某个

Π 到 Π' 的线性算子的图象的充要条件是，L 中不含形如 $\{0, y\}$ $(y \neq 0)$ 的向量。

(ii) T 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 到完备的不定度规空间 $(\Pi', (\cdot, \cdot)')$ 的线性算子，$\mathscr{D}(T) \subset \Pi$。那末 T 为闭算子的充要条件是，$G(T)$ 是 $(\Pi \times \Pi', ((\cdot, \cdot)))$ 的闭线性子空间。

引理 1.3 的证明完全与 Hilbert 空间情况一样。证明略。

和通常 Hilbert 空间一样，引入 $\Pi \times \Pi'$ 到 $\Pi' \times \Pi$ 的线性运算：

$$V: \{x, y\} \longmapsto \{y, -x\}, \ \{x, y\} \in \Pi \times \Pi'. \tag{1.10}$$

不定度规空间上的"$\dagger$"运算和 Hilbert 空间上"$*$"一样，具有如下初等性质。

引理 1.4 设 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$，$(\Pi', (\cdot, \cdot)')$ 是两个完备的不定度规空间，T，T_1，T_2 都是 Π 到 Π' 的稠定线性算子。下列命题成立。

(i) $T^\dagger$ 是 Π' 到 Π 的闭算子。

(ii) 如果 T 是全 Π 上定义的有界算子，那末 $T^\dagger$ 也是全 Π' 上定义的有界算子。

(iii) 当 $T_1 + T_2$ 是稠定算子时，$(T_1 + T_2)^\dagger \supset T_1^\dagger + T_2^\dagger$，而当 T_1，T_2 中有一个是全 Π 上定义的有界算子时，$(T_1 + T_2)^\dagger = T_1^\dagger + T_2^\dagger$。

(iv) λ 是任一非零复数，那末

$$(\lambda T)^\dagger = \bar{\lambda} T^\dagger; \ \theta = (0T)^\dagger \supset 0T^\dagger\text{[1)]}.$$

(v) 如果 T 是单射，$\mathscr{R}(T)$ 在 Π' 中稠密，那末

$$(T^\dagger)^{-1} = (T^{-1})^\dagger.$$

(vi) 当 $T_1 \supset T_2$ 时，$T_1^\dagger \subset T_2^\dagger$。

(vii) $G(T^\dagger) = (VG(T))^\perp$。

(viii) 稠定算子 T 具有闭扩张（即存在闭算子 $\tilde{T}$，使得 $T \subset \tilde{T}$）的充要条件是，$T^\dagger$ 是稠定算子。当 $T^\dagger$ 稠定时，$(T^\dagger)^\dagger$ 是 T 的

1) 此式最左边的"θ"是零算子，以后我们仍用"0"表示零算子。这里用 θ，是为了表示与此式中其它两个数字零有区别。

最小闭扩张. 从而当 T 是稠定闭算子时, $(T^{\dagger})^{\dagger}=T$.

(ix) $\mathscr{R}(T)^{\perp}=\mathscr{N}(T^{\dagger})$[1]

(x) 当 $(\Pi,(\cdot,\cdot))=(\Pi',(\cdot,\cdot)')$, T_1T_2 是稠定算子时, $(T_1T_2)^{\dagger}\supset T_2^{\dagger}T_1^{\dagger}$. 如果 T_1 还是全 Π 上定义的有界线性算子, 那么 $(T_1T_2)^{\dagger}=T_2^{\dagger}T_1^{\dagger}$.

上述 (i)—(x) 可完全相仿于 Hilbert 空间情况来证明. 当然, 也可以通过 (1.4) 式将 (i)—(x) 直接化成 Hilbert 情况去讨论. 注意, 在证明时, 要用到第一章的推论 3.6.

3. 根子空间 设 T 是不定度规空间 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上线性算子. 如果 λ 是 T 的特征值, 今后总用 $\Phi_{\lambda 1}(T)$ 表示相应于 λ 的特征向量全体. 更一般地, 对任何自然数 k, 记

$$\Phi_{\lambda k}(T)=\{x\,|\,(T-\lambda I)^k x=0, x\in\mathscr{D}(T^k)\}. \qquad (1.11)$$

显然

$$\Phi_{\lambda 1}(T)\subset\Phi_{\lambda 2}(T)\subset\cdots\subset\Phi_{\lambda k}(T)\subset\cdots, \qquad (1.12)$$

称 $\Phi_{\lambda k}(T)$ 为 T 的 k 级根向量空间, 或 k 级根子空间, 而称

$$\Phi_{\lambda}(T)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\Phi_{\lambda k}(T)\text{为 } T \text{ 的根子空间.}$$

如果 $x\in\Phi_{\lambda k}(T)$, 但 $x\bar{\in}\Phi_{\lambda k-1}(T)$, 那末称 x 是 T 的 k 级根向量; 如果 x 是 r 级根向量, 并且不存在 $r+1$ 级根向量 y, 使得 $x=(T-\lambda I)y$, 那末称 x 是 T 的最高级根向量. 一般说来, T 可以有很多最高级向量, 自然这些最高级向量的级可以不同.

显然, $\Phi_{\lambda}(T)$ 中每个向量都有确定的级, 而对每个自然数 k, $\Phi_{\lambda k}(T)$ 是线性子空间, 并且线性子空间 $\Phi_{\lambda}(T)\subset\mathscr{D}(T^n)$ $(n=1,2,\cdots)$; 当 T 是完备的不定度规空间 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上闭算子时, $T-\lambda I$ 也是闭算子, 并且 $\Phi_{\lambda 1}(T)$ 是闭线性子空间; 当 T 是 Π 上定义的闭线性算子时, $\Phi_{\lambda k}(T)$ $(k=1,2,\cdots)$ 都是闭线性子空间.

定义 1.5 设 $\{L_\alpha\,|\,\alpha\in A\}$ 是不定度规空间 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上一

---

1) $\mathscr{N}(T)$ 表示算子 T 的零空间, 即 $\mathscr{N}(T)=\{x\,|\,Tx=0, x\in\mathscr{D}(T)\}$.

族线性子空间。如果对任何 $\alpha\in\Lambda$，L_α 中任何非零向量 x，都有 $x\bar{\in}$ $\mathrm{span}\{L_{\alpha'}|\alpha'\in\Lambda,\alpha'\neq\alpha\}$，那末称 $\{L_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 是一族线性无关的子空间，或称为线性无关的线性子空间族。

引理 1.5 设 T 是不定度规空间 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上线性算子，$\mathscr{D}(T)\subset\Pi$。那末 $\{\Phi_\lambda(T)|\lambda\in\sigma_p(T)\}$ 必是一族线性无关子空间。

证 我们用反证法。如果有非零 $x\in\Phi_\lambda(T)$，$x_i\in\Phi_{\lambda_i}(T)$，$\lambda_i\neq\lambda$，以及数 α_i，$i=1,2,\cdots,n$，使得

$$x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i. \tag{1.13}$$

假设 x_i 的级为 k_i，而 x 的级为 k，并作 T 的多项式

$$P(T)=(T-\lambda I)^{k-1}\prod_{i=1}^{n}(T-\lambda_i I)^{k_i}. \tag{1.14}$$

显然 $P(T)x_i=0$，$i=1,2,\cdots,n$，因此 $P(T)x=0$。

但是，另一方面又有

$$P(T)x=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)^{k_i}(T-\lambda I)^{k-1}x\neq 0. \tag{1.15}$$

这就发生了矛盾。因此，$\{\Phi_\lambda(T)|\lambda\in\sigma_p(T)\}$ 是一族线性无关的子空间。证毕。

4. 对称算子

定义 1.6 设 A 是完备的不定度规空间 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上的稠定线性算子，如果 $A\subset A^\dagger$，称 A 是对称算子，如果 $A^\dagger=A$，称 A 是自共轭算子，或自伴算子。

对称算子有如下初等性质。

定理 1.6 设 A 是完备的不定度规空间 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上对称算子。

(i) 如果 $\lambda,\mu\in\sigma_p(A)$，并且 $\lambda\neq\bar{\mu}$，那末

$$\overline{\Phi_\lambda(A)}\perp\overline{\Phi_\mu(A)}. \tag{1.16}$$

(ii) 如果 $\lambda\in\sigma_p(A)$，$I_m\lambda\neq 0$，那末 $\overline{\Phi_\lambda(A)}$ 是闭零性子空间。

(iii) 特别，当 $\Pi=\Pi_K$ 时，那末 A 在上半（或下半）开平面上特征值的个数不超过 K，用 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,l)$ 表示上半（或下

半) 开平面的特征值，进一步便有

$$\dim(\Phi_{\lambda_1}(A)\oplus\Phi_{\lambda_2}(A)\oplus\cdots\oplus\Phi_{\lambda_l}(A))$$
$$=\sum_{i=1}^{l}\dim\Phi_{\lambda_i}(A)\leqslant K. \qquad (1.17)$$

(iv) 如果 A 是 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上自共轭算子，那末 $\sigma(A)$ 关于实轴对称[1]。

证 (i) 显然只要证明 $\Phi_\lambda(A)\perp\Phi_\mu(A)$ 即可。用归纳法证明如下：当 $x\in\Phi_{\lambda1}(A)$，$y\in\Phi_{\mu1}(A)$ 时，

$$\lambda(x,y)=(Ax,y)=(x,Ay)=\bar{\mu}(x,y).$$

根据 $\lambda\neq\bar{\mu}$ 的假设，由上式立即得到 $(x,y)=0$，从而 $\Phi_{\lambda1}(A)\perp\Phi_{\mu1}(A)$。

假设对自然数 m，只要 $l+l'\leqslant m$，都有 $\Phi_{\lambda l}(A)\perp\Phi_{\mu l'}(A)$。今证当 $l+l'=m+1$ 时，$\Phi_{\lambda l}(A)\perp\Phi_{\lambda l'}(A)$。事实上，如果 $x\in\Phi_{\lambda l}(A)$，$y\in\Phi_{\mu l'}(A)$，那末

$$(A-\lambda I)x\in\Phi_{\lambda l-1}(A),\ (A-\mu I)y\in\Phi_{\mu l'-1}(A).$$

利用归纳法假设，

$$-(\lambda x,y)=((A-\lambda I)x,y)-(Ax,y)$$
$$=-(x,Ay)=-(x,(A-\mu I)y)-\bar{\mu}(x,y)$$
$$=-\bar{\mu}(x,y). \qquad (1.18)$$

因为 $\lambda\neq\bar{\mu}$，所以 $(x,y)=0$，即 $\Phi_{\lambda l}(A)\perp\Phi_{\mu l'}(A)$。由此可以得到 $\Phi_\lambda(A)\perp\Phi_\mu(A)$。

(ii) 在 (i) 中我们单独考虑 $I_m\lambda\neq0$ 的情况，这时必有 $\lambda\neq\bar{\lambda}$，从而 $\overline{\Phi_\lambda(A)}\perp\overline{\Phi_\lambda(A)}$，即 $\overline{\Phi_\lambda(A)}$ 是闭零性子空间。

(iii) 根据引理 1.5 和本定理的 (i)，(ii)，对于 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上对称算子 A，$\{\Phi_\lambda(A)\mid\lambda\in\sigma_p(A),\ I_m\lambda>0\}$ 必是线性无关的线性子空间族而且是彼此相互直交的零性子空间。因而 $\overline{\text{span}}\{\Phi_\lambda(A)\mid\lambda\in\sigma_p(A)\}$ 是零性子空间。

特别是当 $\Pi=\Pi_K$ 时，由于 Π_K 上零性子空间的维数决不超

---

1) 对于 Π_K 上自共轭算子，进一步还有 $\sigma_p(A)$ 关于实轴对称(见本章 §4 推论4.8)。

过 K，所以任取上半开平面上 l 个特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,l)$，则

$$\dim \operatorname{span}\{\Phi_{\lambda_i}(A)\mid i=1,2,\cdots,l\}=\dim(\Phi_{\lambda_1}(A)\oplus \Phi_{\lambda_2}(A)\oplus\cdots\oplus\Phi_{\lambda_l}(A))$$

$$=\sum_{i=1}^{l}\dim\Phi_{\lambda_i}(A)\leqslant K. \tag{1.19}$$

由于 $\dim\Phi_{\lambda_i}(A)\geqslant 1$，所以从 (1.19) 可知，$A$ 在上半开平面上特征值最多不超过 K。如果 $\lambda_1,\cdots,\lambda_l$ 是上半开平面中所有的 A 的特征值，那末还成立 (1.17)式。

(iv) 是显然的。证毕。

5. 算子 $T^{\dagger}T$ 现在讨论完备的不定度规空间 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上稠定闭线性算子 T 在什么条件下，$T^{\dagger}T$ (或 $TT^{\dagger}$) 是自共轭算子。

定理 1.7 设 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$，$(\Pi',(\cdot,\cdot)')$ 是两个完备的不定度规空间，T 是 Π 到 Π' 的稠定闭线性算子。如果 $G(T)$ 是 $(\Pi\times\Pi',((\cdot,\cdot)))$ 上的完备子空间，那末算子

$$(I+T^{\dagger}T)^{-1},T(I+T^{\dagger}T)^{-1} \tag{1.20}$$

都是全空间 Π 上定义的有界线性算子，而且 $(I+T^{\dagger}T)^{-1}$，$T^{\dagger}T$ 都是 Π 上自共轭算子，而 $TT^{\dagger}$ 是 Π' 上自共轭算子。

证 先证 $I+T^{\dagger}T$ 是单射。如果不对，必有非零向量 $x\in\Pi$，使得

$$(I+T^{\dagger}T)x=0. \tag{1.21}$$

如记 $z=Tx$，那末由上式得到 $T^{\dagger}z=-x$，即

$$\{z,-x\}\in G(T^{\dagger})=(VG(T))^{\perp},$$

或者说 $\{x,z\}\in G(T)^{\perp}$。但是 $\{x,z\}=\{x,Tx\}\in G(T)$，从而

$$\{x,z\}\in G(T)\cap G(T)^{\perp}. \tag{1.22}$$

由于假设 $G(T)$ 是完备子空间，从而是非退化的。所以，从 (1.22) 立即得到 $x=0$，$z=Tx=0$。这与假设矛盾。因此 $I+T^{\dagger}T$ 是单射。

再证 $(I+T^{\dagger}T)^{-1}$ 是定义在全空间 Π 上的有界线性算子。因为 $G(T)$ 是完备子空间，所以 $\Pi\times\Pi'=G(T)\oplus G(T)^{\perp}$。下面和普通 Hilbert 空间情况一样，可以证明 $\mathscr{R}(I+T^{\dagger}T)=\Pi$。如记

$B = (I + T^\dagger T)^{-1}$, B 便是全 Π 上定义的线性算子，并且对任何 $x \in \Pi$, $Bx \in \mathscr{D}(T^\dagger T)$. 所以,对任何 $x, y \in \Pi$,

$$
\begin{aligned}
(x, By) &= ((I + T^\dagger T)Bx,\ By) = (Bx, By) + (TBx\ TBy)' \\
&= (Bx, (I + T^\dagger T)By) = (Bx, y),
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

即 B 是全空间定义的对称算子. 从而 $B = B^\dagger$. 由于 $B^\dagger$(即B) 是闭算子,根据闭图象定理, B 是有界的.

再根据引理 1.4 的 (v),由 B 的自共轭性, 立即得到 $I + T^\dagger T$ 也是自共轭算子. 再由引理 1.4 的(iii), $T^\dagger T$ 是自共轭算子.

显然, 算子 $T(I + T^\dagger T)^{-1}$ 是全空间定义的线性算子, 利用 T 是闭算子,$(I + T^\dagger T)^{-1}$ 是连续的,易知 $T(I + T^\dagger T)^{-1}$ 是闭算子. 再用闭图象定理就得到 $T(I + T^\dagger T)^{-1}$ 是有界的.

换 T 为 $T^\dagger$,立即得到 $TT^\dagger$ 是自共轭算子,$(I + TT^\dagger)^{-1}$ 是全 Π' 上定义的有界的自共轭算子, $T^\dagger(I + TT^\dagger)^{-1}$ 是有界的. 证毕.

下面举例说明稠定闭线性算子 T 的图象 $G(T)$ 可以仅只是 $(\Pi \times \Pi', ((\cdot, \cdot)))$ 上的闭线性子空间, 而不是完备子空间.

例 1.1 设 $\Pi = H_- \oplus H_+$, $H_\pm = L^2[0, 1]$. 作 $\Pi \to \Pi$ 的线性算子 T 如下:

$$
T = \begin{pmatrix} O & T_1 \\ T_2 & O \end{pmatrix} \begin{matrix} H_+ \\ H_- \end{matrix}
\tag{1.24}
$$

$$
T_1: H_- \to H_+,\ f(t) \longmapsto tf(t)\ (f(t) \in L^2[0, 1])
$$

$$
T_2: H_+ \to H_-,\ g(t) \longmapsto \frac{1}{t} g(t)\ \left(g(t), \frac{1}{t} g(t) \in L^2[0,1]\right).
$$

易知 T 是 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上稠定闭线性算子. 可是在正则分解 $\Pi \times \Pi = (H_- \times H_-) \oplus (H_+ \times H_+)$ 之下, 易知图象 $G(T)$ 是形如 L_A 的线性子空间,其中

$$
\begin{aligned}
&A: H_- \times H_- \to H_+ \times H_+, \\
&\{f(t), g(t)\} \longmapsto \{tf(t), tg(t)\},\ f(t), g(t) \in L^2[0,1].
\end{aligned}
\tag{1.25}
$$

因为 $1 \bar{\in} \rho(A^* A)$, 所以 $G(T) = L_A$ 不是完备子空间 (见第一章定

理 3.13 和引理 3.3 的 (iii))。它只是 $\Pi\times\Pi$ 的极大负闭线性子空间，自然是非退化的。

但由于 T_1, T_2 都是 $L^2[0,1]$ 上稠定闭线性算子，再注意到

$$T^{\dagger}=JT^*J=\begin{pmatrix} O & -T_2^* \\ -T_1^* & O \end{pmatrix},\quad T^{\dagger}T=\begin{pmatrix} -T_2^*T_2 & \\ & -T_1^*T_1 \end{pmatrix},$$

易知 $T^{\dagger}T$ 是 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上自共轭算子。同样可证 $TT^{\dagger}$ 也是 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上自共轭算子。这也可看出，定理 1.7 中假设"$G(T)$ 是完备子空间"这个条件，并不是 $T^{\dagger}T$, $TT^{\dagger}$ 成为自共轭算子的必要条件。

下面我们再举例说明把定理 1.7 中条件"$G(T)$ 是完备子空间"换成"$G(T)$ 是非退化的闭线性子空间"也是不行的。

例 1.2 设 $\Pi=H_-\oplus H_+$ 如例 1.1。作

$$T=\begin{pmatrix} A & B \\ A & B \end{pmatrix}\begin{matrix} H_+ \\ H_- \end{matrix}$$

$$A_0\colon L^2(0,1]\to L^2[0,1];\ f(t)\longmapsto\frac{1}{t}f(t),\ f(t)\in\mathscr{D},$$

$$A=V_1A_0,\ B=V_2A_0,$$

其中 $\mathscr{D}=\{f(t)\,|\,f(t)\in L^2[0,1],\ \frac{1}{t}f(t)\in L^2[0,1]\}$，$V_1$，$V_2$ 是 $L^2[0,1]$ 上保距算子，但按 $L^2[0,1]$，$\mathscr{R}(V_1)\perp\mathscr{R}(V_2)$。规定 $\mathscr{D}(T)=\mathscr{D}_-\oplus\mathscr{D}_+$，$\mathscr{D}_\pm\subset H_\pm$，并且 $\mathscr{D}_\pm=\mathscr{D}$。

显然，$\overline{\mathscr{D}(T)}=\Pi$。由于

$$T\{g,f\}=\{Af+Bg,\ Af+Bg\},$$

以及 A, B 都是 $L^2[0,1]$ 上稠定闭线性算子，$\mathscr{R}(A)\perp\mathscr{R}(B)$（按 $L^2[0,1]$）等，易知 T 是 Π 上闭线性算子。

又显然有

$$T^{\dagger}=JT^*J\supset\hat{T}=\begin{pmatrix} A^* & -A^* \\ -B^* & B^* \end{pmatrix},$$

这里 $\mathscr{D}(\hat{T})=(\mathscr{D}(A^*)\cap\mathscr{D}(B^*))\oplus(\mathscr{D}(A^*)\cap\mathscr{D}(B^*))$。从上式容易直接算出

$$T^\dagger T|_{\tilde{D}\oplus\tilde{D}} = 0^{1)},\tag{1.26}$$

其中 $\tilde{\mathscr{D}}=\{f(t)|f(t)\in L^2[0,1],\frac{1}{t^2}f(t)\in L^2[0,1]\}$.由于 $\tilde{\mathscr{D}}\oplus\tilde{\mathscr{D}}$ 在 Π 中稠密,所以 $(T^\dagger T|_{\tilde{D}\oplus\tilde{D}})^\dagger$ 存在,并且由 (1.26) 还可以得到

$$\mathscr{D}((T^\dagger T|_{\tilde{D}\oplus\tilde{D}})^\dagger) = \Pi, (T^\dagger T|_{\tilde{D}\oplus\tilde{D}})^\dagger = 0.\tag{1.27}$$

又显然对称算子 $T^\dagger T$ 是对称算子 $T^\dagger T|_{\tilde{D}\oplus\tilde{D}}$ 的延拓，由 (1.27) 以及引理 1.4 的 (vi),立即得到

$$(T^\dagger T)^\dagger \subset (T^\dagger T|_{\tilde{D}\oplus\tilde{D}})^\dagger = 0,\tag{1.28}$$

即 $(T^\dagger T)^\dagger = 0$ 在 $\mathscr{D}((T^\dagger T)^\dagger)$ 上成立．但因为 $(T^\dagger T)^\dagger$ 是闭算子,所以可推出 $\mathscr{D}((T^\dagger T)^\dagger) = \Pi$、并且 $(T^\dagger T)^\dagger$ 是全空间定义的零算子．如果 $T^\dagger T$ 是自共轭的,那末 $\mathscr{D}(T^\dagger T) = \Pi$. 显然,由于 T 是无界算子，$\mathscr{D}(T^\dagger T)\subset\mathscr{D}(T)\subsetneqq\Pi$,所以 $T^\dagger T$ 只是对称而不是闭算子,自然更不是自共轭算子.

最后仅需指出 $G(T)$ 是非退化的就可以了．下面为了避免混淆,对于 $L^2[0,1]$ 中函数 g，分别用 $g^\pm$ 表示把 g 视为 $H_\pm$ 中向量.如果 $G(T)$ 是退化的,即有一对 $f_0, g_0\in\mathscr{D}$，$\{\{g_0^-, f_0^+\}, T\{g_0^-, f_0^+\}\}\in G(T)$，并且按 $\Pi\times\Pi$ 上度规 $((\cdot,\cdot))$直交于 $G(T) = \{\{\{g^-, f^+\}, T\{g^-, f^+\}\}|g, f\in\mathscr{D}\}$,也就是说

$$(g^-, g_0^-) + (f^+, f_0^+) + ((Af+Bg)^-, (Af_0+Bg_0)^-) + ((Af+Bg)^+, (Af_0+Bg_0)^+) = 0.$$

由于上式后两项之和为零,因而

$$(g^-, f_0^-) + (f^+, f_0^+) = 0.\tag{1.29}$$

由于 g, f 可在 $\mathscr{D}$ 中任意地并且独立地选取,由 (1.29) 可见,只有 $f_0 = g_0 = 0$．这就是说,$G(T)$ 是非退化的.

如果讨论的不是一般的完备的不定度规空间，而是 Π_K 空间，那末“$G(T)$ 是完备子空间”这个条件就可去掉．为此,我们先证明一个引理.

引理 1.8 设 $(\Pi, (\cdot,\cdot))$, $(\Pi', (\cdot,\cdot)')$ 是两个完备的不定

---

1) 计算时利用了如下事实：如果 $A = V\rho$ 是 Hilbert 空间上稠定闭算子的极分解,那末 $A^* = \rho V^*$.

度规空间，T 是 Π 到 Π' 的稠定闭线性算子. 那末下面三者等价.

(i) $G(T)$ 是 $(\Pi \times \Pi', ((\cdot, \cdot)))$ 退化子空间.

(ii) $-1 \in \sigma_p(T^\dagger T)$.

(iii) $-1 \in \sigma_p(TT^\dagger)$.

而当 (i)—(iii) 中有一个成立时，如记 $T^\dagger T, TT^\dagger$ 相应于-1的特征子空间分别为 E, F，那末T便是E到F的双射，而逆映射正是 $T^\dagger$，并且对任何 $x, y \in E$，

$$-(Tx, Ty)' = (x, y). \tag{1.30}$$

这个引理是明显的. 证明略.

定理 1.9 设 T 是 Π_K 上稠定闭线性算子，那末 $T^\dagger T, TT^\dagger$ 必都是自共轭算子，并且 $T^\dagger T$ 和 $TT^\dagger$ 的负特征值分别都不超过 $2K$ 个.

证 首先注意，如果 $G(T)$ 是 $\Pi_K \times \Pi_K'$ 的非退化（从而是完备的）子空间. 由定理 1.7 就得到 $T^\dagger T, TT^\dagger$ 都是自共轭算子.

对于一般的情况，可考虑 $\lambda T(\lambda \in \mathbf{C})$. 由于 $(\lambda T)^\dagger(\lambda T) = |\lambda|^2 T^\dagger T$，所以只要能证明存在非零 $\lambda_0 \in \mathbf{C}$，使得 $G(\lambda_0 T)$是非退化的，就能得到 $|\lambda_0|^2 T^\dagger T$ 是自共轭，从而 $T^\dagger T$ 也就是自共轭的. 为此，根据引理 1.8，只要能 $T^\dagger T$ 的负特征值只有有限个就可以了.

现在证明 $T^\dagger T$ 的负特征值最多不超过 $2K$ 个. 设 λ 是 $T^\dagger T$ 的一个负特征值，那末

$$-1 \in \sigma_p((|\lambda|^{-\frac{1}{2}}T)^\dagger(|\lambda|^{-\frac{1}{2}}T)). \tag{1.31}$$

根据引理 1.8，对任何 $x \in \Phi_{\lambda 1}(T^\dagger T)$，向量 $\{x, |\lambda|^{-\frac{1}{2}}Tx\}$ 是零性向量，并且 $Tx \in \Phi_{\lambda 1}(TT^\dagger)$. 而 $L_\lambda = \{\{x, |\lambda|^{-\frac{1}{2}}Tx\} | x \in \Phi_{\lambda 1}(T^\dagger T)\}$ 是 $(\Pi \times \Pi, ((\cdot, \cdot)))$ 上零性子空间. 再对对称算子 $T^\dagger T, TT^\dagger$ 分别应用定理 1.6 的 (i) 和引理 1.5，立即得到对任何不同的负特征 λ, μ，

$$\Phi_\lambda(T^\dagger T) \perp \Phi_\mu(T^\dagger T), \quad \Phi_\lambda(TT^\dagger) \perp \Phi_\mu(TT^\dagger), \tag{1.32}$$

并且 $\{\Phi_\lambda(T^\dagger T) | \lambda \in \sigma_p(T^\dagger T)\}$ 是线性无关子空间族. 从而（利用 (1.32) 直接计算）

$$L_\lambda \perp L_\mu \quad (\lambda \neq \mu), \tag{1.33}$$

并且 $\{L_\lambda | \lambda \in \sigma_p(T^\dagger T), \lambda < 0\}$ 是一族线性无关子空间。所以

$$\sum_{\substack{\lambda \in \sigma_p(T^\dagger T) \\ \lambda < 0}} \dim L_\lambda \leqslant 2K. \tag{1.34}$$

由 (1.34) 易知 $T^\dagger T$ 的负特征值最多只有 $2K$ 个。

类似地可以证明定理中有关 $TT^\dagger$ 的结论。证毕。

下面举例说明 $2K$ 这个值是可达的。

例 1.3 设 $\Pi = H_- \oplus H_+$, $\dim H_\pm = K$. 又设 $e_1^\pm, \cdots, e_K^\pm$ 分别是 $(H_\pm, \pm(\cdot,\cdot))$ 的直交基. 将 $e_i^\pm (i = 1, 2, \cdots, K)$ 按下列顺序排列: $e_1^-, e_1^+, \cdots, e_K^-, e_K^+$. 在此顺序下，假设算子 T 可表示成下列矩阵

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 2i & & & & O \\ i & 0 & 3i & & & \\ & 2i & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & 2Ki \\ O & & & & (2K-1)i & 0 \end{pmatrix},$$

易知

$$T^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & i & & & & \\ 2i & 0 & 2i & & O & \\ & 3i & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & O & & & 0 & (2k-1)i \\ & & & & 2Ki & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^\dagger T = \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & -2\cdot 2^2 & & & & \\ & & -2\cdot 3^2 & & O & \\ & & & \ddots & & \\ & O & & & -2(2K-1)^2 & \\ & & & & & -(2K)^2 \end{pmatrix}.$$

只要 K 取为奇数，$T^\dagger T$ 的负特征值就是 $-1, -2\cdot 2^2, \cdots, -2(2K-$

$1)^2, -(2K)^2$ 等 $2K$ 个.

§2 保距算子和酉算子

1. 保距算子

定义 2.1 设 V 是不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 到不定度规空间 $(\Pi', (\cdot, \cdot)')$ 的线性算子, $\mathscr{D}(V) \subset \Pi$. 如果满足

$$(Vx, Vy)' = (x, y), \quad x, y \in \mathscr{D}(V), \tag{2.1}$$

则称 V 为 Π 到 Π' 的保距算子; 如果 $\mathscr{D}(V) = \Pi$, 并且 V 是 Π 到 Π' 的保距算子, 则称 V 是 Π 上的半酉算子.

首先注意, 不定度规空间上保距算子不象普通 Hilbert 空间上保距算子那样必是单射.

例 2.1 设 $\Pi = \Pi'$ 是不定度规空间, Z 是 Π 的零性子空间. 在 Z 上作算子

$$V: x \longmapsto 0, \ x \in Z.$$

显然, V 是 Π 上保距算子, $\mathscr{D}(V) = z$, 但不是单射.

引理 2.1 设 V 是不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 到 $(\Pi', (\cdot, \cdot)')$ 的保距算子. 下列命题成立.

(i) 如果 $\mathscr{D}(V)$ 是非退化的, 那末 V 必是单射.

(ii) 如果 $\mathscr{R}(V)$ 是非退化的, 那末当 $x \in \mathscr{D}(V) \cap \mathscr{D}(V)^{\perp}$ 时, $Vx = 0$.

证 (i) 如果不对, 必有非零 $x \in \mathscr{D}(V)$, 使得 $Vx = 0$. 从而对任何 $y \in \mathscr{D}(V)$,

$$(x, y) = (Vx, Vy) = 0, \tag{2.2}$$

即 $x \perp \mathscr{D}(V)$. 从而与 $\mathscr{D}(V)$ 非退化的假设相矛盾.

(ii) 是显然的, 证略.

定理 2.2 设 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$, $(\Pi', (\cdot, \cdot)')$ 是两个完备的不定度规空间, V 是 Π 到 Π' 的保距算子, 如果 $\mathscr{R}(V)$ 是 Π' 的完备子空间, 那末 V 必是连续的.

证 令 $Z = \mathscr{D}(V) \cap \mathscr{D}(V)^{\perp}$, 因为 $Z \perp \mathscr{D}(V)$, 所以 $VZ \perp$

$\mathscr{R}(V)$。由于 $\mathscr{R}(V)$ 是非退化的，所以 $VZ=\{0\}$，即 $Z\subset\mathscr{N}(V)$. 反之，对任何 $x\in\mathscr{N}(V)$，由 (2.2) 就可得到 $x\in Z$，从而

$$\mathscr{D}(V)\cap\mathscr{D}(V)^{\perp}=Z=\mathscr{N}(V). \tag{2.3}$$

设 $\mathscr{R}(V)=N\oplus P$ 是完备子空间 $\mathscr{R}(V)$ 的一个正则分解，N,P 分别是 $\mathscr{R}(V)$（从而是 Π'）的负、正完备子空间（见第一章推论 3.14 的 (ii)）. 利用 (2.3) 易知存在 $\mathscr{D}(V)$ 中的负、正子空间 D_-, D_+，使得

$$\mathscr{D}(V)=D_-\oplus Z\oplus D_+, \tag{2.4}$$

$$V(D_-\oplus Z)=N,\ V(D_+\oplus Z)=P. \tag{2.5}$$

其实，V 是 D_- 到 N, D_+ 到 P 的双射.

今证 $(D_-,-(\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间。事实上，$(N,-(\cdot,\cdot)')$ 是 Hilbert 空间，$(D_-,-(\cdot,\cdot))$ 是内积空间，而 V 是 $(N,-(\cdot,\cdot)')$ 到 $(D_-,-(\cdot,\cdot))$ 的酉算子，所以 $(D_-,-(\cdot,\cdot))$ 必是 Hilbert 空间。

同样可证 $(D_+,(\cdot,\cdot))$ 也是 Hilbert 空间.

因为 $\mathscr{R}(V)$ 是完备子空间，对于分解 $\mathscr{R}(V)=N\oplus P$, 有正则分解 $\Pi'=H_-\oplus H_+$，使得 $H_-\supset N$, $H_+\supset P$. 由这个正则分解导出的范数为 $\|\cdot\|'$. 另一方面，根据第一章引理 4.16，存在分解

$$\overline{D}_-=D'_-\oplus Z_-,\overline{D}_+=D'_+\oplus Z_+, \tag{2.6}$$

其中 D'_-, D'_+ 都是 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 的完备子空间. 显然，$D'_-\perp D'_+$, Z_-, Z_-, Z 彼此直交，并且零性子空间 Z_-+Z_++Z 是完备子空间 $(D'_-\oplus D'_+)^{\perp}$ 的线性子空间。令 $(D'_-\oplus D'_+)^{\perp}=H'_-\oplus H'_+$ 是正则分解，那末，

$$\Pi=(H'_-\oplus D'_-)\oplus(H'_+\oplus D'_+) \tag{2.7}$$

便是 Π 的一个正则分解，由它导出的范数为 $\|\cdot\|$。

现在证明 V 是 $(\Pi,\|\cdot\|)$ 到 $(\Pi',\|\cdot\|')$ 的连续算子. 任取 $x\in\mathscr{D}(V)$，根据 (2.4)，x 必可唯一地表示成 $x=x_-+z+x_+$, $x_\pm\in D_\pm$, $z\in Z$，再由 (2.6)，又分别有下列分解

$$x_-=x'_-+z_-,\ x'_-\in D'_-,\ z_-\in Z_-;$$

(2.8)

$$x_+ = x'_+ + z_+,\ x'_+ \in D'_+,\ z_+ \in Z_+. \tag{2.8}$$

根据正则分解 (2.7)，易知对 $x = x'_- + z_- + z + z_+ + x'_+$，有

$$\|x\|^2 = \|x'_-\|^2 + \|x'_+\|^2 + \|z_- + z + z_+\|^2. \tag{2.9}$$

再在正则分解 $\Pi' = H_-\oplus H_+$ 之下计算 $\|Vx\|'^2$.

$$\begin{aligned}\|Vx\|'^2 &= \|Vx_- + Vz + Vx_+\|'^2 = \|Vx_- + Vx_+\|'^2\\ &= -(Vx_-, Vx_-)' + (Vx_+, Vx_+)'\\ &= -(x_-, x_-) + (x_+, x_+)\\ &= -(x'_- + z_-, x'_- + z_-) + (x'_+ + z_+, x'_+ + z_+)\\ &= -(x'_-, x'_-) + (x'_+, x'_+) = \|x'_-\|^2 + \|x'_+\|^2 \leqslant \|x\|^2,\end{aligned} \tag{2.10}$$

即 V 是定义在 $\mathscr{D}(V)$ 上的连续算子[1]. 证毕.

定理 2.2 中假设"$\mathscr{R}(V)$ 是 Π 的完备子空间"这个条件是不能换成"$\mathscr{R}(V)$ 是闭（甚至是非退化的闭）线性子空间"的. 下面便是一例.

例 2.2 设 $\Pi = H_-\oplus H_+$, $H_\pm = L^2[0, 1]$, A 是 $L^2[0, 1]$ 上乘自变量算子，显然 L_A 是极大负闭的（但不是完备的）线性子空间. 令 $\mathscr{D} = \{\sqrt{1-t^2}f(t) \mid f(t) \in L^2[0, 1]\}$，作 $\mathscr{D}$ 到 L_A 的算子

$$V: \sqrt{1-t^2}f(t) \longmapsto \{f(t),\ tf(t)\}; \tag{2.11}$$

视 $\mathscr{D}$ 为 H_- 的线性子空间，易知 V 是 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上的保距算子，并且是 $\mathscr{D}$ 到 L_A 的双射. 在正则分解 $\Pi = H_-\oplus H_+$ 之下所导出的范数记为$\|\cdot\|$，按这个正则分解计算 $\sqrt{1-t^2}f(t)$ 以及 $V\sqrt{1-t^2}f(t)$的范数，易知

$$\left\|\sqrt{1-t^2}f(t)\right\|^2 = \int_0^1 (1-t^2)|f(t)|^2 dt, \tag{2.12}$$

$$\left\|V\sqrt{1-t^2}\,f(t)\right\|^2 = \int_0^1 (1+t^2)|f(t)|^2 dt. \tag{2.13}$$

显然，必存在 $L^2[0, 1]$ 中一列 $\{f_n\}$，使得 $\|\sqrt{1-t^2}f_n(t)\| \to 0$，但 $\|V\sqrt{1-t^2}f_n(t)\| \not\to 0$，即 V 不是连续的.

对于 Π_K 空间，定理 2.2 的条件是可以改进的.

---

1) 如果 Π, Π' 是同一空间，由于两个范数$\|\cdot\|'$, $\|\cdot\|$是等价的，所以 V 是连续的.

定理 2.3 设 V 是 $(\Pi_K, (\cdot, \cdot))$ 到 $(\Pi_{K'}, (\cdot, \cdot)')$ 的保距算子，$\mathscr{D}(V)\subset\Pi_K$. 如果 $\overline{\mathscr{R}(V)}$ 是非退化的，那末 V 是连续的.

证 由于 $\overline{\mathscr{R}(V)}$ 非退化，所以 $\mathscr{R}(V)$ 也是非退化的. 根据第一章定理 5.8,

$$\mathscr{R}(V) = N\oplus P_0, \quad \overline{\mathscr{R}(V)} = N\oplus \bar{P}_0. \tag{2.14}$$

P_0, $\bar{P}_0$ 分别是 $\mathscr{R}(V)$, $\overline{\mathscr{R}(V)}$ 中的正子空间、正闭子空间. 由于 $\overline{\mathscr{R}(V)} = N\oplus \bar{P}_0$ 是完备子空间，必有正则分解 $\Pi_{K'} = H_-\oplus H_+$，使得 $H_-\supset N, H_+\supset \bar{P}_0$. 这个正则分解所产生的范数记为 $\|\cdot\|'$.

任取 $\mathscr{D}(V)$ 中负子空间 D_-，使得 $VD_- = N$（这种 D_- 是可以取到的）. 显然，$\dim D_- = \dim N$，由此可知 D_- 必是 $\mathscr{D}(V)$ 中极大负子空间（否则，由于 V 将负向量映射成负向量，$\mathscr{R}(V)$ 中极大负子空间维数就大于 $\dim N$ 了）. 根据第一章定理 5.8 的 (i)，有分解

$$\mathscr{D}(V) = D_-\oplus Z\oplus D_+,$$

其中 $Z = \mathscr{D}(V)\cap\mathscr{D}(V)^{\perp}$, D_+ 是正子空间. 下面就和定理 2.2 的证明一样，引入 (2.6), (2.7); 在 Π_K 上按 (2.7) 产生范数 $\|\cdot\|$，从而有 (2.9) 和 (2.10). 证毕.

容易举例说明定理 2.3 中条件"$\overline{\mathscr{R}(V)}$ 是非退化的"是不能去掉的.

推论 2.4 设 V 是 Π_K 上的保距算子，$\mathscr{D}(V)\subset\Pi_K$.

(i) 如果 $\mathscr{R}(V)$（或 $\mathscr{D}(V)$）中含有 K 维负子空间（特别是 $\mathscr{R}(V)$ 或 $\mathscr{D}(V) = \Pi_K$），那么 V 是连续的;

(ii) 如果 $\mathscr{R}(V) = N\oplus Z\oplus P$, $\mathscr{D}(V) = D_-\oplus D_0\oplus D_+$，其中 P, D_+ 都是正闭子空间，N, D_- 都是负子空间，Z, D_0 都是零性子空间，并且 $N = VD_-$, $P = VD_+$，那末 V 是连续的.

证 (i) 当 $\mathscr{D}(V)$ 中含有 K 维负子空间时，$\mathscr{R}(V)$ 中也必含 K 维负子空间，所以 $\mathscr{R}(V)$ 必不退化. 同理，$\overline{\mathscr{R}(V)}$ 也是非退化的，由定理 2.3，V 是连续的.

(ii) 显然，$Z = VD_0$. 先视 V 是 $D_-\oplus D_+\to N\oplus P$ 的线性算子，并且保距. 由于 $N\oplus P$ 是非退化的，所以 V 在 $D_-\oplus D_+$ 上连续;

而 D_0 是有限维空间，所以 V 在 D_0 上也是连续的。再注意到

$$\Pi_K = (D_- \oplus D_+) \oplus (D_- \oplus D_+)^{\perp},\ D_0 \subset (D_- \oplus D_+)^{\perp},$$

而 $(D_- \oplus D_+)^{\perp}$ 是完备子空间，从而 Π_K 上的拓扑正是 $(D_- \oplus D_+)$，$(D_- \oplus D_+)^{\perp}$ 的拓扑的乘积拓扑。因而 V 在 $\mathscr{D}(V) = D_- \oplus D_+ \oplus D_0$ 上连续，证毕。

推论 2.4 的 (ii) 中要求 V 把闭线性子空间 D_+ 映成闭射性子空间 P 这个条件一般是去不掉的。下面举例说明，即使 $\mathscr{D}(V)$，$\mathscr{R}(V)$ 都是闭的，并且 V 是单射，但 V 仍可以是无界的。

例 2.3 设 $\Pi_1 = H_- \oplus H_+$，e^- 是 H_- ($\dim H_- = 1$) 的单位向量，$\{e_i^+\}$ 是 $(H_+, (\cdot,\cdot))$ 完备就范直交系。令 $z = e^- + e_1^+$，$\mathscr{R} = \{x + f(x)z \mid x \in H_+ \ominus \mathrm{span}\{e_1^+\}\}$，其中 f 是 $H_+ \ominus \mathrm{span}\{e_1^+\}$ 上无界线性泛函。显然 $z \bar{\in} \mathscr{R}$，作线性算子 V 如下：

$$V:\quad x \longmapsto f(x)z + x,\ x \in H_+ \ominus \mathrm{span}\{e_1^+\},$$

$$z \longmapsto z. \tag{2.15}$$

记 $Z = \mathrm{span}\{z\}$，显然 $\mathscr{R}(V) = Z \oplus \mathscr{R} = Z \oplus (H_+ \ominus \mathrm{span}\{e_1^+\})$，并且是闭线性子空间。又显然 $\mathscr{D}(V) = Z \oplus (H_+ \ominus \mathrm{span}\{e_1^+\}) = \mathscr{R}(V)$，并且 V 是单射。因为 f 是无界的，所以存在 $H_+ \ominus \mathrm{span}\{e_1^+\}$ 的点列 $\{x_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，但 $\lim\limits_{n\to\infty} Vx_n = z$。所以 V 不连续。

推论 2.5 Π_K 上半酉算子必是单射，并且它和它的逆算子都是连续的。

证 从引理 2.1 的 (i) 知道，Π_K 上半酉算子必是单射。再由推论 2.4 的 (i)，半酉算子以及它的逆算子都是连续的。

容易举例说明在一般的完备的不定度规空间 Π 上，推论 2.5 不再成立。

为了得到保距算子的连续性，对于一般完备的不定度规空间，定理 2.2 的主要条件是"$\mathscr{R}(V)$ 是完备子空间"；对于 Π_K 空间，定理 2.3 的主要条件是"$\overline{\mathscr{R}(V)}$ 是非退化的"。下面举例说明，对于完备的不定度规空间，定理 2.2 中条件是不能换成"$\overline{\mathscr{R}(V)}$ 是完备子空间"的。

例 2.4 设 Π，$\mathscr{D}$，A 如例 2.2，作 $\mathscr{D}_- \oplus \mathscr{D}_+$ ($\mathscr{D}_\pm = \mathscr{D}$) 到

$L_A \oplus L_{A^*}$ 的线性算子 V 如下:

$$V:\quad \sqrt{1-t^2}f(t) \longmapsto \{f(t),\ tf(t)\},\ \sqrt{1-t^2}f(t) \in \mathscr{D}_-,$$

$$\sqrt{1-t^2}g(t) \longmapsto \{tg(t),\ g(t)\},\ \sqrt{1-t^2}g(t) \in \mathscr{D}_+.$$

显然,V 是保距算子,而且 $\overline{\mathscr{R}(V)} = \Pi$. 但例 2.2 中已经证明它是无界的.

推论 2.5 说明 Π_K 空间上半酉算子 (即定义在全空间 Π_K 的保距算子) 必连续. 然而一般完备的不定度规空间上半酉算子未必是连续的. 我们可以利用定理 2.2 得到如下结果.

推论 2.6 设 $(\Pi, (\cdot,\cdot))$, $(\Pi', (\cdot,\cdot)')$ 是两个完备的不定度规空间,V 是 Π 到 Π' 的保距算子. 如果 $\mathscr{D}(V)$ 是 Π 的完备子空间,而 $\mathscr{R}(V)$ 是 Π' 的闭线性子空间, 或者 $\overline{\mathscr{R}(V)}$ 是非退化的, 那末 V 必是连续的.

证 因为 $\mathscr{D}(V)$ 是非退化的,所以 V 必是单射. 显然 V^{-1} 是 Π' 到 Π 的保距算子. 但 $\mathscr{R}(V^{-1}) = \mathscr{D}(V)$ 是完备子空间, 所以 V^{-1} 是连续的. 但因为 $\mathscr{D}(V^{-1}) = \mathscr{R}(V)$ 是闭线性子空间 (因而它可以视为 Banach 空间),由逆算子定理可知 V 是连续的.

当 $\overline{\mathscr{R}(V)}$ 是非退化时, 显然, 我们只要证明这时必有 $\mathscr{R}(V) = \overline{\mathscr{R}(V)}$ 即可. 事实上,因为 V^{-1} 连续, 所以 V^{-1} 可连续地延拓成 $\overline{\mathscr{R}(V)}$ 到 $\mathscr{D}(V)$ (因为 $\mathscr{D}(V)$ 是完备子空间) 的保距算子 $\tilde{V}^{-1}$.但是 $\mathscr{D}(\tilde{V}^{-1}) = \overline{\mathscr{R}(V)}$ 是非退化的,所以 $\tilde{V}^{-1}$ 是单射; 又因为 $\mathscr{R}(\tilde{V}^{-1}) = \mathscr{D}(V) = \mathscr{R}(V^{-1})$, 所以 $V^{-1} = \tilde{V}^{-1}$. 从而 $\mathscr{R}(V) = \mathscr{D}(V^{-1}) = \mathscr{D}(\tilde{V}^{-1}) = \overline{\mathscr{R}(V)}$. 证毕.

下面举一个例子说明定义在全空间的保距算子 V. 如果值域 $\mathscr{R}(V)$ 不闭(即使是非退化的),就有可能是不连续的.

例 2.5 设 $\Pi = l_- \oplus l_+$, $l_\pm = l^2$, $\{e_i^\pm\}$ 分别是 $l_\pm$ 的完备就范直交系, $z = e_1^- + e_1^+$, $V_\pm$ 分别是 $l_\pm$ 在基 $\{e_i^\pm\}$ 下的单向平移 (即满足 $V_\pm e_i^\pm = e_{i+1}^\pm$, $i \geqslant 1$). 作定义在整个 Π 上的线性算子 V:

$$V:\quad x_- \longmapsto V_- x_-,\qquad x_- \in l_-;$$

$$x_+ \longmapsto V_+ x_+ + f(x_+)z,\ x_+ \in l_+.$$

其中 f 是全空间 l_+ 上定义的无界线性泛函, 显然, V 是定义在全

空间的保距算子．由于 f 是无界的，所以 V 不是连续的．注意，$\mathscr{R}(V)=(l_-\ominus\text{span}\{e_1^-\})\oplus\{V_+x_++f(x_+)z\,|\,x_+\in l_+\}$ 还是一个非退化的线性子空间．

类似于本章§1 有关对称算子的定理 1.6，保距算子也有如下定理．

定理 2.7 设 V 是完备的不定度规空间 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上保距算子．

(i) 如果 $\lambda,\mu\in\sigma_p(V)$，并且 $\lambda\bar{\mu}\neq 1$，那末

$$\overline{\Phi_\lambda(V)}\perp\overline{\Phi_\mu(V)}. \tag{2.16}$$

(ii) 如果 $\lambda\in\sigma_p(V)$，$|\lambda|\neq 1$，那末 $\overline{\Phi_\lambda(V)}$ 是零性闭子空间．

(iii) 特别是当 $\Pi=\Pi_K$ 时，那末 V 在闭单位圆外（或开单位圆内）的特征值的个数不超过 K，若用 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,l)$ 表示闭单位圆外（或开单位圆内）的特征值，则有

$$\dim(\Phi_{\lambda_1}(V)\oplus\Phi_{\lambda_2}(V)\oplus\cdots\oplus\Phi_{\lambda_l}(V))=\sum_{i=1}^{l}\dim\Phi_{\lambda_i}(V)\leqslant K. \tag{2.17}$$

证 (i) 和对称算子情况相仿，只要证明 $\Phi_\lambda(V)\perp\Phi_\mu(V)$．对任何 $x,y\in\mathscr{D}(V)$，

$$(x,y)=(Vx,Vy)=((V-\lambda I)x,(V-\mu I)y)+\lambda(x,(V-\mu I)y)+\bar{\mu}((V-\lambda I)x,y)+\lambda\bar{\mu}(x,y). \tag{2.18}$$

尤其当 $x\in\Phi_{\lambda 1}(V)$，$y\in\Phi_{\mu 1}(V)$ 时，由 (2.18) 立即可得

$$(x,y)=\lambda\bar{\mu}(x,y). \tag{2.19}$$

由于 $\lambda\bar{\mu}\neq 1$，所以 $(x,y)=0$，从而 $\Phi_{\lambda 1}(V)\perp\Phi_{\mu 1}(V)$．

假设对自然数 m，只要 $l'+l\leqslant m$，$\Phi_{\lambda l}(V)\perp\Phi_{\mu l'}(V)$．今证 $l+l'=m+1$ 时，$\Phi_{\lambda l}(V)\perp\Phi_{\mu l'}(V)$．事实上，如果 $x\in\Phi_{\lambda l}(V)$，$y\in\Phi_{\mu l'}(V)$，那末等式 (2.18) 中右边的第一，二，三项均是零，从而 (2.19) 成立．再利用 $\lambda\bar{\mu}\neq 1$，就得 $\Phi_{\lambda l}(V)\perp\Phi_{\mu l'}(V)$ 对 $l+l'=m+1$ 成立．由此可得 $\Phi_\lambda(V)\perp\Phi_\mu(V)$．

(ii) 特别当 $|\lambda|>1$ 时，显然 $\lambda\cdot\bar{\lambda}\neq 1$，从而 $\overline{\Phi_\lambda(V)}$ 是零性闭子空间．

(iii) 根据本章引理 1.5 和本定理的 (i),(ii),$\{\Phi_\lambda(V)\,|\,|\lambda|>1, \lambda\in\sigma_p(V)\}$ 必是一族线性无关子空间，而且是彼此直交的零性子空间。由此可知，V 在闭单位圆外的特征值个数不超过 K，并且 (2.17) 成立。

有关开单位圆内的结论类似可得。证毕。

2. 酉算子

定义 2.2 设 U 是不定度规空间 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 到不定度规空间 $(\Pi',(\cdot,\cdot)')$ 的保距算子。如果 $\mathscr{D}(U)=\Pi$, $\mathscr{R}(U)=\Pi'$，那末称 U 是 Π 到 Π' 的酉算子，特别是当 $\Pi=\Pi'$ 时，则简称 U 为 Π 上酉算子。

定理 2.8 设 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$, $(\Pi',(\cdot,\cdot)')$ 是两个完备的不定度规空间。下列命题成立。

(i) Π 到 Π' 的酉算子必是有界的，而且 U^{-1} 是 Π' 到 Π 的酉算子。

(ii) 全空间 Π 上定义的到 Π' 的线性算子 U 是 Π 到 Π' 的酉算子的充要条件为下列二者之一。

(*a*) U 是单射，并且 $\mathscr{D}(U^{-1})=\Pi'$, $U^{-1}=U^\dagger$。

(*b*) $UU^\dagger=I$[1], $U^\dagger U=I$[1]。

(iii) 当 U 是 Π 上酉算子时，诸有下列性质:

(*a*) $\sigma(U)$ 关于单位圆周对称，即当 $\lambda\in\sigma(U)$ 时，$\frac{1}{\bar{\lambda}}\in\sigma(U)$[2]。

(*b*) 如果 λ, $\mu\in\sigma_p(U)$ 且 $\lambda\bar{\mu}\neq 1$，那末 $\overline{\Phi_\lambda(U)}\perp\overline{\Phi_\mu(U)}$。

(*c*) 当 $\lambda\in\sigma_p(U)$, $|\lambda|\neq 1$ 时，$\Phi_\lambda(U)$ 是零性子空间。$\{\Phi_\lambda(U)\,|\,|\lambda|>1, \lambda\in\sigma_p(U)\}$ ($\{\Phi_\lambda(U)\,|\,|\lambda|<1, \lambda\in\sigma_p(U)\}$) 是一族线性无关子空间。

(*d*) 当 $\Pi=\Pi_K$ 时，集 $\{\lambda\,|\,\lambda\in\sigma_p(U), |\lambda|\neq 1\}$ 最多只有 $2K$

---

1) 严格地说，这里应是 $UU^\dagger=I_{\Pi'}$, $U^\dagger U=I_\Pi$. $I_{\Pi'}$,I_Π 分别是单位算子，下标 Π',Π 省掉了．在容易混淆的地方，我们才将下标附上．

2) 对于 Π_K 上酉算子，进一步还有 $\sigma_p(U)$ 关于单位圆周对称 (见本章 §4 推论 4.10)．

个点。对任何 $\lambda_1, \cdots, \lambda_l \in \sigma_p(U)$, $|\lambda_i| > 1$ (或 $|\lambda_i| < 1$) $i = 1, 2, \cdots$, 必有

$$\dim(\Phi_{\lambda_1}(U) \oplus \cdots \oplus \Phi_{\lambda_l}(U)) = \sum_{i=1}^{l} \dim\Phi_{\lambda_i}(U) \leqslant K. \quad (2.20)$$

证 (i) 根据定理 2.2, U 是连续的. 又因为 $\mathscr{D}(U) = \Pi$, 所以 U 是全空间上定义的有界线性算子.

又根据引理 2.1, 从 $\mathscr{D}(V) = \Pi$ 的非退化性可知, U 是单射, 易知 U^{-1} 是保距的, 从而 U^{-1} 是 Π' 到 Π 的酉算子.

(ii) 和通常 Hilbert 空间情况一样地加以证明. 证略.

(iii) 显然, 只要证明 (a) 即可, (b)—(d) 均可由定理 2.7 推出.

证明 (a): 由于

$$\begin{aligned}\sigma(U^{-1}) &= \sigma(U^{\dagger}) = \sigma(JU^*J)^{1)} = \sigma(JU^*J^{-1}) \\ &= \sigma(U^*) = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(U)\},\end{aligned} \quad (2.21)$$

但 $\sigma(U^{-1}) = \left\{\frac{1}{\lambda} \middle| \lambda \in \sigma(U)\right\}$. 因此 (a) 成立. 证毕.

§3 Cayley 变换, 对称算子的自共轭扩张

1. Cayley 变换 设 A 是不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上的线性算子. 如果 $\zeta (I_m\zeta \neq 0)$ 不是 A 的特征值, 那末 $(A - \zeta I)$ 便是 $\mathscr{D}(A)$ 到 $\mathscr{R}(A - \zeta I)$ 的双射. 和 Hilbert 空间情况一样, 称定义在 $\mathscr{R}(A - \zeta I)$ 上的线性算子

$$V = (A - \bar{\zeta} I)(A - \zeta I)^{-1} \quad (3.1)$$

是 A 的 Cayley变换. 如对 $x \in \mathscr{D}(A)$, 记 $y = (A - \zeta I)x$, 那末

$$Vy = (A - \bar{\zeta} I)x \quad (y = (A - \zeta I)x). \quad (3.2)$$

显然, V 是 $\mathscr{D}(V) = \mathscr{R}(A - \zeta I)$ 到 $\mathscr{R}(A - \bar{\zeta} I)$ 的满射.

当 $y \in \mathscr{D}(V)$ 时, 根据 (3.1) 和 (3.2),

$$(V - I)y = [(A - \bar{\zeta} I)(A - \zeta I)^{-1} - (A - \zeta I)(A -$$

1) 见本章 (1.4) 式, 另外, 本等式中最后两个等式是根据 Hilbert 空间中"两个酉等价算子有相同谱""共轭算子的谱是原算子谱的共轭"得到的.

$\bar{\zeta}I)^{-1}]y = (\zeta - \bar{\zeta})(A - \zeta I)^{-1}y = (\zeta - \bar{\zeta})x$,

所以 $V-I$ 是单射，并且 $\mathscr{R}(V-I) = \mathscr{D}(A)$。解方程(3.2)，得到

$$x = \frac{1}{\zeta - \bar{\zeta}}(V - I)y,\ Ax = \frac{1}{\zeta - \bar{\zeta}}(\zeta V - \bar{\zeta} I)y, \tag{3.3}$$

$$A = (\zeta V - \bar{\zeta} I)(V - I)^{-1}. \tag{3.4}$$

反之，如果先给定线性算子 V，并且 1 不是 V 的特征值(即 $V-I$ 是单射)。对任何 $\zeta(I_m\zeta \neq 0)$，称由(3.4)所作的算子 A 是 V 的 Cayley 变换。显然，ζ 不是 A 的特征值，并且(3.1)和(3.4)是互为逆变换。所以又称(3.4)(或(3.1))是(3.1)(或(3.4))的 Cayley 逆变换。

定理 3.1 设 A 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 的线性算子，并且 $\zeta(I_m\zeta \neq 0)$ 不是 A 的特征值。那末 A 为对称算子的充要条件是 A 的 Cayley 变换

$$V = (A - \bar{\zeta} I)(A - \zeta I)^{-1} \tag{3.1}$$

是满足 $\overline{\mathscr{R}(V-I)} = \Pi$ 的保距算子。进一步，$\bar{\zeta}$ 也不是 A 的特征值的充要条件是 V 是单射。

证 必要性 因为 $\zeta \bar{\in} \sigma_p(A)$，从(3.1)易知 $1 \bar{\in} \sigma_p(V)$，并且 $\mathscr{R}(V-I) = \mathscr{D}(A)$。由于 A 是稠定的，所以 $\overline{\mathscr{R}(V-I)} = \Pi$。

对任何 $y \in \mathscr{D}(V)$，存在唯一的 $x \in \mathscr{D}(A)$，使得 $y = (A - \zeta I)x$。利用 $(Ax, x) = (x, Ax)$，我们有

$$\begin{aligned}(Vy, Vy) &= ((A - \bar{\zeta} I)x, (A - \bar{\zeta} I)x) \\ &= ((A - \zeta I)x, (A - \zeta I)x) = (y, y).\end{aligned} \tag{3.5}$$

注意 (Vy, Vy)，(y, y') 都是 $y, y'(\in \mathscr{D}(V))$ 的双线性泛函，从而由(3.5)立即有

$$(Vy, Vy') = (y, y'),\quad y, y' \in \mathscr{D}(V),$$

即 V 是保距的。

充分性 首先证明由假设 $\overline{\mathscr{R}(V-I)} = \Pi$ 必可得到 $1 \bar{\in} \sigma_p(V)$。事实上，如果有非零 x，使得 $(V-I)x = 0$。那末对任何 $y \in \mathscr{D}(V)$，利用保距性，

$$(x,y)=(Vx,Vy)=(x,Vy),\quad y\in\mathscr{D}(V),$$
即对任何 $y\in\mathscr{D}(V)$，$(x,(V-I)y)=0$. 但 $\overline{\mathscr{R}(V-I)}=\Pi$，所以 $x=0$. 这与假设 x 是非零向量相矛盾.

利用 $1\bar{\in}\sigma_p(V)$，$\overline{\mathscr{R}(V-I)}=\Pi$，由 (3.4) 所作的 A 就是稠定线性算子. 对于任何 $x\in\mathscr{D}(A)$，必存在 $y\in\mathscr{D}(V)$，使得 $(V-I)y=x$. 从而

$$\begin{aligned}(Ax,x)&=((\zeta V-\bar{\zeta}I)y,(V-I)y)\\&=((V-I)y,(\zeta V-\bar{\zeta}I)y)=(x,Ax),\end{aligned}$$

即 A 是对称算子.

进一步，当 $\bar{\zeta}$ 也不是 A 的特征值时，$A-\bar{\zeta}I$ 是单射，从 (3.1) 可知 V 是单射.

反之，如果 V 是单射. 从 (3.4) 可知

$$(A-\bar{\zeta}I)=(\zeta-\bar{\zeta})V(V-I)^{-1}$$

也是单射，即 $\bar{\zeta}$ 也不是 A 的特征值. 证毕.

定理 3.2 设 A 是完备的不定度规空间 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上线性算子，$\zeta,\bar{\zeta}(I_m\zeta\neq 0)$ 都不是 A 的特征值. 那末 A 为 Π 上自共轭算子的充要条件是，A 的 Cayley 变换 V 是满足 $\overline{\mathscr{D}(V)}=\overline{\mathscr{R}(V)}=\Pi$，$V^\dagger=V^{-1}$，并且不以 1 为特征值的保距算子.

证 必要性 因为 $\zeta,\bar{\zeta}\bar{\in}\sigma_p(A)$，$A^\dagger=A$，所以 $\overline{\mathscr{R}(A-\bar{\zeta}I)}=\Pi=\overline{\mathscr{R}(A-\zeta I)}$. 再根据 V 的定义 (3.1) 式，

$$\overline{\mathscr{R}(V)}=\overline{\mathscr{R}(A-\bar{\zeta}I)}=\Pi=\overline{\mathscr{R}(A-\zeta I)}=\overline{\mathscr{D}(V)},$$

从而 $V^\dagger$ 存在，而 V 的保距性以及 $1\bar{\in}\sigma_p(V)$ 等都是定理 3.1 的推论.

现在证明 $V^\dagger=V^{-1}$. 从 (3.4) 得到

$$A=\zeta I+(\zeta-\bar{\zeta})(V-I)^{-1},\tag{3.6}$$

由于 $\mathscr{D}((V-I)^{-1})=\mathscr{R}(V-I)=\mathscr{D}(A)$，所以 $(V-I)^{-1}$ 的共轭算子存在. 根据引理 1.4 的 (v)，(iii)，$(V-I)^{-1\dagger}=[(V-I)^\dagger]^{-1}=(V^\dagger-I)^{-1}$. 利用这一事实，从 (3.6) 就得到

$$A^\dagger=\bar{\zeta}I+(\bar{\zeta}-\zeta)(V^\dagger-I)^{-1}.\tag{3.7}$$

因为 $A^\dagger=A$，对照 (3.6)，(3.7) 就有

$$I + (V - I)^{-1} = -(V^{\dagger} - I)^{-1}. \tag{3.8}$$

由于 $1\bar{\in}\sigma_p(V)$,所以 $1\bar{\in}\sigma_p(V^{-1})$,因此 $(V-I)^{-1}=[(I-V^{-1})V]^{-1}$,

$$I + (V - I)^{-1} = I + V^{-1}(I - V^{-1})^{-1}$$

$$= [(I - V^{-1}) + V^{-1}](I - V^{-1})^{-1} = (I - V^{-1})^{-1}, \tag{3.9}$$

从而 $(I - V^{-1})^{-1} = -(V^{\dagger} - I)^{-1}$, 这样就得到 $V^{-1} = V^{\dagger}$.

充分性　首先证明 $\overline{\mathscr{R}(V - I)} = \Pi$. 如果不对,那末由引理 1.4 的 (ix) 可知必存在非零向量 x,使得 $(V^{-1}-I)x=(V^{\dagger}-I)x=0$,即 1 是 V^{-1} 的特征值, 从而也是 V 的特征值. 这与假设冲突.

根据定理 3.1, V 的 Cayley 变换 $A = (\zeta V - \bar{\zeta} I)(V - I)^{-1}$是对称的,而 A 和 V 的关系又可表示成 (3.6), 从而 (3.7) 成立. 下面只要在等式 (3.9) 中利用假设 $V^{-1} = V^{\dagger}$, 就知道 (3.8) 成立. 再将等式 (3.8) 代入 (3.7),就得到 $A = A^{\dagger}$. 证毕.

注意　对于稠定保距算子 V, 由 $\overline{\mathscr{R}(V - I)} = \Pi$ 可以推出 $1\bar{\in}\sigma_p(V)$. 事实上,由 $\overline{\mathscr{R}(V-I)}=\Pi$ 可以得到 $\mathscr{N}(V^{\dagger}-I)=\{0\}$, 又由 $(Vx, Vy) = (x, y)$ $(x, y \in \mathscr{D}(V))$, 从而 $V^{\dagger}Vy = y(y \in \mathscr{D}(V))$. 如果有 $y_0 \in \mathscr{D}(V)$,使得 $Vy_0=y_0$,从而 $V^{\dagger}y_0=V^{\dagger}Vy_0=y_0$. 由此可知 $y_0 = 0$, 即 $1\bar{\in}\sigma_p(V)$. 但是一般不能由 $1\bar{\in}\sigma_p(V)$ 推出 $\overline{\mathscr{R}(V - I)} = \Pi$. 如果进一步假设 $V^{\dagger} = V^{-1}$,则可由 $1\bar{\in}\sigma_p(V)$ 推出 $\overline{\mathscr{R}(V - I)} = \Pi$. 事实上,如果 $\overline{\mathscr{R}(V - I)} \neq \Pi$,则存在 $z \neq 0$, 使得 $((V - I)x, z) = 0$ $(x \in \mathscr{D}(V))$, 即 $(V^{\dagger} - I)z = 0$, 从而 $(V - I)z = 0$. 这与假设 $1\bar{\in}\sigma_p(V)$ 矛盾.

推论 3.3　设 A 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 的线性算子, 并且 ζ, $\bar{\zeta}(I_m\zeta \neq 0)$ 都不是 A 的特征值. 那么, A 使得 $\mathscr{R}(A - \zeta I)$ 或 $\mathscr{R}(A - \bar{\zeta} I)$ 中有一个为闭线性子空间的自共轭算子的充要条件是, 它的 Cayley 变换 $V = (A - \bar{\zeta} I)(A - \zeta I)^{-1}$ 是酉算子,并且 1 不是 V 的特征值,或者 $\overline{\mathscr{R}(V - I)} = \Pi$.

证　必要性　因为 $\zeta, \bar{\zeta}\bar{\in}\sigma_p(A)$,所以

$$\overline{\mathscr{R}(A - \zeta I)} = \Pi = \overline{\mathscr{R}(A - \bar{\zeta} I)}.$$

如果 $\mathscr{R}(A - \bar{\zeta} I)$ 是闭的,那末 Π 上保距算子 V 就满足 $\overline{\mathscr{D}(V)} = \Pi = \mathscr{R}(V)$. 根据定理 2.2, V 是连续的, 因而 V 可唯一地延拓成

$\overline{\mathscr{D}(V)} = \Pi$ 上的保距算子 $\tilde{V}$. 因为 $\mathscr{D}(\tilde{V}) = \Pi$ 是非退化的，所以保距算子 $\tilde{V}$ 必是单射. 又因为 $\mathscr{R}(\tilde{V}) = \Pi = \mathscr{R}(V)$，所以只有 $V = \tilde{V}$，从而 $\mathscr{D}(V) = \Pi$. 这就是说，V 是酉算子. 而 $1 \bar{\in} \sigma_p(V)$ 或者 $\overline{\mathscr{R}(V - I)} = \Pi$，这是从对称算子的 Cayley 变换一般理论直接推出的.

同样，如果 $\mathscr{R}(A - \zeta I)$ 是闭的，那末 V 就是满足 $\mathscr{D}(V) = \Pi = \overline{\mathscr{R}(V)}$ 的保距算子. 这样，V^{-1} 便是满足 $\overline{\mathscr{D}(V^{-1})} = \Pi = \mathscr{R}(V^{-1})$ 的保距算子，根据上面已证明的结论，V^{-1} 是酉算子，从而 V 也是酉算子.

充分性 在定理 3.1 的充分性证明中，我们已经证明：保距算子 V，只要满足 $\overline{\mathscr{R}(V - I)} = \Pi$，必然有 $1 \bar{\in} \sigma_p(V)$. 而对于 $1 \bar{\in} \sigma_p(V)$ 的酉算子 V，显然它满足定理 3.2 中的条件：$\overline{\mathscr{D}(V)} = \overline{\mathscr{R}(V)} = \Pi$，$V^+ = V^{-1}$，因此 A 是自共轭算子，并且 $\mathscr{R}(A - \zeta I) = \mathscr{D}(V) = \Pi = \mathscr{R}(V) = \mathscr{R}(A - \bar{\zeta} I)$. 证毕.

推论 3.4 设 A 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上有界线性算子 $(\mathscr{D}(A) = \Pi)$，$\zeta \in \rho(A)$，$I_m \zeta \neq 0$. 那末 A 为自共轭算子的充要条件是，A 的 Cayley 变换 $V = (A - \bar{\zeta} I)(A - \zeta I)^{-1}$ 是酉算子，并且 $1 \in \rho(V)$.

推论 3.4 是显然的.

推论 3.5 设 A 是 Π_K 空间上稠定线性算子，$\zeta, \bar{\zeta}$ $(I_m \zeta \neq 0)$ 都不是 A 的特征值，那末 A 为自共轭算子的充要条件是，A 的 Cayley 变换 $V = (A - \bar{\zeta} I)(A - \zeta I)^{-1}$ 是酉算子，并且 1 不是 V 的特征值，或者 $\overline{\mathscr{R}(V - I)} = \Pi_K$.

证 按推论 3.3，显然我们只要证明 $\mathscr{R}(A - \zeta I)$ 或 $\mathscr{R}(A - \bar{\zeta} I)$ 中有一个是闭的就可以了.

其实我们可以更一般地证明下列命题.

引理 3.6 设 A 是 Π_K 空间上闭的对称算子，如果复数 ζ 的 $I_m \zeta$ 不是零，那末 $\mathscr{R}(A - \zeta I)$ 是闭的.

证 由于 $\overline{\mathscr{D}(A)} = \Pi_K$，所以 $\mathscr{D}(A) = N \oplus P_0$，其中 N 是 $\mathscr{D}(A)$

中某个K维负子空间，P_0是正子空间. 显然$\Pi_K = N \oplus \bar{P}_0$是正则分解.因为$(A-\zeta I)N$是有限维空间，所以只要证明$(A-\zeta I)P_0$是闭线性子空间就可以了.

不妨设ζ是纯虚数.记P_+是Π_K在$\bar{P}_0$上投影，$A_1 = P_+AP_+$. 对任何$x \in P_0$，

$$\begin{aligned}\|(A-\zeta I)x\|^2 &= \|(I-P_+)(A-\zeta I)x\|^2 + \|P_+(A-\zeta I)x\|^2 \\ &\geqslant \|(A_1-\zeta I)x\|^2 = (A_1x, A_1x) - \zeta(x, A_1x) - \bar{\zeta}(A_1x, x) + |\zeta|^2\|x\|^2.\end{aligned}$$

注意到$(A_1x, x) = (x, A_1x)$，ζ是纯虚数,则由上式可得

$$\|(A-\zeta I)x\| \geqslant |\zeta|\,\|x\|, \quad x \in P_0. \tag{3.10}$$

利用A是闭算子的假设，从(3.10)易知$(A-\zeta I)P_0$是闭线性子空间. 证毕.

关于Cayley变换中的条件,我们下面用实例加以说明.

先举例说明在完备的(甚至是可析的)不定度规空间中,存在对称算子,它的特征值是整个复平面.

例 3.1 令A_1是$L^2[0, 1]$上的微分算子$\frac{d}{dt}$，$\mathscr{D}(A_1)=\{f(t) \mid f(t)$全连续，$\frac{d}{dt}f(t) \in L^2[0, 1]\}$. 显然，对任何复数$\lambda$，函数$e^{\lambda t}$是$A_1$相应于$\lambda$的特征向量，所以$\sigma_p(A_1)$是整个复平面. 由于$A$是稠定闭算子,所以$A_1^*$也是$L^2[0,1]$上稠定算子.

取$\Pi = H_- \oplus H_+$，$H_\pm = L^2[0,1]$. 对于任何$f \in L^2[0,1]$，当把f视为$H_\pm$中向量时，将表示为$f^\pm$. 在$L^2[0,1]$中任取一个完备就范直交系$\{f_n\}$. 显然，$\{f_n^\pm\}$分别构成$(H_\pm, \pm(\cdot,\cdot))$中完备就范直交系. 令$z_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\{f_n^-, f_n^+\}$，$z_n^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\{-f_n^-, f_n^+\}$，$n=1, 2, \cdots$. 显然，

$$Z = \overline{\operatorname{span}}\{z_n\} \in \mathbf{Z}, \quad Z^* = \overline{\operatorname{span}}\{z_n^*\} \in \mathbf{Z}, \tag{3.11}$$

$$\Pi = Z \dotplus Z^*, \quad Z \cap Z^* = \{0\}. \tag{3.12}$$

作Π上线性算子

$$A:\ \{f^-, f^+\} \mapsto \{(A_1f)^-, (A_1f)^+\}\ (f \in \mathscr{D}(A_1)),$$
$$\{-g^-, g^+\} \mapsto \{-(A_1^*g)^-, (A_1^*g)^+\}\ \ (g \in \mathscr{D}(A_1^*)),$$
即 A 实际上是 $Z \to Z$, $Z^* \to Z^*$ 的线性算子,并且
$$\mathscr{D}(A) = \mathscr{D}_Z \dotplus \mathscr{D}_{Z^*},\ \mathscr{D}_Z = \{\{f^-, f^+\} \mid f \in \mathscr{D}(A_1)\},$$
$$\mathscr{D}_{Z^*} = \{\{-g^-, g^+\} \mid g \in \mathscr{D}(A_1^*)\}.$$
因为 $\overline{\mathscr{D}(A_1)} = L^2[0, 1] = \overline{\mathscr{D}(A_1^*)}$, 所以 $\mathscr{D}_Z$, $\mathscr{D}_{Z^*}$ 分别在 Z, Z^* 中稠密. 由 (3.12) 可知, A 是 Π 上稠定算子.

对任何复数 λ, 用 f_λ 表示 A_1 相应于 λ 的特征向量, 显然
$$A\{f_\lambda^-, f_\lambda^+\} = \{(A_1f_\lambda)^-, (A_1f_\lambda)^+\} = \lambda\{f_\lambda^-, f_\lambda^+\},$$
即 λ 也是 A 的特征值. 从而 $\sigma_p(A) = \mathbf{C}$.

最后证明 $A \subset A^\dagger$. 为此, 我们只要证明对任何 $x \in \mathscr{D}(A)$, (Ax, x) 是实数就可以了. 事实上, 对任何 $f \in \mathscr{D}(A_1)$, $g \in \mathscr{D}(A_1^*)$, 注意 Z, Z^* 是两个零性子空间, 我们有
$$\begin{aligned}&(A(\{f^-, f^+\} + \{-g^-, g^+\}), \{f^-, f^+\} + \{-g^-, g^+\})\\ &= (A\{f^-, f^+\}, \{-g^-, g^+\}) + (A\{-g^-, g^+\}, \{f^-, f^+\})\\ &= 2[A_1f, g] + 2[A_1^*g, f]^{1)}.\end{aligned}$$
这就是说, 对任何 $x = \{f^-, f^+\} + \{-g^-, g^+\} \in \mathscr{D}(A)$, (Ax, x) 是实数. 因此, A 是 Π 上对称算子.

例 3.1 表明, 在完备的不定度规空间中, 不是每个对称算子都必能用 (3.1) 式作出它的 Cayley 变换. 其实, 例 3.1 中的算子 A 还是自共轭的. 事实上, 我们只要证明 $\mathscr{D}(A^\dagger) \subset \mathscr{D}(A)$ 即可.

设 $x = \{x_-, x_+\} \in \mathscr{D}(A^\dagger)$, 记 $A^\dagger x$ 为 $y = \{y_-, y_+\}$. 这样, 对任何 $f \in \mathscr{D}(A_1)$, $g \in \mathscr{D}(A_1^*)$, 由等式
$$(A(\{f^-, f^+\} + \{-g^-, g^+\}), \{x_-, x_+\}) = (\{f^-, f^+\} + \{-g^-, g^+\}, \{y_-, y_+\})$$
立即得到
$$-[A_1f - A_1^*g, x_-] + [A_1f + A_1^*g, x_+] = -[f - g, y_-] + [f + g, y_+],$$

1) $[\cdot, \cdot]$ 是 $L^2[0,1]$ 上的内积.

即 $[A_1 f, x_+ - x_-] + [A_1^* g, x_- + x_+] = [f, y_+ - y_-] + [g, y_- + y_+]$. 由于 f, g 可独立选取,所以它等价于

$$[A_1^* g, x_- + x_+] = [g, y_- + y_+], \ g \in \mathscr{D}(A_1^*); \tag{3.13}$$

$$[A_1 f, x_+ - x_-] = [f, y_+ - y_-], \ f \in \mathscr{D}(A_1). \tag{3.14}$$

由 (3.13),(3.14) 分别可得

$$x_- + x_+ \in \mathscr{D}(A_1^{**}), \ A_1^{**}(x_- + x_+) = y_- + y_+; \tag{3.15}$$

$$x_+ - x_- \in \mathscr{D}(A_1^*), \ A_1^*(x_+ - x_-) = y_+ - y_-. \tag{3.16}$$

因为 A_1 是稠定闭算子,所以由 (3.15) 可得

$$x_- + x_+ \in \mathscr{D}(A_1), \ A_1(x_- + x_+) = y_- + y_+. \tag{3.17}$$

由于 $\{x_-, x_+\} = \frac{1}{2}\{x_- + x_+, x_- + x_+\} + \frac{1}{2}\{-(x_+ - x_-), x_+ - x_-\}$,显然

$\{x_- + x_+, x_- + x_+\} \in Z$, $\{-(x_+ - x_-), x_+ - x_-\} \in Z^*$.

并根据 (3.16),(3.17),就有 $\{x_-, x_+\} \in \mathscr{D}_Z + \mathscr{D}_{Z^*} = \mathscr{D}(A)$,即 A 是 Π 上自共轭算子.

Π_K 空间和 Hilbert 空间一样，自共轭算子的 Cayley 变换的充要条件是不以 1 为特征值的酉算子(见推论 3.5). 下面举例说明,在完备的不定度规空间中，确实有自共轭算子，它的 Cayley 变换并不是酉算子,即便是有界自共轭算子,也不是对一切的 ζ, $\zeta \bar{\in} \sigma_p(A)$, $I_m \zeta \neq 0$, 所作出的 Cayley 变换是酉算子.

例 3.2 设 $\Pi = l_- \oplus l_+$, $l_\pm = l^2$, $\{e_i^\pm | i = 2, 3, \cdots\}$ 分别是 $l_\pm$ 的完备就范直交系. 令

$$z_i = \sqrt{\frac{1}{2}}(e_i^- + e_i^+), \ z_i^* = \sqrt{\frac{1}{2}}(-e_i^- + e_i^+), \ i = 2, 3, \cdots, \tag{3.18}$$

$$Z = \overline{\text{span}}\{z_i\}, \ Z^* = \overline{\text{span}}\{z_i^*\}, \ Z + Z^* = \Pi. \tag{3.19}$$

显然,$\{z_i\}$, $\{z_i^*\}$ 是对偶族, 并且 $\{Z, Z^*\}$ 在基 $\{z_i\}$, $\{z_i^*\}$ 之下成为 H. D. 对(参见第一章定义 4.2). 作线性算子

$$\begin{aligned} V: \quad & z_j \longmapsto j z_j \\ & z_j^* \longmapsto \frac{1}{j} z_j^* \\ & (j = 2, 3, \cdots). \end{aligned} \tag{3.20}$$

显然，

$$(Vz_i,Vz_j)=(z_i,\ z_j)=0,\ (Vz_i^*,\ Vz_j^*)=(z_i^*,\ z_j^*)=0,$$

$$(Vz_i,\ Vz_j^*)=\delta_{ij}=(z_i,\ z_j^*). \tag{3.21}$$

现在适当规定 V 的定义域 $\mathscr{D}(V)$，使得 $V^\dagger=V^{-1}$：固定 j，从 (3.20) 得到

$$\begin{aligned} Ve_j^+&=\frac{1}{2}\left(j+\frac{1}{j}\right)e_j^++\frac{1}{2}\left(j-\frac{1}{j}\right)e_j^-,\\ Ve_j^-&=\frac{1}{2}\left(j-\frac{1}{j}\right)e_j^++\frac{1}{2}\left(j+\frac{1}{j}\right)e_j^-. \end{aligned} \tag{3.22}$$

用 $[\cdot,\cdot]$ 表示正则分解 $\Pi=l_-\oplus l_+$ 所导出的内积，那末

$$\Pi=\bigoplus_{i=2}^{\infty}H_i,\quad H_i=\operatorname{span}\{e_i^-,\ e_i^+\},i=2,\ 3,\ \cdots, \tag{3.23}$$

其中$\oplus$表示按 $[\cdot,\ \cdot]$ 的直交和。记 $V_i=V|_{H_i}$，显然 V_i 是 $(H_i,[\cdot,\cdot])$ 上自共轭算子，并且在基 e_i^+,e_i^- 之下的表示是

$$V_i=\begin{pmatrix}\dfrac{i+\frac{1}{i}}{2} & \dfrac{i-\frac{1}{i}}{2}\\ \dfrac{i-\frac{1}{i}}{2} & \dfrac{i+\frac{1}{i}}{2}\end{pmatrix},\ V_i=V_i^*,\ V_i^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{i+\frac{1}{i}}{2} & -\dfrac{i-\frac{1}{i}}{2}\\ -\dfrac{i-\frac{1}{i}}{2} & \dfrac{i+\frac{1}{i}}{2}\end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

$$i=2,\ 3,\ \cdots,$$

$P_\pm$ 是 Π 在 $l_\pm$ 上投影，$J=P_+-P_-$。显然 $H_i(i\geqslant 2)$ 约化 J。记 $J_i=J|_{H_i}$。显然

$$J_iV_i^*J_i=V_i^{-1}. \tag{3.25}$$

如果取 V 的定义域

$$\mathscr{D}(V)=\left\{\sum_{i=2}^{\infty}x_i\,\middle|\,x_i\in H_i,\sum_{i=2}^{\infty}\|V_ix_i\|^2<\infty,\sum_{i=2}^{\infty}\|x_i\|^2<\infty\right\},$$

那末 V 是 $(\Pi,[\cdot,\cdot])$ 上的自共轭算子，即 $V=V^*$。由 (3.25)，又有

$$JV^*J = V^{-1}. \tag{3.26}$$

从 (3.21) 易知，V 在 span $\{H_i | i \geqslant 2\}$ 上的限制 V_0 是按 $(\cdot, \cdot)$ 的保距算子，从 $\mathscr{D}(V)$ 的选取方式可知，V 是 V_0 的最小闭扩张，因而 V 也是按 $(\cdot, \cdot)$ 的保距算子，并且 $\overline{\mathscr{D}(V)} = \Pi$。从 (3.26) 得到

$$V^\dagger = V^{-1}, \quad \overline{\mathscr{R}(V)} = \overline{\mathscr{D}(V^{-1})} = \Pi. \tag{3.27}$$

注意 由于 $\sigma(V) = \overline{\bigcup_{i=2}^{\infty} \sigma(V_i)} = \overline{\sigma_p(V)} = \{0, i, \frac{1}{i} | i \geqslant 2\}$，

所以 $1 \in \rho(V)$。根据定理 3.2，对任何 $I_m\zeta \neq 0$，$A = (\zeta V - \bar{\zeta} I)(V - I)^{-1}$ 是 Π 上有界自共轭算子。但是对于上述 ζ，A 的 Cayley 变换就是 V。显然，由于 V 是无界算子，从而它不可能是酉算子。

3. 对称算子和保距算子的扩张 和普通 Hilbert 空间情况相类似，在这一小节中要讨论对称算子的自共轭扩张和保距算子的闭扩张和酉扩张。

引理 3.7 设 A, A' 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上两个对称算子，$\zeta (I_m\zeta \neq 0)$ 不是 A 和 A' 的特征值。相应的 Cayley 变换为 $V = (A - \bar{\zeta} I)(A - \zeta I)^{-1}$，$V' = (A' - \bar{\zeta} I)(A' - \zeta I)^{-1}$。那末

(i) A 是闭算子的充要条件是 V 是闭算子。

(ii) $A \subset A'$ 的充要条件是 $V \subset V'$。

本引理的证明和普通 Hilbert 空间情况相同。证略。

Hilbert 空间中保距算子必有闭的扩张，然而从本章 §2 的讨论可知，完备的不定度规空间上保距算子的扩张问题是复杂的，它的难度并不比对称算子的扩张小。例如，完备不定度规空间中任何对称算子必有闭扩张。这就很自然地问：满足条件 $\overline{\mathscr{R}(V - I)} = \Pi$（它的 Cayley 变换已是对称算子）是否有闭的扩张呢？下面举例说明，这种保距算子也未必有闭的扩张。

例 3.3 设 $\Pi = l_- \oplus l_+$，$l_\pm = l^2$，$\{e_n^\pm\}$ 分别是 $(l_\pm, \pm(\cdot, \cdot))$ 中完备就范直交系。令 $z_n = \sqrt{\frac{1}{2}}(e_n^- + e_n^+)$，$z_n^* = \sqrt{\frac{1}{2}}(-e_n^- +$

e_n^*), $n=1,2,\cdots$, 显然, $\Pi=Z+Z^*$, 其中 $Z=\left\{z\mid z=\sum_n a_n z_n, \sum_n |a_n|^2<\infty\right\}$, $Z^*=\left\{z^*\mid z^*=\sum_n b_n z_n^*, \sum_n |b_n|^2<\infty\right\}$.
在 Z, Z^* 上引入内积

$$\langle z, z'\rangle=\sum_n a_n \bar{a}_n', \quad z=\sum_n a_n z_n, \quad z'=\sum_n a_n' z_n,$$

$$\langle z^*, z^{*\prime}\rangle=\sum_n b_n \bar{b}_n', \quad z^*=\sum_n b_n z_n^*, \quad z^{*\prime}=\sum_n b_n' z_n^*. \tag{3.28}$$

作 Π 上线性算子

$$V: \quad z \longmapsto V_- z+f(z) z_1, \qquad z \in Z,$$

$$z^* \longmapsto V_+ z^*, \qquad z^* \in Z^*, \tag{3.29}$$

其中 V_-, V_+ 分别是 $(Z,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, $(Z^*,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 在基 $\{z_n\}$, $\{z_n^*\}$ 之下的单向平移算子,而 f 是 $(Z,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上的无界线性泛函. 先证 V 是 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上保距算子(注意 Z, Z^* 都是零性子空间 ($z_1 \perp z_i^*$, $i \geqslant 2$). 对任何 $z=\sum_n a_n z_n$, $z^*=\sum_n b_n z_n^*$,

$$\begin{aligned}
(V(z+z^*), V(z+z^*)) &=(Vz, Vz^*)+(Vz^*, Vz) \\
&=\sum_n a_n \bar{b}_n+\sum_n b_n \bar{a}_n=(z, z^*)+(z^*, z) \\
&=(z+z^*, z+z^*),
\end{aligned} \tag{3.30}$$

因此 V 是保距的.

再证 $\overline{\mathscr{R}(V-I)}=\Pi$. 因为 $V_\pm$ 都是单向平移, 所以 $\mathscr{R}(V_\pm-I)$ 分别在 $(Z,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, $(Z^*,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中稠密. 但由 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的取法(见(3.28)), 易知也就是 $\mathscr{R}(V_\pm-I)$ 按 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上拓扑分别在 Z, Z^* 中稠密. 由于 f 是无界的, 所以 $\mathscr{N}(f)$ 在 $(Z,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中稠密, 也就是在 Z 中按 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 拓扑稠密. 令 $Z_1=\mathscr{N}(f)$, 显然 $(V_- - I)Z_1$ 在 Z 中稠密. 从而, $(V-I)(Z_1+Z^*)$ 在 $Z+$

Z^* 中稠密，即

$$\overline{(V-I)(Z_1+Z^*)}=\Pi. \tag{3.31}$$

显然，V 是无界的算子，而且 $\mathscr{D}(V)=Z+Z^*=\Pi$，因而 V 不可能再有闭扩张。因为如果有闭扩张 $\tilde{V}$，由于 $\mathscr{D}(\tilde{V})=\Pi$，从而 $\tilde{V}$ 是有界线性算子，这与 $V\subset\tilde{V}$，而 V 是无界的相矛盾。

下面再举一例说明，一个不以 1 为特征值的保距算子，可能它的任何闭扩张都具有特征值 1。

例 3.4 设 $\Pi=l_-\oplus l_+$，如例 3.3，令 $z=\sqrt{\frac{1}{2}}(e_1^-+e_1^+)$，$H'=\overline{\mathrm{span}}\{e_i^+, i\geqslant 2\}$，$f$ 是 Hilbert 空间 $(H',(\cdot,\cdot))$ 上无界线性泛函。取 $\mathscr{D}(V)=\{x+f(x)z\,|\,x\in H'\}$，再取 $x_0\in H'$，使得 $f(x_0)\neq 0$。记 $H''=H'\ominus\mathrm{span}\ \{x_0\}$，作线性算子

$$\begin{aligned} V:\quad & x_0+f(x_0)z\longmapsto x_0, \\ & y+f(y)z\longmapsto Uy,\quad y\in H'', \end{aligned} \tag{3.32}$$

其中 U 是 Hilbert 空间 $(H'',(\cdot,\cdot))$ 上酉算子，并且 $1\bar{\in}\sigma_p(U)$。

容易直接验证，由 (3.32) 所定义的线性算子 V 是 $\mathscr{D}(V)$ 到 H' 的保距算子，并且 $1\bar{\in}\sigma_p(V)$。根据 f 的无界性，存在 H' 中点列 $\{x_n\}$，有 $\|x_n\|\to 0$，$f(x_n)\to 1\ (n\to\infty)$。如果 $\tilde{V}$ 是 V 的一个闭扩张，那末由 (3.32)，必有

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+f(x_n)z)=z,\quad \lim_{n\to\infty}V(x_n+f(x_n)z)=0, \tag{3.33}$$

即 $z\in\mathscr{D}(\tilde{V})$，并且 $\tilde{V}z=0$。由此可知，$\mathscr{D}(\tilde{V})=H'\oplus\mathrm{span}\{z\}$，并且

$$\tilde{V}x_0=\tilde{V}(x_0+f(x_0)z-f(x_0)z)=V(x_0+f(x_0)z)=x_0,$$

即 $1\in\sigma_p(\tilde{V})$。

定理 3.8 设 V 是完备的不定度规空间 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上保距算子，$\mathscr{D}(V)\subset\Pi$。

(i) 如果 $\overline{\mathscr{R}(V)}$ 是非退化的，那末 V 必有闭扩张，而且 V 的最小闭扩张 $\bar{V}$ 必是保距的。进一步，如果 $\mathscr{D}(V)$ 还是闭的，那末 $\bar{V}$ 必是连续的。

(ii) 如果 $\mathscr{R}(V)$ 是完备子空间，那末 $\bar{V}$ 必是 $\overline{\mathscr{D}(V)}$ 到 $\mathscr{R}(V)$ 的连续保距算子. 如果同时 $\overline{\mathscr{D}(V)}$ 还是非退化的，则必然 $V=\bar{V}$，并且 $\mathscr{D}(V)=\mathscr{D}(\bar{V})=\overline{\mathscr{D}(V)}$ 也是完备子空间，从而 V 是完备的不定度规空间 $(\mathscr{D}(V),(\cdot,\cdot))$ 到完备的不定度规空间 $(\mathscr{R}(V),(\cdot,\cdot))$ 的酉算子.

证 (i) 设 $\Pi=H_-\oplus H_+$ 是正则分解. 显然，只要证明 $\overline{G(V)}$ 中不含 $\{0,y\}(y\neq 0)$ 形式的向量即可.

事实上，如果有 $\{0,y\}\in\overline{G(V)}$，则必有 $x_n\in\mathscr{D}(V)(n=1,2,\cdots)$，使得 $\{x_n,Vx_n\}\to\{0,y\}(n\to\infty)$. 由于对任何 $x\in\mathscr{D}(V)$，$(Vx_n,Vx)=(x_n,x)$，取极限就得到

$$(y,Vx)=(0,x)=0, \tag{3.34}$$

即 $y\perp\mathscr{R}(V)$. 但 $y\in\overline{\mathscr{R}(V)}$，而 $\overline{\mathscr{R}(V)}$ 是非退化的，所以只有 $y=0$. 由此可知，$\overline{G(V)}$ 必是某个线性算子 $\bar{V}$ 的图象，并且 $\bar{V}$ 是 V 的最小闭扩张. 显然，$\bar{V}$ 是保距的.

尤其当 $\mathscr{D}(V)$ 还是闭的时，这时显然必有 $V=\bar{V}$. 再根据闭图象定理，V 是连续的.

(ii) 当 $\mathscr{R}(V)$ 是完备子空间时，由定理 2.2，V 是连续的. 因而 V 可以连续地延拓成 $\overline{\mathscr{D}(V)}$ 到 $\mathscr{R}(V)$ 上的线性保距算子 $\bar{V}$ (显然，$\bar{V}$ 是 V 的最小闭扩张). 如果 $\overline{\mathscr{D}(V)}$ 又是非退化的 (这时 $\mathscr{D}(V)$ 必也是非退化的)，那末 V，$\bar{V}$ 都是单射. 再根据 $V\subset\bar{V}$，$\mathscr{R}(V)=\mathscr{R}(\bar{V})$，立即可以推出 $\mathscr{D}(V)=\mathscr{D}(\bar{V})$，$V=\bar{V}$.

现在来证明 $\mathscr{D}(V)$ 必是完备子空间. 事实上，因为 $\mathscr{R}(V)$ 是完备的，所以有正则分解 $\mathscr{R}(V)=N\oplus P$，其中 N,P 分别是负、正完备子空间. 令 $D_-=V^{-1}N$，$D_+=V^{-1}P$. 由于 N，P 分别按 $-(\cdot,\cdot)$，$(\cdot,\cdot)$ 成为 Hilbert 空间，易知 $\mathscr{D}(V)=D_-\oplus D_+$ 是 $\mathscr{D}(V)$ 的正则分解. 又因为上面已证明 $\mathscr{D}(V)=\overline{\mathscr{D}(V)}$，即 $\mathscr{D}(V)$ 是闭的，从而 $\mathscr{D}(V)$ 是完备子空间. 证毕.

注意 在定理 3.8 的 (ii) 中，并不能由 $\mathscr{R}(V)$ 为完备子空间推出，$\mathscr{D}(V)$ 是闭的 (即使已知 $(\mathscr{D}(V),(\cdot,\cdot))$ 是完备的不定度

规空间)。

例 3.5 设 $\Pi = l_-\oplus l_+$ 如例 3.4，$z = \sqrt{\frac{1}{2}}(e_1^- + e_1^+)$，$H' = l_+\ominus\mathrm{span}\{e_1^+\}$，$f$ 是 H' 上无界线性的泛函．取 $\mathscr{D}(V) = \{x + f(x)z \mid x\in H'\}$．显然，$\mathscr{D}(V)$ 是 Π 的正子空间，但不是闭的。$\mathscr{D}(V)$按 $(\cdot,\cdot)$ 成为 Hilbert 空间。作定义在 $\mathscr{D}(V)$上的线性算子

$$V: x + f(x)z \longmapsto x,\ x\in H',$$

显然，V 是 $\mathscr{D}(V)$ 到 H' 的线性保距算子，而且 $\mathscr{R}(V) = H'$，是完备子空间。

和 Hilbert 空间情况一样，为了讨论不定度规空间上保距算子的酉扩张，我们引入亏维数概念。

定义 3.1 设 L 是完备的不定度规空间 $(\Pi(\cdot,\cdot))$ 的闭线性子空间。$L = N_L\oplus Z_L\oplus P_L$ 是 L 的标准分解。如果存在空间的标准分解 $\Pi = N\oplus\{Z + Z^*\}\oplus P$，使得

$$N\supset N_L,\ P\supset P_L,\ Z = Z_L. \tag{3.35}$$

即标准分解 $L = N_L\oplus Z_L\oplus P_L$ 能扩张成全空间的标准分解 $\Pi = N\oplus\{Z + Z^*\}\oplus P$，则称数对 $(\dim(N\ominus N_L), \dim(P\ominus P_L))$ 为 L 的亏维数，并分别称 $\dim(N\ominus N_L)$，$\dim(P\ominus P_L)$ 是负亏维数、正亏维数。

对于不存在标准分解的、或虽存在标准分解但不能扩张成全空间的标准分解的 L，我们不引入亏维数概念。

引理 3.9 设 L 是完备的不定度规空间 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 的闭线性。下列命题成立。

(i) 如果 L 有一个标准分解 $L = N_L\oplus Z_L\oplus P_L$ 能扩张成空间的标准分解，那末 L 的任何一个标准分解 $L = N_L'\oplus Z_L\oplus P_L'$ 也必能扩张成空间的标准分解。

(ii) 满足 (i) 中条件的闭线性子空间 L 的亏数不依赖于 L 的标准分解的选取。

证 (i) 实际上是第一章定理 4.13 的直接推论。

(ii) 设 $L = N_L\oplus Z_L\oplus P_L$，$L = N_L'\oplus Z_L\oplus P_L'$ 是 L 的两个标准分解，而标准分解 $\Pi = N\oplus\{Z_L + Z^*\}\oplus P$，$\Pi = N'\oplus\{Z_L + Z^{*\prime}\}$

$\oplus P'$ 是它们相应的扩张. 下面证明 $\dim(N'\ominus N'_L)=\dim(N\ominus N_L)$.

令 $\{Z_L+Z^*\}=N_0\oplus P_0$ 是正则分解. 显然, 如取 $H_-=N\oplus N_0$, $H_+=P\oplus P_0$, 那么 $\Pi=H_-\oplus H_+$, 并且是正则分解. 记 $L_0=N\ominus N_L$, 易知 $L_0\perp L$, $L_0\cap L=\{0\}$. 由于 L_0 是完备子空间, $L\subset L_0^{\perp}$, 所以对于 L 中任何闭线性子空间 L_1 (L_1 包含在完备子空间 $L_0^{\perp}$ 中), 根据第一章推论 3.14, $L_0\oplus L_1$ 必是闭线性子空间. 由于 $N'_L\oplus Z_L$ 是 L 中闭线性子空间, 所以 $L_0\oplus N'_L\oplus Z_L$ 是 Π 上 (半负) 闭线性子空间.

现在证明 $L'=L_0\oplus N'_L\oplus Z_L$ 必是极大半负的. 事实上, 如果不对, 那末在正则分解 $\Pi=H_-\oplus H_+$ 之下, H_- 的闭线性子空间 P_-L' (因为 L' 是半负的, 并且是闭的) 就不是 H_-, 即存在 $x_0\in H_-\ominus P_-L'$ ($x_0\neq 0$), 从而 $x_0\perp L'$. 因为 $P_-L'\supset P_-Z_L$, $P_-L'\supset L_0$, 所以

$$x_0\in H_-\ominus P_-L'\subset H_-\ominus(P_-Z_L\oplus L_0)=N_L, \tag{3.36}$$

因此 $x_0\in L$. 这样就存在 $n'_L\in N'_L$, $p'_L\in P'_L$, $z'_L\in Z_L$, 使得

$$x_0=n'_L+z'_L+p'_L. \tag{3.37}$$

在正则分解 $\Pi=H_-\oplus H_+$ 之下, 有下列表示: $x_0=\{x_0,0\}$, $n'_L+z'_L=\{x_l,y_l\}$, $p'_L=\{p_-,p_+\}$. (3.37) 等价于

$$p_-=x_0-x_l,\quad p_+=-y_l. \tag{3.38}$$

因为 p'_L 是正向量, $n'_l+z'_l$ 是半负向量, 所以

$$\|p_+\|\geqslant\|p_-\|,\quad \|x_l\|\geqslant\|y_l\|. \tag{3.39}$$

因为 $x_0\perp x_l$, 从 (3.38), (3.39) 得到

$$\|p_-\|^2=\|x_0\|^2+\|x_l\|^2\geqslant\|x_0\|^2+\|y_l\|^2$$
$$\geqslant\|x_0\|^2+\|p_+\|^2\geqslant\|x_0\|^2+\|p_-\|^2.$$

显然, 只有 $x_0=0$. 这与假设 $x_0\neq 0$ 相矛盾, 因此 L' 是极大半负的.

令 $\{Z_L+Z^{*\prime}\}=N'_0\oplus P'_0$ 是正则分解, 取 $H'_-=N'\oplus N'_0$, $H'_+=P'\oplus P'_0$, 那末 $\Pi=H'_-\oplus H'_+$ 也是正则分解. 既然 L' 是极大半负的, 因而 $P'_-L'=H'_-$. 但是 $P'_-Z_L=N'_0$, $P'_-N'_L=N'_L$, 所以只有 $P'_-L_0=N'\ominus N'_L$. 因此

$$\dim(N'\ominus N'_L)\leqslant\dim L_0=\dim(N\ominus N_L). \tag{3.40}$$

对调 N_L, N'_L 的地位，立即由上式得到 $\dim(N'\ominus N'_L)=\dim(N\ominus N_L)$.

同样可证 $\dim(P'\ominus P'_L)=\dim(P\ominus P_L)$. 证毕.

定理 3.10 设 V 是完备的不定度规空间 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上连续的保距算子，并且是单射. 又设 $\mathscr{D}(V)$, $\mathscr{R}(V)$ 都是具有亏维数的闭线性子空间. 那末 V 可以扩张成 Π 上酉算子的充要条件是 $\mathscr{D}(V)$, $\mathscr{R}(V)$ 的亏维数相等.

证 设 $\mathscr{R}(V)=N\oplus Z\oplus P$ 是标准分解，而标准分解 $\Pi=N_1\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P_1$ 是它的扩张. 记 $D_-=V^{-1}N$, $D_+=V^{-1}P$, $D_0=V^{-1}Z$. 由 V^{-1} 的保距性，易知 $\mathscr{D}(V)=D_-\oplus D_0\oplus D_+$. 由于 N, P, Z 是闭的，V 是连续的，所以 D_-, D_+, D_0 都是闭的. 因为 $(N,-(\cdot,\cdot))$, $(P,(\cdot,\cdot))$ 是两个 Hilbert 空间，易知 $(D_-,-(\cdot,\cdot))$, $(D_+,(\cdot,\cdot))$ 也都成为 Hilbert 空间. 对于标准分解 $\mathscr{D}(V)=D_-\oplus D_0\oplus D_+$ 的扩张 $\Pi=N_2\oplus\{D_0+D_0^*\}\oplus P_2$, 令

$$L_1=(N_1\ominus N)\oplus Z^*\oplus(P_1\ominus P),\qquad(3.41)$$
$$L_2=(N_2\ominus D_-)\oplus D_0^*\oplus(P_2\ominus D_+).$$

假设 $\mathscr{D}(V)$, $\mathscr{R}(V)$ 的亏维数是相等的，即

$$\dim(N_1\ominus N)=\dim(N_2\ominus D_-),\ \dim(P_1\ominus P)=\dim(P_2\ominus D_+).$$

我们对 V 在 L_2 上补充定义 V' 如下:

$$V':\quad N_2\ominus D_-\to N_1\ominus N \text{ 的酉算子},$$
$$(3.42)$$
$$P_2\ominus D_+\to P_1\ominus P \text{ 的酉算子}.$$

在 D_0^* 上补充的定义较复杂. 不妨设 $\{Z,Z^*\}$, $\{D_0,D_0^*\}$ 是 H. D. 对[1], 并且假定所选的对偶族 $\{z_\lambda\}\subset Z$, $\{z_\lambda^*\}\subset Z^*$; $\{d_\lambda\}\subset D_0$, $\{d_\lambda^*\}\subset D_0^*$ $(\lambda\in\Lambda)$ 在某个正则分解 $\Pi=H_-\oplus H_+$ 之下满足

$$\frac{1}{2}\leqslant\|z_\lambda\|,\|z_\lambda^*\|,\|d_\lambda\|,\|d_\lambda^*\|\leqslant\frac{3}{2},\ \lambda\in\Lambda.\qquad(3.43)$$

对偶族 $\{z_\lambda\}$, $\{z_\lambda^*\}$ 在 Z, Z^* 上产生的内积都用 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ 表示，而对

---

1) 从这里开始的一段内容参见第一章 §4 的第 4 小节有关 H. D. 对的讨论.

偶族 $\{d_\lambda\}$, $\{d_\lambda^*\}$ 在 D_0, D_0^* 上产生的内积都用 $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ 表示. 将 $D_0\to Z$ 的算子 V 视为 Hilbert 空间 $(D_0, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ 到 Hilbert 空间 $(Z, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ 的算子时特别记为 S (即 $S=V|_{D_0}$). 由于 V 是连续的,以及 (3.43),易知 S 是连续的,再根据逆算子定理, S^{-1} 也是连续的. 今在 D_0^* 上补充定义 V' 如下:

$$V'|_{D_0^*}=S^{-1*}. \tag{3.44}$$

这里 S^{-1*} 是在视 $(D_0^*,\langle\cdot,\cdot\rangle_2)$, $(Z_0^*,\langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ 分别为 $(D_0,\langle\cdot,\cdot\rangle_2)$, $(Z_0,\langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ 的共轭空间前提下, 算子 S^{-1}: $(Z_0, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)\to(D_0, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ 的共轭算子. 即对任何 $z\in Z_0$, $d^*\in D_0^*$,

$$\langle S^{-1}z, d^*\rangle_2=\langle z, S^{-1*}d^*\rangle_1. \tag{3.45}$$

显然, 要验证补充定义后的 V' 是酉算子, 只要验证 V' 是 $D_0+D_0^*$ 到 $Z+Z^*$ 的保距算子,并且是双射就可以了.

由于 S^{-1} 是 $(Z_0,\langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ 到 $(D_0,\langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ 的连续双射. 因而 S^{-1*} 是 $(D_0^*, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ 到 $(Z_0^*, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ 的连续双射, 从而 V' 是 $D_0+D_0^*$ 到 $Z+Z^*$ 的双射. 而对任何 $d\in D_0$, $d^*\in D_0^*$, 利用 $(V'd, V'd)=0=(V'd^*, V'd^*)$,就得到

$$\begin{aligned}(V'(d+d^*), V'(d+d^*))&=(V'd, V'd^*)+(V'd^*, V'd)\\&=\langle Sd, S^{-1*}d^*\rangle_1+\langle S^{-1*}d^*, Sd\rangle_1\\&=\langle d, d^*\rangle_2+\langle d^*, d\rangle_2\\&=(d, d^*)+(d^*, d)=(d+d^*, d+d^*),\end{aligned}$$

即所作的 V' 又是保距的,从而 V' 是酉算子. 充分性证得.

反之,假设 V 在 Π 上有一个酉扩张 U,由于

$$\Pi=N\oplus P\oplus\{Z+Z^*\}\oplus(N_1\ominus N)\oplus(P_1\ominus P), \tag{3.46}$$

$$\Pi=D_-\oplus D_+\oplus\{D_0+D_0^*\}\oplus(N_2\ominus D_-)\oplus(P_2\ominus D_+),$$

并且 $U|_{D_-\oplus D_+}=V$ 已是 $D_-\oplus D_+$ 到 $N\oplus P$ 的双射, U 是酉算子, 所以 U 也是

$$\{D_0+D_0^*\}\oplus(N_2\ominus D_-)\oplus(P_2\ominus D_+)\to\{Z+Z^*\}\oplus(N_1\ominus N)\oplus(P_1\ominus P)$$

的双射。令

$$\Pi^{(2)}=U\{(N_2\ominus D_-)\oplus(P_2\ominus D_+)\}=U(N_2\ominus D_-)\oplus U(P_2\ominus D_+),$$

$$\Pi^{(3)} = U\{D_0 + D_0^*\} = \{Z + UD_0^*\}, \tag{3.47}$$

$Z^{*\prime} = UD_0^*$. 由于 $\{D_0 + D_0^*\}$ 是完备子空间，所以 $\Pi = \{D_0 + D_0^*\} \oplus \{D_0 + D_0^*\}^{\perp} = U\{D_0 + D_0^*\} \oplus U\{D_0 + D_0^*\}^{\perp}$，从而 $\Pi^{(3)} = U\{D_0 + D_0^*\}$ 也是完备子空间．取 Π 的标准分解

$$\begin{aligned}\Pi &= UN_2 \oplus U\{D_0 + D_0^*\} \oplus UP_2 \\ &= (U(N_2 \ominus D_-) \oplus N) \oplus \{Z + Z^{*\prime}\} \oplus (P \oplus U(P_2 \ominus D_+)),\end{aligned} \tag{3.48}$$

从它立即可知 $\mathscr{R}(V)$ 的亏维数是 $(\dim U(N_2 \ominus D_-), \dim U(P_2 \ominus D_+))$．由于 U 是酉算子，所以 $\mathscr{R}(V)$ 的亏维数就是 $\mathscr{D}(V)$ 的亏维数 $(\dim(N_2 \ominus D_-), \dim(P_2 \ominus D_+))$．证毕．

注 如果我们考察的是 Π_K 空间，那末问题要简单些．第一，Π_K 上任何闭线性子空间的标准分解总能扩张成全空间的标准分解，从而任何 Π_K 上任何闭线性子空间都有按定义 3.1 意义下的亏维数．第二，如果保距算子是单射，由于 $\dim D_- = \dim VD_- \leqslant K$, $\dim D_0 = \dim VD_0 \leqslant K - \dim D_-$．所以 $\mathscr{D}(V)$, $\mathscr{R}(V)$ 的亏维数中负亏维数总是相等的，即 $\dim(N_2 \ominus D_-) = K - \dim D_- - \dim D_0 = \dim(N_1 \ominus N)$．

推论 3.11 设 V 是 Π_K 上连续的保距算子，并且是单射．又设 $\mathscr{D}(V)$, $\mathscr{R}(V)$ 都是闭线性子空间，那末 V 具有酉扩张的充要条件是 $\mathscr{D}(V)$, $\mathscr{R}(V)$ 的正亏维数相等．

推论 3.12 如果 A 是 Π_K 上闭的对称算子，$\zeta, \bar{\zeta}(I_m\zeta \neq 0)$ 都不是 A 的特征值，并且 A 的 Cayley 变换 $V = (A - \bar{\zeta}I)(A - \zeta I)^{-1}$ 是连续的，那末 A 具有自共轭扩张的充要条件是 $\mathscr{R}(A - \zeta I)$, $\mathscr{R}(A - \bar{\zeta}I)$ 的正亏维数相等．

对于完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot,\cdot))$ 的闭线性子空间 L，如果它的一个标准分解 $L = N_L \oplus Z_L \oplus P_L$ 能扩张成全空间的标准分解 $\Pi = N \oplus \{Z_L + Z^*\} \oplus P$，即 (3.35) 成立，那末

$$L^{\perp} = (N \ominus N_L) \oplus Z_L \oplus (P \ominus P_L). \tag{3.49}$$

如果记 $(\cdot,\cdot)$ 在 $L^{\perp}/Z_L$ ($Z_L = L \cap L^{\perp}$) 上诱导出的度规为 $(\cdot,\cdot)^{\sim}$，那末从 (3.49) 易知，$(L^{\perp}/Z_L, (\cdot,\cdot)^{\sim})$ 是完备的不定度规空间．

定义 3.2 设 $(\Pi^{(i)}, (\cdot, \cdot)_i)$ $(i=1, 2)$ 是两个完备的不定度规空间，如果存在 $(\Pi^{(1)}, (\cdot, \cdot)_1)$ 到 $(\Pi^{(2)}, (\cdot, \cdot)_2)$ 的酉算子，那末称 $(\Pi^{(1)}, (\cdot, \cdot)_1)$ 和 $(\Pi^{(2)}, (\cdot, \cdot)_2)$ 是酉等价的.

从定义易知，$(L^{\perp}/Z_L, (\cdot, \cdot)^{\sim})$ 和 $((N\ominus N_L)\oplus(P\ominus P_L), (\cdot,\cdot))$ 酉等价. 由定理 3.10 立即可以得到下列推论.

推论 3.13 设 V 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上连续的保距算子，并且是单射. 又设 $\mathscr{D}(V)$, $\mathscr{R}(V)$ 的标准分解都可扩张成全空间的标准分解. 那末 V 具有酉扩张的充要条件是 $(\mathscr{D}(V)^{\perp}/(\mathscr{D}(V)\cap\mathscr{D}(V)^{\perp}), (\cdot,\cdot)^{\sim})$ 与 $(\mathscr{R}(V)^{\perp}/(\mathscr{R}(V)\cap\mathscr{R}(V)^{\perp}), (\cdot,\cdot)^{\sim})$ 酉等价.

4. 谱的 Cayley 变换

定理 3.14 设 A, V 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上两个互为 Cayley 变换的线性算子，即 $\zeta\bar{\in}\sigma_p(A)$, $I_m\zeta\neq 0$, $1\bar{\in}\sigma_p(V)$,

$$A=(\zeta V-\bar{\zeta}I)(V-I)^{-1},\quad V=(A-\bar{\zeta}I)(A-\zeta I)^{-1},$$

那末 (i) L 为 A 的有限维不变子空间[1] 的充要条件是，L 是 V 的不变子空间. (ii) 当 $\lambda\in\rho(V)$, $\lambda\neq 1$ 时，$\mu=(\zeta\lambda-\bar{\zeta})(\lambda-1)^{-1}\in\rho(A)$；当 $\mu\in\rho(A)$, $\mu\neq\zeta$ 时，$\lambda=(\mu-\bar{\zeta})(\mu-\zeta)^{-1}\in\rho(V)$.

本定理在一般 Banach 空间都成立.

§4 投影算子和约化

在 Hilbert 空间算子理论中，(直交) 投影和约化子空间这两个概念密切相关，并且起了重要作用. 在本节中我们也要在完备不定度规空间中引入类似概念，并研究它们的性质.

1. 投影算子

定义 4.1 设 P 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot,\cdot))$ 上线性算子，$\mathscr{D}(P)=\Pi$. 如果 P 满足

1) L 是算子 T 的"不变子空间"这里是指"$L\subset\mathscr{D}(T)$，并且 $TL\subset L$"，与后面定义 4.3 不同.

(i) $P^2 = P$（幂等）.

(ii) $P^\dagger = P$（自共轭）.

那么，称 P 是 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上投影算子，而称 $P\Pi$ 是 P 的投影子空间。

下面先给出投影算子的基本性质。

定理 4.1 设 P 是完备的不定度规空间 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上投影算子。下列命题成立。

(i) P 是有界的。

(ii) $I - P$ 是投影算子。

(iii) $P\Pi$ 是完备子空间，并且 $\Pi = P\Pi \oplus (I-P)\Pi$.

(iv) $\mathscr{N}(P) = (I-P)\Pi$, $P\Pi = \{x \mid Px = x\}$.

(v) 当 L 是 Π 上完备子空间（特别当 L 是 Π_K 上非退化的闭线性子空间）时，必存在投影算子 P，使得 $P\Pi = L$.

(vi) 如果 $P \neq 0, I$，那末 $\sigma(P) = \sigma_p(P) = \{0,1\}$.

(vii) P_1 是 Π 上线性算子，如果 $\mathscr{D}(P_1) = \Pi$，那末 P_1 为投影算子的充要条件是对任何 $x \in \Pi$，$(P_1x, x) = (P_1x, P_1x)$.

(viii) P 是 Π 上投影算子，并且 $P\Pi$ 含有 Π 的极大半负或极大负子空间，那末 $(I-P)\Pi$ 必是正完备子空间，并且 $x \in P\Pi$ 的充要条件是 $(x, Px) = (x, x)$.

证 (i) 从 $P = P^\dagger$ 知道，P 是闭算子，又因为 $\mathscr{D}(P) = \Pi$，所以 P 是有界的，

(ii) 以及 (iv), (vi), (vii)（要利用 (iii)）的证明和 Hilbert 空间情况一样。证略。

(iii) 由于 $P(I-P) = 0$，所以有分解 $\Pi = P\Pi \oplus (I-P)\Pi$. 根据第一章 §3 定理 3.13，$P\Pi$ 是完备子空间。

(v) 由于 L 是完备子空间，所以 $\Pi = L \oplus L^\perp$. 类似于 Hilbert 空间，对任何 $x \in \Pi$，有唯一分解：$x = x_L + x_{L^\perp}$, $x_L \in L$, $x_{L^\perp} \in L^\perp$. 作

$$P: x \longmapsto x_L,\ x \in \Pi, \tag{4.1}$$

易知 $\mathscr{D}(P) = \Pi$, $P^2 = P$, P 是线性的，并且易知

$$(Px, y) = (x, Py),\ x, y \in \Pi. \tag{4.2}$$
因而 $P^{+} = P$,即 P 是投影算子. 显然 $P\Pi = L$.

(viii) 因为 $P\Pi$ 中已含有 Π 的极大半负或极大负子空间，所以 $(P\Pi)^{\perp} = (I - P)\Pi$ 是半正子空间. 又因为 $(I - P)\Pi$ 是完备子空间,所以 $(I - P)\Pi$ 只能是正的完备子空间.

当 $x \in P\Pi$ 时,显然 $(x, Px) = (Px, Px) = (x, x)$ 成立.

反之,从 $(Px, Px) = (x, Px) = (x, x) = (Px, Px) + ((I-P)x, (I-P)x)$ 立即得到 $((I-P)x, (I-P)x) = 0$, 又从 $(I-P)\Pi$ 的正性得到 $(I-P)x = 0$,即 $x \in P\Pi$. 证毕.

定义 4.2 设 P_1, P_2 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上两个投影算子，如果 $P_1\Pi \supset P_2\Pi$，那末称 P_1 不小于 P_2(或 P_2 不大于 P_1),记作 $P_1 \gtrsim P_2$, 或 $P_2 \lesssim P_1$.

注意 与 Hilbert 空间情况不一样，这里的 $P_1 \gtrsim P_2$，丝毫不意味着对任何 $x \in \Pi$,成立

$$((P_1 - P_2)x, x) \geqslant 0. \tag{4.3}$$

例如 $I \gtrsim 0$. 但如果 x 是 Π 的负向量,显然上式不成立.

定理 4.2 设 $\{P_n\}$ 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上一列投影算子,下列命题成立.

(i) $P_1\Pi \perp P_2\Pi$ 的充要条件是 $P_1P_2 = 0$.

(ii) $P_1 + P_2$ 是投影算子的充要条件是 $P_1P_2 = 0$. 如果 $P_1 + P_2$ 是投影算子,那末 $(P_1 + P_2)\Pi = P_1\Pi \oplus P_2\Pi$.

(iii) P_1P_2 是投影算子的充要条件是 $P_1P_2 = P_2P_1$. 如果 P_1P_2 是投影算子,那末 $P_1P_2\Pi = (P_1\Pi) \cap (P_2\Pi)$.

(iv) $P_1 \gtrsim P_2$ 的充要条件是 $P_1P_2 = P_2$,或者是 $P_2P_1 = P_2$.

(v) $P_1 - P_2$ 为投影算子的充要条件是 $P_1 \gtrsim P_2$. 如果 $P_1 - P_2$ 是投影算子，那末 $(P_1 - P_2)\Pi = P_1\Pi \cap (P_2\Pi)^{\perp} = P_1\Pi \cap (I - P_2)\Pi$.

(vi) 如果 $P_1 \lesssim P_2 \lesssim \cdots \lesssim P_n \lesssim \cdots$,并且存在极限

$$(\text{强})\lim_{n\to\infty} P_n = P, \tag{4.4}$$

那末 P 是投影算子,并且 $P\Pi = \overline{\bigcup_n (P_n\Pi)}$.

(vii) 如果 $P_1 \gtrsim P_2 \gtrsim \cdots \gtrsim P_n \gtrsim \cdots$，并且存在极限

$$(\text{强})\lim_{n\to\infty} P_n = P, \tag{4.5}$$

那末 P 是投影算子，并且 $P\Pi = \bigcap_n (P_n\Pi)$.

定理 4.2 可以和 Hilbert 空间情况一样地证明.

应该注意，一般说来，对于 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上两个投影算子 P_1, P_2，并不一定存在 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上投影算子 P，使得 $P\Pi = (P_1\Pi)\cap(P_2\Pi)$. 同样，对于 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上一列投影算子 $\{P_n\}$，并不一定存在 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上投影算子 P，使得 $P\Pi = \overline{\bigcup_n (P_n\Pi)}$. 这是因为 $(P_1\Pi)\cap(P_2\Pi)$，$\overline{\bigcup_n (P_n\Pi)}$ 可能不是 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 的完备子空间.

例 4.1 设 $\Pi = l_-\oplus l_+$，$l_\pm = l^2$，$\{e_i^\pm\}$ 分别是 $(l_\pm, \pm(\cdot,\cdot))$ 的完备就范直交系. 令 $z = \sqrt{\frac{1}{2}}(e_1^- + e_1^+)$，$z^* = \sqrt{\frac{1}{2}}(-e_1^- + e_1^+)$. 取

$$L_1 = \mathrm{span}\{z, z^* + e_3^+\},\ L_2 = \mathrm{span}\{z, z^* + e_4^+\}.$$

显然 L_1, L_2 是两个非退化的二维子空间，因而 L_1, L_2 是 Π 的两个完备子空间，从而存在投影算子 P_1, P_2，使得 $P_1\Pi = L_1$, $P_2\Pi = L_2$. 可是 $(P_1\Pi)\cap(P_2\Pi) = L_1\cap L_2 = \mathrm{span}\{z\}$，是一个退化的子空间，因此不可能有投影算子 P，使得 $P\Pi = \mathrm{span}\{z\}$.

例 4.2 设 $\Pi = H_-\oplus H_+$，$H_\pm = L^2[0,1]$. 作 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上一列线性子空间

$L_n = \{\{f(t), tf(t)\} \mid f(t)\in L^2[0,1]$，而当 $t\in[1-\frac{1}{n},1]$ 时，$f(t) \underset{m}{=} 0\}$[1]，$n = 1,2,\cdots$. 显然，$L_1\subset L_2\subset\cdots\subset L_n\subset\cdots$，并且每个 L_n 是完备子空间. 从而存在一列投影算子 $\{P_n\}$，$P_1\lesssim P_2\lesssim\cdots\lesssim P_n\lesssim\cdots$，

---

1) 这里 m 表示 $[0,1]$ 上 Lebesgue 测度，$f(t)\underset{m}{=}0$ 表示关于 m 几乎处处等于零.

使得 $P_n\Pi = L_n$, $n = 1, 2, \cdots$, 然而

$$\overline{\bigcup_n L_n} = \{\{f(t), tf(t)\} | f(t) \in L^2[0, 1]\}$$

不是 Π 上完备子空间.

2. 约化

定义 4.3 设 T 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot,\cdot))$ 上线性算子, $\mathscr{D}(T) \subset \Pi$. L 是 Π 的线性子空间, 如果 $T(L \cap \mathscr{D}(T)) \subset L$, 则称 L 是 T 的不变子空间. 如果 L 是完备子空间, $\mathscr{D}(T) = (L \cap \mathscr{D}(T)) \oplus (L^\perp \cap \mathscr{D}(T))$, 并且当 L, $L^\perp$ 都是 T 的不变子空间时, 称 L 是 T 的约化子空间.

在 L 是 T 的约化子空间时, 令 $T_1 = T|_L$, $T_2 = T|_{L^\perp}$. 和 Hilbert 空间一样, 常记

$$T = T_1 \oplus T_2. \tag{4.6}$$

如果 $L_i = H_-^{(i)} \oplus H_+^{(i)} (i=1, 2)$ 是两个正则分解, 那末 $\Pi = (H_-^{(1)} \oplus H_-^{(2)}) \oplus (H_+^{(1)} \oplus H_+^{(2)})$, 并且是正则分解. $[\cdot,\cdot]$ 是 $\Pi = (H_-^{(1)} \oplus H_-^{(2)}) \oplus (H_+^{(1)} \oplus H_+^{(2)})$ 所产生的内积. 显然算子的按不定度规意义下的直交直接和 (4.6) 与 T_1, T_2, T 作为 Hilbert 空间 $(\Pi, [\cdot,\cdot])$ 的直交和是一致的.

定理 4.3 设 T 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot,\cdot))$ 上线性算子, L 是 $(\Pi, (\cdot,\cdot))$ 的完备子空间, P 是相应于 L 的投影算子 (即 $P\Pi = L$). 那末

(i) L 为 T 的不变子空间的充要条件是

$$TP = PTP. \tag{4.7}$$

(ii) L 为 T 的约化子空间的充要条件是在 $\mathscr{D}(T)$ 上成立

$$TP = PT. \tag{4.8}$$

本定理和 Hilbert 空间情况一样地证明.

定理 4.4 设 T 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot,\cdot))$ 上线性算子, L 是 $(\Pi, (\cdot,\cdot))$ 的完备子空间, 并且约化 T. 令 $T_1 = T|_L$, $T_2 = T|_{L^\perp}$. 那末

(i) T 在 Π 上稠定的充要条件是 T_1, T_2 分别在 $(L, (\cdot,\cdot))$,

$(L^{\perp},(\cdot,\cdot))$ 上稠定，并且

$$T^{\dagger}=T_1^{\dagger}\oplus T_2^{\dagger}. \tag{4.9}$$

(ii) $\lambda\in\rho(T)$ 的充要条件是 $\lambda\in\rho(T_1)\wedge\rho(T_2)$，并且

$$(\lambda I-T)^{-1}=(\lambda I-T_1)^{-1}\oplus(\lambda I-T_2)^{-1}\text{[1]}. \tag{4.10}$$

(iii) $\sigma(T)=\sigma(T_1)\cup\sigma(T_2)$.

本定理也和 Hilbert 情况一样地证明.

定理 4.5 设 A 是完备的不定度规空间 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上自共轭算子. γ 是开上半平面上 (Jordan 闭曲线构成的)围道，$\gamma\in\rho(A)$，γ 内部所包含的 A 的谱记为 σ_γ. 那末

$$P_\gamma^+=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma(\lambda I-A)^{-1}d\lambda,\ P_\gamma^-=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\bar\gamma}(\lambda I-A)^{-1}d\lambda, \tag{4.11}$$

$$(\bar\gamma=\{\bar\lambda/\lambda\in\gamma\})$$

具有下列性质:

(i)
$$(P_\gamma^+)^{\dagger}=P_\gamma^-,\quad (P_\gamma^-)^{\dagger}=P_\gamma^+, \tag{4.12}$$

$$P_{\gamma'}^+=P_\gamma^+,\quad P_{\gamma'}^-=P_\gamma^-, \tag{4.13}$$

其中 γ' 是另一个围道，$\gamma'\in\rho(A)$，内部仅含有 A 的谱 σ_γ. 同时还有

$$(P_\gamma^+)^2=P_\gamma^+,\ (P_\gamma^-)^2=P_\gamma^-, \tag{4.14}$$

$$P_\gamma^+P_\gamma^-=0=P_\gamma^-P_\gamma^+, \tag{4.15}$$

$$(\mu I-A)^{-1}P_\gamma^+=P_\gamma^+(\mu I-A)^{-1},\ (\mu I-A)^{-1}P_\gamma^-=P_\gamma^-(\mu I-A)^{-1}\quad(\mu\in\rho(A)), \tag{4.16}$$

$$AP_\gamma^+=P_\gamma^+A,\quad AP_\gamma^-=P_\gamma^-A\text{[2]}. \tag{4.17}$$

(ii) 令 $P_\gamma=P_\gamma^++P_\gamma^-$，那末 P_γ 是 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上投影算子，并且 $P_\gamma\Pi$ 约化 A.

(iii) $P_{\gamma'}=P_\gamma$ (γ' 同(4.13)).

(iv) $\sigma(A|_{P_\gamma\Pi})=\sigma_\gamma\cup\bar\sigma_\gamma(\bar\sigma_\gamma=\{\bar\lambda|\lambda\in\sigma_\gamma\})$.

---

1) 显然，此式中三个算子 I 应分别是 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$, $(L,(\cdot,\cdot))$, $(L^{\perp},(\cdot,\cdot))$ 上单位算子. 在容易混淆时，我们才用下标形式 I_Π, I_L, $I_{L^\perp}$ 加以区分. 今后都类似这样处理.

2) 这两个式子在 $\mathscr{D}(A)$ 上成立.

(v) $\sigma(A|_{(I-P_\gamma)\Pi}) = \sigma(A) - (\sigma_\gamma \cup \bar{\sigma}_\gamma)$.

证 (i) 是用通常的 Riesz 方法得到的.

由 (4.12),(4.14),(4.15) 可知, P_γ 是投影算子. 由 (4.16) 可知, $P_\gamma\Pi$ 约化 $(\mu I - A)^{-1}(\mu \in \rho(A))$, 从而 $P_\gamma\Pi$ 约化 A, 即 (ii) 成立.

由 (4.13) 直接可得 (iii). 下面证明 (iv),(v).

当 A 是有界算子时,由 Riesz 的谱理论知道

$$\sigma(A|_{P_\gamma^+\Pi}) = \sigma_\gamma, \ \sigma(A|_{P_\gamma^-\Pi}) = \bar{\sigma}_\gamma, \tag{4.18}$$

$$\sigma(A|_{(I-P_\gamma^+)\Pi}) = \sigma(A) - \sigma_\gamma, \sigma(A|_{(I-P_\gamma^-)\Pi}) = \sigma(A) - \bar{\sigma}_\gamma. \tag{4.19}$$

当 A 是无界算子时,在假设中已蕴涵 $\rho(A) \neq \phi$. 可任取 $\mu \in \rho(A)$,作变数变换 (围道 γ 也作相应变换)

$$\lambda \longmapsto (\mu - \lambda)^{-1}, \ \gamma \longmapsto \gamma_\mu \tag{4.20}$$

代替无界算子 A 而考察有界算子 $(\mu I - A)^{-1}$,利用(4.18),(4.19),先对 $(\mu I - A)^{-1}$ 已成立(当然应该用γ_μ代替(4.18)、(4.19) 中 γ),从而得到对 A 也成立. 由此易知 (iv),(v) 成立. 证毕.

定理 4.6 设 A 是完备的不定度规空间 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上自共轭算子. γ 是开上半平面上 (Jordan 闭曲线构成的) 围道, $\gamma \in \rho(A)$, γ 内部所包含的 A 的谱记为 σ_γ. 那末 $P_\gamma^+\Pi, P_\gamma^-\Pi$ 必是 Π 的闭的零性子空间,并且 $\{P_\gamma^+\Pi, P_\gamma^-\Pi\}$ 是偶对.

证 对任何 $x, y \in P_\gamma^+\Pi$, 由 (4.12),(4.15) 得到

$$(x, y) = (P_\gamma^+x, P_\gamma^+y) = (x, P_\gamma^-P_\gamma^+y) = 0, \tag{4.21}$$

即 $P_\gamma^+\Pi$ 是零性子空间. 显然, $P_\gamma^+\Pi = \mathscr{N}(I - P_\gamma^+)$, 所以 $P_\gamma^+\Pi$ 是闭的.

同样,$P_\gamma^-\Pi$ 也是闭的零性子空间.

因为 $P_\gamma^+ + P_\gamma^-$ 是 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上投影算子, 根据定理 4.1 的 (iii), $(P_\gamma^+ + P_\gamma^-)\Pi$ 是完备子空间, 所以 $\{P_\gamma^+\Pi, P_\gamma^-\Pi\}$ 是偶对. 证毕.

推论 4.7 在定理 4.6 的假设下, 如果 $\lambda_0 \in \sigma_\gamma \cap \sigma_p(A)$, 那末 $\overline{\Phi_{\lambda_0}(A)} \subset P_\gamma^+\Pi$.

特别，当 $\Pi=\Pi_K$ 时，$\sigma_\gamma\subset\sigma_p(A)$，并且

$$P_\gamma^+\Pi_K=\mathrm{span}\{\Phi_\lambda(A)\mid\lambda\in\sigma_\gamma\}. \tag{4.22}$$

证 由于 $\Pi=P_\gamma^+\Pi+(I-P_\gamma^+)\Pi$，$P_\gamma^+(I-P_\gamma^+)=0$，所以

$$\Pi=P_\gamma^+\Pi\dotplus(I-P_\gamma^+)\Pi. \tag{4.23}$$

由(4.17)，$AP_\gamma^+=P_\gamma^+A$，$A(I-P_\gamma^+)=(I-P_\gamma^+)A$ 在 $\mathscr{D}(A)$ 上成立，从而

$$\mathscr{D}(A)=(\mathscr{D}(A)\cap P_\gamma^+\Pi)\dotplus(\mathscr{D}(A)\cap(I-P_\gamma^+)\Pi), \tag{4.24}$$

并且对任何自然数 n，以及 $x\in\mathscr{D}(A^n)$，如果 $x=x_\gamma+x_\gamma'$，$x_\gamma\in P_\gamma^+\Pi$，$x_\gamma'\in(I-P_\gamma^+)\Pi$，那末对任何复数 μ，还有

$$\begin{gathered}(A-\mu I)^k x_\gamma\in\mathscr{D}(A)\cap P_\gamma^+\Pi,\\ (A-\mu I)^k x_\gamma'\in\mathscr{D}(A)\cap(I-P_\gamma^+)\Pi,\ 1\leqslant k\leqslant n-1.\end{gathered} \tag{4.25}$$

当 $\lambda_0\in\sigma_\gamma\cap\sigma_p(A)$ 时，由(4.19)和(4.25)(取(4.25)中的 $\mu=\lambda_0$)可知，对任何非零 $x_\gamma'\in(I-P_\gamma^+)\Pi\cap\mathscr{D}(A)$，$(A-\lambda_0I)x_\gamma'\neq 0$。从而相应于 λ_0 的根子空间 $\Phi_{\lambda_0}(A)$ 中任何向量 x 必满足 $(I-P_\gamma^+)x=0$，即 $x\in P_\gamma^+\Pi$。因此，$\Phi_{\lambda_0}(A)\subset P_\gamma^+\Pi$，从而 $\overline{\Phi_{\lambda_0}(A)}\subset P_\gamma^+\Pi$。

特别，当 $\Pi=\Pi_K$ 时，从 $P_\gamma^+\Pi$ 是零性空间立即可以推知 $\dim P_\gamma^+\Pi\leqslant K$。而有限维空间中算子的谱全是特征值，所以 σ_γ 只能是由特征值所构成的。又因为 $\Phi_\lambda(A)\subset P_\gamma^+\Pi$ 对于 $\lambda\in\sigma_\gamma$ 成立，所以(4.22)成立。证毕。

推论 4.8 设 A 是 Π_K 空间上自共轭算子。那末所有 A 的非实谱必是特征值，并且存在有限个完备子空间 $\Pi^{(0)},\Pi^{(\lambda_1)},\cdots,\Pi^{(\lambda_l)}$ $(l\leqslant K)$，使得

(i) $\Pi=\Pi^{(0)}\oplus\Pi^{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus\Pi^{\lambda_l}$。

(ii) $\Pi^{(0)}$，$\Pi^{\lambda_i}(i=1,2,\cdots,l)$ 都约化 A。

(iii) A 在 Π^{λ_i} 上只有两个非实的谱点 λ_i，$\bar\lambda_i$，而它们都是特征值，而 A 在 $\Pi^{(0)}$ 上只有实谱。

证 显然，主要是在于证明 A 的非实谱必是特征值。

今假设 $\zeta\in\sigma(A)$，$I_m\zeta\neq 0$，并且 $\zeta\bar{\in}\sigma_p(A)$。我们将分两种情况来讨论。

如果 $\zeta\in\sigma_r(A)$[1]，那末 $\bar{\zeta}\in\sigma_p(A)$。但是，算子的剩余谱 $\sigma_r(A)$ 是开集，因而存在 $\bar{\zeta}$ 的邻域 $O(\bar{\zeta})$，其中每个点都是 A 的特征值。显然，这与 Π_K 上自共轭算子在实轴外的特征值只有有限个性质相矛盾。

如果 $\zeta\in\sigma_a(A)$[2]，因为 $\bar{\zeta}\bar{\in}\sigma_p(A)$，所以 $\overline{\mathscr{R}(A-\zeta I)}=\mathscr{R}(A-\zeta I)$（见§3 引理 3.6）。又因为 $A-\zeta I$ 是 $\mathscr{D}(A)$ 到 $\mathscr{R}(A-\zeta I)$ 的双射，并且是闭算子，从而 $(A-\zeta I)^{-1}$ 是 $\overline{\mathscr{R}(A-\zeta I)}=\mathscr{R}(A-\zeta I)$ 到 $\overline{\mathscr{D}(A)}$ 的闭算子。由闭图象定理，$(A-\zeta I)^{-1}$ 是定义在 $\mathscr{R}(A-\zeta I)$ 上的有界算子。这样，如果 $\mathscr{R}(A-\zeta I)\neq\Pi_K$，那末必有 $\zeta\in\sigma_r(A)$，这与 $\zeta\in\sigma_a(A)$ 相冲突。如果 $\mathscr{R}(A-\zeta I)=\Pi_K$，那末就有 $\zeta\in\rho(A)$，这又与 $\zeta\in\sigma_a(A)$ 相冲突。

这样，所有 A 的非实谱必是特征值。

记上开半平面特征值全体为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_l$。对每个 λ_i，取一个仅包含 λ_i 而不再含 A 的其它谱的围道 γ_i。相应于定理 4.5，作 $\Pi^{\lambda_i}=P_{\gamma_i}\Pi_K=(P^+_{\gamma_i}+P^-_{\gamma_i})\Pi_K$，$i=1,2,\cdots,l$。取 $\Pi^0=(\Pi^{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus\Pi^{\lambda_l})^\perp$，易知这样取出的 $\Pi^0,\Pi^{\lambda_1},\cdots,\Pi^{\lambda_l}$ 就满足 (i),(ii),(iii)。证毕。

显然，类似于定理 4.5，4.6 以及推论 4.7，4.8 的结论，对酉算子也成立。下面只将结论写出，不再证明。

定理 4.9 设 V 是完备的不定度规空间 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上的保距算子，$\overline{\mathscr{D}(V)}=\overline{\mathscr{R}(V)}=\Pi$，并且 $V^+=V^{-1}$。又设 γ 是闭单位圆外（Jordan 闭曲线构成的）围道，$\gamma\in\rho(V)$，γ 内部所包含的 V 的谱记为 σ_γ。那末

$$P^+_\gamma=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma(\lambda I-V)^{-1}d\lambda,\ P^-_\gamma=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\bar{\gamma}^{-1}}(\lambda I-V)^{-1}d\lambda,\qquad(4.26)$$

$$\gamma^{-1}=\left\{\frac{1}{\lambda}\,\middle|\,\lambda\in\gamma\right\}.$$

---

1),2) $\sigma_a(T)$,$\sigma_r(T)$ 分别称为 T 的"近似谱"、"剩余谱"。在 Banach 空间中，近似谱点 λ 的定义是：存在一列单位向量 $\{x_n\}$，使得 $\|(T-\lambda I)x_n\|\to0(n\to\infty)$，$\sigma_a(T)$ 是近似谱点全体，而规定 $\sigma_r(T)=\sigma(T)-\sigma_a(T)$。

满足定理 4.5 中 (i)—(v) ((i)—(v) 中的 A, γ 分别以 V, γ^{-1} 代替),并且 $P_\gamma^+\Pi$, $P_\gamma^-\Pi$ 是构成偶对的两个零性子空间.

特别,如果 $\lambda_0\in\sigma_\gamma\cap\sigma_p(V)$, 那末 $\overline{\Phi_{\lambda_0}(V)}\subset P_\gamma^+\Pi$. 而当 $\Pi=\Pi_K$ 时,σ_γ 中点全是特征值,并且

$$P_\gamma^+\Pi_K=\operatorname{span}\{\Phi_\lambda(V)\,|\,\lambda\in\sigma_\gamma\}.$$

推论 4.10 设 U 是 Π_K 空间上酉算子. 那末不在单位圆周上的谱必是特征值, 并且存在有限个完备子空间 Π^0, Π^{λ_1}, $\cdots$, Π^{λ_l} $(l\leqslant K)$,使得

(i) $\Pi=\Pi^0\oplus\Pi^{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus\Pi^{\lambda_l}$.

(ii) Π^0, $\Pi^{\lambda_i}(i=1,2,\cdots,l)$ 都约化 U.

(iii) U 在 Π^{λ_i} 中只有两个谱点 λ_i, $\dfrac{1}{\bar\lambda_i}(|\lambda_i|\neq 1)$, 它们都是酉約特征值,而 U 在 Π^0 上的谱全在单位圆周上.

第三章 Π_K 空间上酉算子和自共轭算子

本章介绍 Π_K 空间上酉算子和自共轭算子的谱理论。主要是建立 Π_K 空间上酉算子和自共轭算子的三角模型，再利用三角模型给出酉算子和自共轭算子的谱系、开方演算、以及在谱论上其它方面的一些应用。

§1 K 维半负不变子空间

本节主要任务是证明，Π_K 空间上任何一个酉算子或自共轭算子必有一个K维半负不变子空间（是 Π_K 的极大半负不变子空间），且任何一族可交换的酉算子或自共轭算子必有公共的K维半负不变子空间。这是不定度规空间算子谱论最基本结果之一。我们的谱理论就是建立在这个基础上的。

显然，在研究单个算子的不变子空间的存在性问题中，我们可不妨假设 Π_K 是可析的。事实上，对任何有界线性算子 T，任取 Π_K 的一个K维负子空间 H_-，那末 $L=\overline{\mathrm{span}}\{T^nH_-|n=0,1,2,\cdots\}$ 就是对T不变的、可析的 $\Pi_{K'}$ $(K'=K)$ 空间。只要将T限制在 L 上研究就可以了。所以本节中总是假设 Π_K 是可析的。

以后为了叙述的方便，常把极大负性空间维数有限的（极大正性空间维数可以无限，也可以有限的）完备不定度规空间统称为"Π_K 型"空间。

1. 保半负算子 我们将对比酉算子更为一般的算子——保半负算子，证明它有K维半负不变子空间。

定义 1.1 设T是 Π_K 空间上的线性算子。如果对任何 $x\in\mathscr{D}(T)$，$(x,x)\leqslant 0$，都有

$$(Tx,Tx)\leqslant 0, \tag{1.1}$$

那末称 T 是保半负的算子.

定义 1.2 设 T 是 Π_K 上稠定线性算子. 如果对任何 $x\in\mathscr{D}(T)$, 都有

$$(Tx, Tx)\leqslant(x, x), \tag{1.2}$$

那末称 T 是 Π_K 上压缩算子.

关于压缩算子, 在第四章 § 3 中将专门讨论.

引理 1.1 如果 T, V, U 分别是 Π_K 空间上压缩算子、保距算子、酉算子,那末 T, V, U 都是保半负的.

这个引理是显然的.

注意 定义在全空间的保半负算子可能是无界的.

例 1.1 设 $\Pi_K=H_-\oplus H_+$ 是正则分解, $\{e_i^-|i=1, 2, \cdots, K\}$, $\{e_i^+|i=1, 2, \cdots\}$ 分别是 $(H_-, -(\cdot,\cdot))$, $(H_+, (\cdot,\cdot))$的完备就范直交系. 令 $z=e_1^-+e_1^+$, f 是 Π_K 上某个无界线性泛函. 显然,

$$T: x\longmapsto f(x)z, \ x\in\Pi_K \tag{1.3}$$

就是无界线性算子,但 $\mathscr{D}(T)=\Pi_K$, 并且 T 是保半负的.

引理 1.2 设 T 是 Π_K 上稠定的线性算子, 如果对每个 $x\in\mathscr{D}(T)$, $(x, x)\leqslant 0$, 都有

$$(Tx, Tx)\leqslant(x, x), \tag{1.4}$$

那末 T 必是 Π_K 上稠定的连续算子. 从而 T 可以唯一地延拓成定义在整个 Π_K 上的并满足 (1.4) 条件的有界线性算子.

证 从 (1.4) 易知: 对任何负向量 $x\in\mathscr{D}(T)$, $Tx\neq 0$.

令 $\Pi_K=H_-\oplus H_+$ 是正则分解. 由于 $\overline{\mathscr{D}(T)}=\Pi_K$, 所以可不设 $H_-\subset\mathscr{D}(T)$. 根据上面已经指出的事实, 立即可知 TH_- 也是 Π_K 的 K 维负子空间. 从而

$$\Pi_K=TH_-\oplus(TH_-)^\perp, \tag{1.5}$$

并且是正则分解. 记由 (1.5) 产生的范数为 $\|\cdot\|_1$, 而 $\Pi_K=H_-\oplus H_+$ 产生的范数为 $\|\cdot\|$; P_-^1, P_+^1 分别表示 Π_K 在 TH_-, $(TH_-)^\perp$ 的投影,而 $P_\pm$ 分别是 Π_K 在 $H_\pm$ 上投影. 显然,要证明 T 是连续的, 等价于证明 $P_-^1TP_-$, $P_-^1TP_+$, $P_+^1TP_+$ 都是连续的.

由于 $\dim H_- = K < \infty$，所以 $P_-^{\perp}TP_-$ 是连续的.

下面证明 $P_-^{\perp}TP_+$ 必是 $H_+ \cap \mathscr{D}(T)$ 到 TH_- 的连续算子，否则必有 $x_n \in H_+ \cap \mathscr{D}(T)$，$\|x_n\| = 1$，$n = 1, 2, \cdots$，但 $\|P_-^{\perp}Tx_n\|_1 \to \infty (n \to \infty)$. 由于 $P_-^{\perp}TP_-$ 是 H_- 到 TH_- 的拓扑映射，并且 $TP_- = P_-^{\perp}TP_-$，因而存在 $y_n \in H_-$，$n = 1, 2, \cdots$，使得

$$Ty_n = -P_-^{\perp}Tx_n, \text{ 且 } \|y_n\| \to \infty (n \to \infty). \tag{1.6}$$

由 (1.6) 可知，$y_n + x_n \in \mathscr{D}(T)$，并且对充分大的 n_0 以后的 n，$y_n + x_n$ 是负向量. 从而当 $n \geqslant n_0$ 时，

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant (P_+^{\perp}Tx_n, P_+^{\perp}Tx_n) = (T(x_n + y_n), T(x_n + y_n)) \\ &\leqslant (x_n + y_n, x_n + y_n) < 0, \end{aligned} \tag{1.7}$$

但这是不可能的. 所以 $P_-^{\perp}TP_+$ 是连续的.

再证 $P_+^{\perp}TP_+$ 也必是 $H_+ \cap \mathscr{D}(T)$ 到 $(TH_-)^{\perp}$ 的连续算子. 如果不对，则存在 $x_n \in H_+ \cap \mathscr{D}(T)$，$\|x_n\| = 1$，$n = 1, 2, \cdots$，而

$$\|P_+^{\perp}Tx_n\|_1 \to \infty \ (n \to \infty). \tag{1.8}$$

任取 $y \in H_-$，但 $\|y\|^2 = 2$. 显然 $y + x_n \in \mathscr{D}(T)$ $(n = 1, 2, \cdots)$，并且都是负向量，从而

$$\begin{aligned} (y + x_n, y + x_n) &\geqslant (T(y + x_n), T(y + x_n)) \\ &= (Ty + P_-^{\perp}Tx_n, Ty + P_-^{\perp}Tx_n) \\ &\quad + (P_+^{\perp}Tx_n, P_+^{\perp}Tx_n). \end{aligned} \tag{1.9}$$

由于 $P_-^{\perp}TP_+^{\perp}$ 是连续的，从而存在常数 M，使对任何 $x \in H_+ \cap \mathscr{D}(T)$，$\|P_-^{\perp}TP_+^{\perp}x\|_1 \leqslant M\|x\|$. 因为 $\|x_n\| = 1 (n = 1, 2, \cdots)$，所以固定 y 后，$\{(Ty + P_-^{\perp}Tx_n, Ty + P_-^{\perp}Tx_n)\}$ 是有界数列，而 $(y + x_n, y + x_n) = (y, y) + (x_n, x_n) = -1$. 由此可见，在 (1.8) 成立的前提下，(1.9) 不能成立. 从而 $P_+^{\perp}TP_+$ 是连续的. 证毕.

推论 1.3 Π_K 空间上稠定压缩算子必是连续算子，从而必可唯一地延拓成全空间上压缩算子(自然也是连续的).

根据引理 1.2，以后，Π_K 上稠定的线性算子 T，如果对任何

$x \in \mathscr{D}(T)$, $(x, x) \leqslant 0$, 满足 $(Tx, Tx) \leqslant (x, x)$, 特别是 T 是稠定压缩算子时，我们总假定这种算子是定义在整个 Π_K 上，并且是有界的。

引理 1.4 设 T 是 Π_K 上有界线性算子。如果对任何 $x \in \Pi_K$, $(x, x) \leqslant 0$, 都有

$$(Tx, Tx) \leqslant (x, x), \tag{1.10}$$

那末对任何非零的半负向量 x, Tx 也不是零向量[1]。

证 如果有 $x \neq 0$, $(x, x) \leqslant 0$, 使得 $Tx = 0$. 那末由 (1.10) 易知，x 必是零性向量. 任取 $y \in \Pi_K$, $(y, x) \neq 0$, $\alpha \in \mathbf{C}$, 有

$$(\alpha x + y, \alpha x + y) = 2\mathrm{Re}(\alpha x, y) + (y, y). \tag{1.11}$$

特别是取 $\alpha = re^{-i\theta}$, $\theta = \pi + \arg(x, y)$ 时，显然，若 $r > (y, y)/|(x, y)|$, 则 $\alpha x + y$ 是负向量. 因而由 (1.10) 得到

$$\begin{aligned}(Ty, Ty) &= (T(\alpha x + y), T(\alpha x + y)) \\ &\leqslant (\alpha x + y, \alpha x + y) \\ &= -2r|(x, y)| + (y, y).\end{aligned} \tag{1.12}$$

在 (1.12) 中，令 $r \to \infty$, 立即发生 $(Ty, Ty) < -\infty$ 的矛盾. 从而 $Tx = 0$. 证毕。

2. K 维半负不变子空间 设 $\Pi_K = H_- \oplus H_+$ 是正则分解，根据第一章引理 3.2, Π_K 上任何 K 维半负（即 Π_K 上极大半负）子空间 L 必然是 L_X, 其中 X 是 $\mathscr{D}(X) = H_-$ 到 H_+ 的压缩算子. 在正则分解 $\Pi_K = H_- \oplus H_+$ 之下，任何线性算子 $T(\mathscr{D}(T) = \Pi_K)$ 可以表示成 2×2 方阵：

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{matrix} H_- \\ H_+ \end{matrix}, \tag{1.13}$$

其中 $A = P_-TP_-$, $B = P_-TP_+$, $C = P_+TP_-$, $D = P_+TP_+$. T 为有界算子的充要条件是，A, B, C, D 同时都是有界的.

因为 $L_X = \{\{x, Xx\} | x \in H_-\}$, 所以从 (1.13) 可知

$$TL_X = \{\{(A + BX)x, (C + DX)x\} | x \in H_-\}, \tag{1.14}$$

---

1) 本引理对一般的完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 也成立.

因而 L_X 是T的不变子空间的充要条件是

$$(C+DX)x=X(A+BX)x,\ x\in H_-. \tag{1.15}$$

换言之，L_X 为T的K维半负不变子空间的充要条件是，下列算子方程

$$C+DX=X(A+BX) \tag{1.16}$$

含有满足条件 $\|Xx\|\leqslant\|x\|$ 的解X.

定理 1.5 设T是 Π_K 上有界线性算子. 如果对任何半负向量x,

$$(Tx\ Tx)\leqslant(x,x), \tag{1.17}$$

那末存在这样的K维半负不变子空间 $\mathscr{L}$, $T|\mathscr{L}$ 的所有特征值 λ 满足 $|\lambda|\geqslant1$.

证 设 $\Pi_K=H_-\oplus H_+$ 是正则分解，Π_K 中一切K维半负子空间必是形如 L_X，其中X是 $(H_-,-(\cdot,\cdot))$ 到 $(H_+,(\cdot,\cdot))$的压缩算子，$\mathscr{D}(X)=H_-$. 现在要找出适合方程(1.16)的X.

根据引理 1.4，T将K维半负子空间变成K维半负子空间；由(1.14)可知，H_- 到 H_- 的线性算子 $A+BX$ 是可逆的，因而 L_X 为T的不变子空间的充要条件是X适合下列方程

$$(C+DX)(A+BX)^{-1}=X. \tag{1.18}$$

换言之，T具有K维半负不变子空间等价于映射 F: $X\to(C+DX)(A+BX)^{-1}$ 有一个不动点X，而这个不动点是 $(H_-,-(\cdot,\cdot))$ 到 $(H_+,(\cdot,\cdot))$ 的压缩算子，并且 $\mathscr{D}(T)=H_-$.

下面将用 Schauder 不动点定理证明 $F(X)$ 具有 $\|X\|\leqslant1$ $(\mathscr{D}(X)=H_-)$的不动点：在 $(H_-,-(\cdot,\cdot))$，$(H_+,(\cdot,\cdot))$ 中分别取完备就范直交系 $\{e_i^-|1\leqslant i\leqslant K\}$，$\{e_i^+|i=1,2,\cdots\}$. 令

$$x_i^+=Xe_i^-,\ i=1,2,\cdots,K. \tag{1.19}$$

显然，$\|X\|\leqslant1$ 的充要条件是对任何 $\alpha_1,\cdots,\alpha_K\in\mathbf{C}$,

$$\left\|\sum_i\alpha_ix_i^+\right\|\leqslant\sum_i|\alpha_i|^2. \tag{1.20}$$

这样，H_- 到 H_+ 的压缩算子X，在基 $\{e_i^-\}$，$\{e_i^+\}$ 之下，既可表示成$\infty\times K$的矩阵，又可视为 Hilbert 空间 $\tilde{l}=l^2\oplus l^2\oplus\cdots\oplus l^2$

(K 个 l^2 的直交和) 中向量 $(x_1^+, x_2^+, \cdots, x_K^+)$，令 $\mathscr{K}$ 是 $\tilde{l}$ 中满足 (1.20) 的向量 $x^+ = (x_1^+, \cdots, x_K^+)$ 的全体. 显然,映射

$$L_X \longmapsto x^+ = (x_1^+, \cdots, x_K^+) \tag{1.21}$$

是 Π_K 上所有极大半负子空间全体到 $\tilde{l}$ 的子集 $\mathscr{K}$ 上的双射. 注意,如将 $x_j^+(j = 1, 2, \cdots, K)$ 用在基 $\{e_i^+\}$ 之下的座标表示,并写成行的形式,那末 x^+ 正是算子 X 在 $\{e_i^-\}$, $\{e_i^+\}$ 之下的矩阵表示. 因此,只要证明有满足 (1.20) 的 x^+，使得 $F(x^+) = x^+$ 就可以了.

显然，$\mathscr{K}$ 是 $\tilde{l}$ 中强有界、强闭的凸集，自然它是弱有界的、弱闭的凸集. 由于 $\tilde{l}$ 是自反的，$\mathscr{K}$ 便是弱紧的. 再利用 A, B, C, D 的有界性，$A + Bx^+$ 是 $K \times K$ 的非奇方阵，$\mathscr{K}$ 是 $\tilde{l}$ 中有界集等,易知 $F(x^+)$ 是 $\mathscr{K}$ 到 $\mathscr{K}$ 的弱连续映射. 根据 Schauder 定理，存在不动点 x_0^+. 由 x_0^+ 所相应的 X_0 产生的 L_{X_0} 就是 T 的极大半负不变子空间.

下面分两步来证明定理中其余的结论.

(I) 假设 T 满足下列条件: 对任何 $x \in \Pi_K$, $(x, x) \leqslant 0(x \neq 0)$ 成立

$$(Tx, Tx) < (x, x). \tag{1.22}$$

显然,满足 (1.22) 的 T 的任何半负不变子空间 L, 必是负子空间. 如果 $\lambda \in \sigma_p(T|_{\mathscr{L}})$, x 是相应 λ 的特征向量,那末从 (1.22) 就得到

$$|\lambda|^2(x, x) = (Tx, Tx) < (x, x) < 0,$$

从而 $|\lambda| > 1$.

(II) 对于一般的满足 (1.17) 的算子 T，先将 Π_K 上 K 维半负子空间 L_X 在基 $\{e_i^-\}$, $\{e_i^+\}$ 之下表示成 $\infty \times K$ 矩阵形式:

$$X = \begin{pmatrix} I \\ x^+ \end{pmatrix} \begin{matrix} H_- \\ H_+ \end{matrix}, \tag{1.23}$$

其中 I 是 H_- 上单位算子，$x^+ = (x_1^+, \cdots, x_K^+)$，并且每个 x_i^+ 都在基 $\{e_i^+\}$ 之下写成由它的座标所构成的行向量. 在基 $\{e_i^-\}$, $\{e_i^+\}$ 之下, T 也表示成 $\infty \times \infty$ 的阵. 显然 $\infty \times K$ 阵 X 为 T 的不变子空间的充要条件是: 存在某个 $K \times K$ 的阵 Λ(可以 $\det\Lambda = 0$),

使得

$$TX = X\Lambda. \tag{1.24}$$

在 (I) 情况下，Λ 可以取作 $(A + Bx^+)^{-1}$. 因此，只要能找到某个$K \times K$阵 Λ 以及适合条件(1.20)的 X 使得(1.24)成立，那末由 X 所决定的K维半负子空间就是T的不变子空间了.

对任何 $\varepsilon > 0$，作 Π_K 上算子 $A_\varepsilon = (I + \varepsilon)P_- + P_+$，其中 $P_\pm$ 是 Π_K 在 $H_\pm$ 上投影. 显然，$A_\varepsilon T$ 满足(1.22). 从而有 X_ε，Λ_ε，使得

$$T_\varepsilon X_\varepsilon = X_\varepsilon \Lambda_\varepsilon. \tag{1.25}$$

在基 $\{e_i^-\}$，$\{e_j^+\}$ 之下，将 T，T_ε，X_ε，以及 Λ_ε 都表示成矩阵:

$$T = (t_{pq}),\ T_\varepsilon = (t_{pq}(\varepsilon)),\ p, q = 1, 2, \cdots, \tag{1.26}$$

$$t_{pq}(\varepsilon) = (1 + \varepsilon)t_{pq},\ p = 1, 2, \cdots, K,\ q = 1, 2, \cdots, \tag{1.27}$$

$$t_{pq}(\varepsilon) = t_{pq},\ p = K + 1, K + 2, \cdots,\ q = 1, 2, \cdots, \tag{1.28}$$

$$\Lambda_\varepsilon = (\lambda_{jk}(\varepsilon)),\ j, k = 1, 2, \cdots, K, \tag{1.29}$$

$$X_\varepsilon = (x_1(\varepsilon), \cdots, x_K(\varepsilon)) = \left(\frac{I}{x^+(\varepsilon)}\right),$$

$$x^+(\varepsilon) = (P_+x_1(\varepsilon), \cdots, P_+x_K(\varepsilon)). \tag{1.30}$$

从 T，T_ε 的有界性以及(1.27)，(1.28)，易知

$$\sum_{q=1}^{\infty} |t_{pq}|^2 < \infty,\ \sum_{q=1}^{\infty} |t_{pq}(\varepsilon)|^2 < \infty,\ p = 1, 2, \cdots, \tag{1.31}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{q=1}^{\infty} |t_{pq}(\varepsilon) - t_{pq}|^2 = 0. \tag{1.32}$$

根据(1.25)，

$$T_\varepsilon x_k(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{K} \lambda_{jk}(\varepsilon)x_j(\varepsilon),\ k = 1, 2, \cdots, K. \tag{1.33}$$

由此可见，T_ε 在 L_{X_ε} 上的特征值就是阵 Λ_ε 的特征值. 反之也真. 由于 X_ε 的形式(1.23)，所以有

$$x_j^p(\varepsilon) = \delta_{pj},\ p, j = 1, 2, \cdots, K, \tag{1.34}$$

$$\sum_{p=K+1}^{\infty} |x_j^p(\varepsilon)|^2 \leqslant 1,\ j = 1, 2, \cdots, K, \tag{1.35}$$

其中 $x_j^p(\varepsilon)=(x_j(\varepsilon), e_p^-)$ $(p=1, 2,\cdots, K)$, $x_j^p(\varepsilon)=(x_j(\varepsilon), e_{p-K}^+)$ $(p=K+1, K+2,\cdots)$. 因而存在一列 $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n\to 0$, 并使得下面极限存在

$$\lim_{n\to\infty} x_j^p(\varepsilon_n)=x_j^p,\ j=1, 2,\cdots, p=1, 2,\cdots,K. \quad (1.36)$$

根据(1.34), (1.35), 显然有 $x_j^p=\delta_{pj}$, $p, j=1, 2,\cdots, K$, 并且

$$\sum_{j=K+1}^{\infty}|x_j^p|^2\leqslant 1,\ p=1, 2,\cdots,K. \quad (1.37)$$

取 $X=\left(\dfrac{I}{x^+}\right)=(x_1, x_2,\cdots, x_K)$, 而 $x_p=(x_j^p)$, $p=1, 2,\cdots,K$. 显然, L_X 是 Π_K 的K维半负子空间. 再由(1.31), (1.32)以及(1.36), 又有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{q=1}^{\infty} t_{pq}(\varepsilon_n)x_q^j(\varepsilon_n)=\sum_{q=1}^{\infty} t_{pq}x_q^j,$$
$$p=1, 2,\cdots,\quad j=1, 2,\cdots, K. \quad (1.38)$$

注意到 $x_j^p(\varepsilon)=\delta_{pj}$ $(p, j=1, 2,\cdots, K)$, 并利用(1.38), 立即从(1.33)可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_{jk}(\varepsilon_n)$ 存在,并且

$$\lambda_{jk}=\lim_{n\to\infty}\lambda_{jk}(\varepsilon_n)=\sum_{q=1}^{\infty} t_{jq}x_q^k,\ j, k=1, 2,\cdots, K.$$

固定 j, k, 再在(1.33)中取 $\varepsilon=\varepsilon_n$, 并令 $n\to\infty$, 就得到

$$\sum_{q=1}^{\infty} t_{jq}x_q^k=\sum_{l=1}^{K}\lambda_{lk}x_l^j,\ j=1, 2,\cdots,\ k=1, 2,\cdots, K,$$

即 $TX=X\Lambda$, 这里 $\Lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\Lambda_{\varepsilon_n}$. 由于$\Lambda$是特征值的模大于1的矩阵 Λ_{ε_n} 的极限,所以Λ的特征值的模不小于1。证毕.

推论 1.6 设T是 Π_K 上压缩算子 ($\mathscr{D}(T)=\Pi_K$), 那末T必有K维半负不变子空间, 并且T有着这样的K维半负不变子空间 $\mathscr{L}$, $T|_{\mathscr{L}}$ 的特征值的模不小于1。

本推论是显然的.

定理 1.7 设U是 Π_K 上酉算子, 那末必存在U的两个K维

半负不变子空间 $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$, 使得

(i) $U|_{\mathscr{L}_1}$(或 $U|_{\mathscr{L}_2}$) 的特征值的模都不大于(或不小于) 1.

(ii) U 在开单位圆内(或闭单位圆外)的特征值都是 $U|_{\mathscr{L}_1}$ (或 $U|_{\mathscr{L}_2}$) 的特征值,并且 U 相应的根子空间都包含在 $\mathscr{L}_1$(或$\mathscr{L}_2$)中.

证 如果 U 的谱 $\sigma(U)$ 全落在单位圆周上,根据定理 1.5, 存在 K 维半负不变子空间 $\mathscr{L}$, 这时取 $\mathscr{L}_i = \mathscr{L}(i=1, 2)$ 即为所求.

如果 U 的谱 $\sigma(U)$ 在开单位圆内不空[由于 $\sigma(U)$ 关于单位圆周对称, 从而 $\sigma(U)$ 在闭单位圆外也不空],那末由第二章推论 4.10, $\sigma(U)$ 不在单位圆周上的谱必是特征值. 令 σ_γ 是 $\sigma(U)$ 在开单位圆内的谱,根据第二章定理 4.9 和推论 4.10, 显然有 $\Pi_K=\Pi^{(0)}\oplus\Pi'$, $\Pi^{(0)}$ 约化 U, 并且 $U|_{\Pi^{(0)}}$ 的谱仅含在单位圆上, 而 $U|_{\Pi'}$ 的谱不含有单位圆周上点,并且

$$\Pi' = P_\gamma^+\Pi_K + P_\gamma^-\Pi_K,$$

$$P_\gamma^+\Pi_K = \text{span}\{\Phi_\lambda(U)\,|\,\lambda\in\sigma_\gamma\},\ P_\gamma^-\Pi_K = \text{span}\{\Phi_\lambda(U)\,|\,\lambda\in\sigma_{\bar\gamma^{-1}}\}.$$

根据已证明的事实, U 在 Π_K 型空间 $\Pi^{(0)}$ (不妨设 $\Pi^{(0)}=\Pi_{K'}$, $K'\leqslant K$) 中有极大半负不变子空间 $\mathscr{L}(\dim\mathscr{L}=K')$. 显然, 取 $\mathscr{L}_1=\mathscr{L}+P_\gamma^+\Pi_K$, $\mathscr{L}_2=\mathscr{L}+P_\gamma^-\Pi_K$ 就适合定理的要求. 证毕.

利用 Cayley 变换, 就得到 Π_K 上自共轭算子相应的结果.

定理 1.8 设 A 是 Π_K 空间上自共轭算子, 那末必存在 A 的两个 K 维半负不变子空间 $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$, 使得

(i) $A|_{\mathscr{L}_1}(A|_{\mathscr{L}_2})$ 的特征值全在闭上(下)半平面.

(ii) $\mathscr{L}_1(\mathscr{L}_2)$ 包含所有 A 在开上(下)半平面中的特征值的根子空间.

3. 交换算子族的公共 K 维半负不变子空间 先给几个引理.

引理 1.9 设 T_1, T_2 是 Π_K 上两个可交换的有界线性算子, λ 是 T_1 的特征值,相应的特征子空间 $\Phi_{\lambda 1}(T_1)$、根子空间 $\Phi_\lambda(T_1)$ 必是 T_2 的不变子空间, 并且根子空间中向量经 T_2 映射后的级不增加.

本引理是显然的.

引理 1.10 设L是 Π_K 的闭线性子空间，若 $L = N\oplus Z\oplus P$ 是L的标准分解，T是L到L的线性映射，并且对任何 $x\in L$，$(x, x)\leqslant 0$，总有

$$(Tx, Tx)\leqslant (x, x), \tag{1.39}$$

那末 $TZ\subset Z$.

证 对任何 $x\in L$，有唯一的分解 $x = n_x + z_x + p_x$，$n_x\in N$，$z_x\in Z$，$p_x\in P$. 令 P_N, P_Z, P_P 分别是如下三个线性算子:

$$P_N x = n_x,\ P_Z x = z_x,\ P_P x = p_x. \tag{1.40}$$

显然，当 $n\in N$，并且 $n\neq 0$ 时，由 (1.39) 可知，必有 $P_N n\neq 0$，即 P_N 是N到N的(线性)双射.

如果 $TZ\not\subset Z$，那末由 (1.39) 可知，必存在 $z\in Z$，分解

$$Tz = P_N Tz + P_Z Tz + P_P Tz$$

中的 $P_N Tz\neq 0$. 对于 $P_N T_z$，因为T将负性向量变成负性向量，并且 $\dim N<\infty$，所以必有 $n_1\in N$，使得

$$Tn_1 = P_N Tz + z' + p',\ z'\in Z,\ p'\in P, \tag{1.41}$$

从而

$$T(n_1 - z) = z' - P_Z Tz + p' - P_P Tz. \tag{1.42}$$

右边是半正向量，而 $n_1 - z$ 是负向量. 这和假设 (1.39) 相矛盾. 因此 $TZ\subset Z$. 证毕.

推论 1.11 设T, L 如引理 1.10，又如果T是L到L的双射，那末 $TZ = Z$.

这是引理 1.10 的直接推论.

引理 1.12 设 $T_1,\cdots,T_n$ 是 Π_K 上一族可交换的有界线性算子，并且对任何 $x\in\Pi_K$，$(x, x)\leqslant 0$，都有

$$(T_i x, T_i x)\leqslant (x, x),\ i = 1, 2,\cdots, n, \tag{1.43}$$

那末必存在 T_1 的某个特征值 λ，相应的 $\Phi_{\lambda\lambda}(T_1)$ 含有非零半负向量，并且对 T_1 的每个具有半负的特征向量的特征值 λ，在 $\Phi_{\lambda\lambda}(T_1)$ 中必有 $T_1,\cdots,T_n$ 的公共的半负特征向量 (即存在非零半负向量 $x\in\Phi_{\lambda\lambda}(T_1)$ 以及 $\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\mathbf{C}$，使得 $(T_1 - \lambda I)x = 0$，

$(T_i - \lambda_i I)x = 0 \ (i = 2, 3, \cdots, n)$.

证 根据定理 1.5，满足 (1.43) 的算子 T_1 必有 K 维半负不变子空间 $\mathscr{L}$. 设 λ 是 $T_1|_{\mathscr{L}}$ 的一个特征值，显然 $\Phi_{\lambda 1}(T_1)$ 中含有半负向量.

对 T_1 的任何具有半负特征向量的特征值 λ，作标准分解

$$\Phi_{\lambda 1}(T_1) = N \oplus Z \oplus P, \tag{1.44}$$

根据引理 1.9，$\Phi_{\lambda 1}(T_1)$ 是 $T_2, \cdots, T_n$ 的不变子空间，从 $T_2, \cdots, T_n$ 在 $\Phi_{\lambda 1}(T_1)$ 上满足 (1.43) 可知，$T_2, \cdots, T_n$ 满足引理 1.10 $(L = \Phi_{\lambda 1}(T_1))$ 的条件. 如果 $Z \neq \{0\}$，那末

$$T_i Z \subset Z, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.45}$$

由于 $\dim Z \leqslant K < \infty$，$T_1, \cdots, T_n$ 在 Z 上可交换，因此 $T_1, \cdots, T_n$ 在 Z 中必有公共的特征向量(它是零性的，自然是半负的).

如果 $Z = \{0\}$，那末 $\Phi_{\lambda 1}(T_1) = N \oplus P$ 是一个 Π_K 型空间，而 T_1 在 $\Phi_{\lambda 1}(T_1)$ 上是 λI，同时 $T_2, \cdots, T_n$ 在 $\Phi_{\lambda 1}(T_1)$ 上满足 (1.43)，并且是一族可交换的有界线性算子. 在 $\Phi_{\lambda 1}(T_1)$ 上用类似的方法讨论 $T_2, \cdots, T_n$，则易知引理成立. 证毕.

推论 1.13 设 $T_1, \cdots, T_n$ 是 Π_K 上一族可交换的压缩算子或酉算子，那末必存在 T_1 的某个特征值 λ，相应的 $\Phi_{\lambda 1}(T_1)$ 中必含有非零半负向量. 并且，对 T_1 的任何具有半负特征向量的特征值 λ，$T_1, \cdots, T_n$ 在 $\Phi_{\lambda 1}(T_1)$ 中必有公共的半负特征向量.

为了将引理 1.12 推广到无限个算子情况，再给一个引理.

引理 1.14 设 $\{L_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 是 Π_K 上一族闭线性子空间. 如果任意有限的交 $\bigcap_{i=1}^{n} L_{\alpha_i}$ 中都含有 p 维半负子空间，那末闭线性子空间 $L = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} L_\alpha$ 也必含有 p 维半负子空间.

证 令 $R_\alpha = L_\alpha^\perp$, $\alpha \in \Lambda$. 我们首先证明：对任何 $\Lambda_1 \subset \Lambda$,

$$\overline{\text{span}}\{R_\alpha | \alpha \in \Lambda_1\} = \Big(\bigcap_{\alpha \in \Lambda_1} L_\alpha\Big)^\perp. \tag{1.46}$$

事实上，当 $\alpha \in \Lambda_1$ 时，$R_\alpha \subset \Big(\bigcap_{\alpha \in \Lambda_1} L_\alpha\Big)^\perp$，从而

$$\overline{\text{span}}\{R_\alpha|\alpha\in\Lambda_1\}\subset\Big(\bigcap_{\alpha\in\Lambda_1}L_\alpha\Big)^\perp. \tag{1.47}$$

反之，对任何 $x\in(\overline{\text{span}}\{R_\alpha|\alpha\in\Lambda_1\})^\perp$，必然

$$x\perp R_\alpha,\ \alpha\in\Lambda_1.$$

又根据第一章推论 3.6 的 (i)，$R_\alpha^\perp=L_\alpha^{\perp\perp}=L_\alpha$. 所以 $x\in\bigcap_{\alpha\in\Lambda_1}L_\alpha$，即

$$(\overline{\text{span}}\{R_\alpha|\alpha\in\Lambda_1\})^\perp\subset\bigcap_{\alpha\in\Lambda_1}L_\alpha. \tag{1.48}$$

由于 $\overline{\text{span}}\{R_\alpha|\alpha\in\Lambda_1\}$ 是闭的，由上式，

$$\overline{\text{span}}\{R_\alpha|\alpha\in\Lambda_1\}=(\overline{\text{span}}\{R_\alpha|\alpha\in\Lambda_1\})^{\perp\perp}\supset\Big(\bigcap_{\alpha\in\Lambda_1}L_\alpha\Big)^\perp. \tag{1.49}$$

从 (1.47)，(1.49) 立即知道 (1.46) 成立。

当 Λ_1 是 Λ 的任何有限子集时，根据假设 $\bigcap_{\alpha\in\Lambda_1}L_\alpha$ 含有 p 维半负子空间. 根据第一章定理 5.7 的 (iv)，$R_{\alpha_1}+R_{\alpha_2}+\cdots+R_{\alpha_n}$ 中极大负子空间的维数不超过 $K-p$. 由此易知，$\text{span}\{R_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 中极大负子空间维数也不超过 $K-p$. 再根据第一章定理 5.8 的 (iii) 知道，$\overline{\text{span}}\{R_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 中极大负子空间维数同样不超过 $K-p$. 从而 $(\overline{\text{span}}\{R_\alpha|\alpha\in\Lambda\})^\perp=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}L_\alpha$ 的极大半负子空间维数不小于 p. 证毕.

定理 1.15 设 $\{T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 是 Π_K 上一族可交换的有界线性算子，并且对任何 $x\in\Pi_K$，当 $(x,x)\leqslant 0$ 时，有

$$(T_\alpha x,T_\alpha x)\leqslant(x,x),\ \alpha\in\Lambda, \tag{1.50}$$

那末 $\{T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 必有公共的半负特征向量.

证 分三步来证明本定理.

(i) 不妨设每个 T_α 的任何含有半负特征向量的特征值 λ 所相应的特征子空间 $\Phi_{\lambda 1}(T_\alpha)$ 是非退化的.

事实上，如果对某个 $\alpha\in\Lambda$，有 $\lambda\in\sigma_p(T_\alpha)$，使得 $\Phi_{\lambda 1}(T_\alpha)$ 中含非零半负向量，但 $\Phi_{\lambda 1}(T_\alpha)$ 是退化的，那末必有下列标准分解

$$\Phi_{\lambda 1}(T_\alpha) = N \oplus Z \oplus P, \quad Z \neq \{0\}, \tag{1.51}$$

根据引理 1.10,

$$T_\beta Z \subset Z, \quad \beta \in \Lambda. \tag{1.52}$$

因为 $\dim Z \leqslant K < \infty$, 所以 $\{T_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 在 Z 中必有公共的半负(其实是零性)的特征向量,即定理已被证得.

(ii) 令 M_α 表示 T_α 的所有具有半负特征向量的特征值全体. 显然, $M_\alpha \neq \varnothing$ 对任何 $\alpha \in \Lambda$ 成立. 下面证明可不妨设 $M_\alpha (\alpha \in \Lambda)$ 都只是单点集.

事实上,如果 $\alpha_1 \in \Lambda$, M_{α_1} 不是单点集,则有 $\lambda \in M_{\alpha_1}$;根据第(i)步假设,

$$\Pi_K = \Phi_{\lambda 1}(T_{\alpha_1}) \oplus \Phi_{\lambda 1}(T_{\alpha_1})^\perp, \quad \Phi_{\lambda 1}(T_{\alpha_1}) = N_1 \oplus P_1, \tag{1.53}$$

$N_1 \oplus P_1$ 是 $\Phi_{\lambda 1}(T_{\alpha_1})$ 的正则分解. 显然, $1 \leqslant \dim N_1 \leqslant K$, 并且 $T_{\alpha_1}|_{\Phi_{\lambda 1}(T_{\alpha_1})} = \lambda I$. 因为 $\Phi_{\lambda 1}(T_{\alpha_1})$ 是 $\{T_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 的公共的不变子空间,则当把一切 $\{T_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 限制在 Π_K 型空间 $\Phi_{\lambda 1}(T_{\alpha_1})$ 上时,显然 $\{T_\alpha|_{\Phi_{\lambda 1}(T_{\alpha_1})} | \alpha \in \Lambda\}$ 在 $\Phi_{\lambda 1}(T_{\alpha_1})$ 上满足定理的条件,而 T_{α_1} 在 $\Phi_{\lambda 1}(T_{\alpha_1})$ 上含有半负特征向量的特征值仅有 λ. 用超限归纳法和第一步假设 (i), 并注意到引理 1.14, 立即可知必存在 Π_K 型空间 $\Pi_{K_0}(K \geqslant K_0 \geqslant 1)$, 它是 $\{T_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 的公共不变子空间,而相应的 $M_\alpha (\alpha \in \Lambda)$ 都是单点集.

(iii) 在 (i) 与 (ii) 的假设下证明定理成立.

令 $M_\alpha = \{\lambda_\alpha\}$, $\alpha \in \Lambda$. 根据引理 1.12, 易知对任何有限个指标 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, $\bigcap_{j=1}^{n} \Phi_{\lambda_{\alpha_j} 1}(T_{\alpha_j})$ 中至少含有一个非零半负向量,即 $\bigcap_{j=1}^{n} \Phi_{\lambda_{\alpha_j} 1}(T_{\alpha_j})$ 的极大半负子空间维数不小于 1. 由引理 1.14 知道, $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \Phi_{\lambda_\alpha 1}(T_\alpha)$ 必含有维数不小于 1 的半负子空间. 这个子空间中非零向量就是 $\{T_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 的公共的半负特征向量. 证毕.

推论 1.16 设 $\{T_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 是 Π_K 上一族可交换的压缩算子或酉算子. 对任何 $\alpha \in \Lambda$, T_α 的任何含有半负特征向量的特征

值 λ，在 $\Phi_{\lambda 1}(T_\alpha)$ 中必含有 $\{T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 的公共半负特征向量。

本推论是显然的。

定理 1.17 设 $\{T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 是 Π_K 上一族可交换的有界线性算子，并且对任何 $x\in\Pi_K$，$(x, x)\leqslant 0$ 有

$$(T_\alpha x, T_\alpha x)\leqslant(x, x),\ \alpha\in\Lambda. \tag{1.54}$$

如果满足下面两个条件之一，

(i) $\{T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 不存在公共的零性特征向量，

(ii) $\{T_\alpha^\dagger|\alpha\in\Lambda\}$ 也对任何 $x\in\Pi_K$，$(x, x)\leqslant 0$ 有

$$(T_\alpha^\dagger x, T_\alpha^\dagger x)\leqslant(x, x),\ \alpha\in\Lambda, \tag{1.55}$$

那末 $\{T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 必有公共的 K 维半负不变子空间。

证 （下面，我们按负性空间的维数用归纳法证明本定理）。当 $K=1$ 时，根据定理 1.15，$\{T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 有一个公共的半负特征向量 x_0，显然 $\text{span}\{x_0\}$ 就是 Π_1 空间上 $\{T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 的公共极大半负不变子空间。

设定理 1.17 在 Π_{K-1} 空间上已经成立，今证 Π_K 上也成立。

仍根据定理 1.15，$\{T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 在 Π_K 空间中必有一个公共的半负特征向量 x_0，$\text{span}\{x_0\}$ 仍是 $\{T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 的公共的不变子空间。下面分别按条件 (i)，(ii) 分两种情况加以证明。

(I) 按条件 (i)，x_0 是负向量，从而

$$\Pi_K=\text{span}\{x_0\}\oplus(\text{span}\{x_0\})^\perp.$$

记 $\Pi'=(\text{span}\{x_0\})^\perp$，显然 Π' 是 Π_{K-1} 空间，且对任何 $x'\in\Pi'$

$$T_\alpha x'=P'T_\alpha x'+P'_{x_0}T_\alpha x', \tag{1.56}$$

其中 P'，P'_{x_0} 分别是 Π_K 在 Π'，$\text{span}\{x_0\}$ 上的投影（按不定度规的直交投影算子）。显然，$\{P'T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 在 Π' 上是可交换的。

现在证明 $\{P'T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 在 Π' 上满足(1.54)条件。由于 x_0 是负特征向量，$T_\alpha x_0=\lambda_\alpha x_0\,(\alpha\in\Lambda)$。由条件 (1.54) 可知，$\lambda_\alpha\neq 0$ $(\alpha\in\Lambda)$。如果 $x'\in\Pi'$，$(x', x')\leqslant 0$，使得某个 $\alpha\in\Lambda$，

$$(P'T_\alpha x', P'T_\alpha x')>(x', x'), \tag{1.57}$$

记 $P_{x_0}T_\alpha x'=g(\alpha)x_0$，那末

$$T_\alpha\left(x'-\frac{g(\alpha)}{\lambda_\alpha}x_0\right)=P'T_\alpha x'; \tag{1.58}$$

显然 $x'-\frac{g(\alpha)}{\lambda_\alpha}x_0$ 是 Π_K 中半负向量，从而

$$\begin{aligned}(P'T_\alpha x', P'T_\alpha x') &= \left(T_\alpha\left(x'-\frac{g(\alpha)}{\lambda_\alpha}x_0\right), T_\alpha\left(x'-\frac{g(\alpha)}{\lambda_\alpha}x_0\right)\right)\\ &\leqslant \left(x'-\frac{g(\alpha)}{\lambda_\alpha}x_0, x'-\frac{g(\alpha)}{\lambda_\alpha}x_0\right)\leqslant (x', x').\end{aligned} \tag{1.59}$$

显然上式与(1.57)相矛盾，所以 $\{P'T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 在 Π' 上仍成立(1.54)。

再证 $\{P'T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 在 Π' 上没有公共零性特征向量. 事实上，如果有公共的零性特征向量 z，那末必存在 $\alpha\in\Lambda$，使得 $Px_0T_\alpha z\neq 0$（否则由(1.56)就得到 z 是 $\{T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 的公共的零性特征向量）. 对于这个 α，记 $P_{x_0}T_\alpha z$ 为 $g(\alpha)x_0$，类似地考察 $z-\frac{g(\alpha)}{\lambda_\alpha}x_0$，显然 $T_\alpha\left(z-\frac{g(\alpha)}{\lambda_\alpha}x_0\right)=P'T_\alpha z$ 是零性向量. 从而

$$\begin{aligned}0 &= \left(T_\alpha\left(z-\frac{g(\alpha)}{\lambda_\alpha}x_0\right), T_\alpha\left(z-\frac{g(\alpha)}{\lambda_\alpha}x_0\right)\right)\\ &\leqslant \left(z-\frac{g(\alpha)}{\lambda_\alpha}x_0,\ z-\frac{g(\alpha)}{\lambda_\alpha}x_0\right)\\ &= \left|\frac{g(\alpha)}{\lambda_\alpha}\right|^2(x_0, x_0)<0.\end{aligned} \tag{1.60}$$

但这是不可能的，所以 $\{P'T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 在 Π' 上又满足定理中的条件(i)。

按归纳法假设 $\{P'T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 在 Π' 上有公共的 $K-1$ 维半负不变子空间 $\mathscr{L}'$，显然 $\mathscr{L}=\operatorname{span}\{x_0, \mathscr{L}'\}$ 就是 $\{T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 的公共的 K 维半负不变子空间.

(II) 先设 $\{T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 的公共的半负特征向量 x_0 是负的. 这时，仍和(I)中一样可以证明(1.56)—(1.58)成立，即 $\{P'T_\alpha|\alpha\in$

$\Lambda\}$ 是 Π' 上满足 (1.54) 的可交换的有界算子族。

由于 $\operatorname{span}\{x_0\}$ 是 $\{T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 的公共的不变子空间，所以 $(\operatorname{span}\{x_0\})^\perp=\Pi'$ 是 $\{T_\alpha^\dagger|\alpha\in\Lambda\}$ 的公共的不变子空间．显然，Π' 上算子 $P'T_\alpha|_{\Pi'}$ 的共轭算子 $(P'T_\alpha|_{\Pi'})^\dagger$ 就是 $T_\alpha^\dagger|_{\Pi'}$，而 Π' 是 $\{T_\alpha^\dagger|\alpha\in\Lambda\}$ 的公共不变子空间，并且 $T_\alpha^\dagger(\alpha\in\Lambda)$ 也满足 (1.54)，从而 $\{P'T_\alpha|_{\Pi'}|\alpha\in\Lambda\}$ 的共轭算子族也在 Π' 上满足 (1.54) 条件。这样就证明了 $\{P'T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 在 Π' 上满足定理中的条件 (ii)．

按归纳法假设，$\{P'T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 在 Π' 上有公共的 $K-1$ 维半负不变子空间 $\mathscr{L}'$，易知 $\mathscr{L}=\operatorname{span}\{\mathscr{L}',x_0\}$ 是 $\{T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 的公共的 K 维半负不变子空间．

其次假设 $\{T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 的公共的半负特征向量 x_0 是零性的。令 $Z=\operatorname{span}\{x_0\}$，$Z$ 是零性子空间。显然，$Z^\perp$ 是 $\{T_\alpha^\dagger|\alpha\in\Lambda\}$ 的公共的不变子空间，注意到 $Z^\perp$ 可以分解成

$$Z^\perp=Z\oplus\Pi',\tag{1.61}$$

其中 Π' 是 Π_{K-1} 空间．由于 $T_\alpha^\dagger(\alpha\in\Lambda)$ 是 $Z^\perp\to Z^\perp$ 的，并且满足 (1.54) 条件，由引理 1.10，$T_\alpha^\dagger Z\subset Z(\alpha\in\Lambda)$．

因为 $T_\alpha^{\dagger\dagger}=T_\alpha(\alpha\in\Lambda)$，从 $T_\alpha^\dagger Z\subset Z\,(\alpha\in\Lambda)$ 又可得到 $T_\alpha Z^\perp\subset Z^\perp(\alpha\in\Lambda)$．

同样，令 P' 是 Π_K 到 Π' 的投影，从 $T_\alpha Z\subset Z$，$T_\alpha^\dagger Z\subset Z$；$T_\alpha Z^\perp\subset Z^\perp$，$T_\alpha^\dagger Z^\perp\subset Z^\perp$ 对任何 $\alpha\in\Lambda$ 成立，立即可知 $\{P'T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$，$\{P'T_\alpha^\dagger|\alpha\in\Lambda\}$ 是 Π' 上两个可交换的算子族．

对任何 $x'\in\Pi'$，$(x',x')\leqslant 0$，如记 $T_\alpha x'=g(\alpha)x_0+P'T_\alpha x'$，则有

$$\begin{aligned}(P'T_\alpha x',P'T_\alpha x')&=(g(\alpha)x_0+P'T_\alpha x',g(\alpha)x_0+P'T_\alpha x')\\&\leqslant(x',x'),\end{aligned}$$

即 $\{P'T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 在 Π' 上满足 (1.54) 条件．同样，$\{P'T_\alpha^\dagger|\alpha\in\Lambda\}$ 也在 Π' 上满足 (1.54)，又显然 $\{P'T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$，$\{P'T_\alpha^\dagger|\alpha\in\Lambda\}$ 是 Π' 上相互共轭的两族算子，这样，$\{P'T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$，$\{P'T_\alpha^\dagger|\alpha\in\Lambda\}$ 在 Π' 上满足定理中条件 (ii)．根据归纳法假设，$\{P'T_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 在 Π' 上有 $K-1$ 维公共的半负不变子空间 $\mathscr{L}'$，从而 $\mathscr{L}=$

span $\cdot\{x_0, \mathscr{L}'\}$是$\{T_\alpha|\alpha\in A\}$的公共的$K$维半负不变子空间．证毕．

定理 1.18 设 $\{T_\alpha|\alpha\in A\}$ 是 Π_K 上一族可交换的压缩算子或一族可交换的酉算子，那末 $\{T_\alpha|\alpha\in A\}$ 必有公共的K维半负不变子空间。

证 因为 Π_K 空间上的压缩算子的共轭算子仍是压缩算子(它的证明可见第四章§3定理3.13)，所以本定理实际上是定理1.17在条件(ii)下的直接推论。证毕。

利用 Cayley 变换，又可得到自共轭算子的有关结论。

定理 1.19 设 $\{A_\alpha|\alpha\in A\}$ 是 Π_K 上一族可交换的有界自共轭算子，那末 $\{A_\alpha|\alpha\in A\}$ 必有公共的K维半负不变子空间。

§2 酉、自共轭算子的模型

这一节中将给出 Π_K 空间上酉算子和自共轭算子的三角模型，它是本章以后各节讨论的基础。

1. 酉算子模型 在给出模型之前，先对以后要经常使用的术语和概念(以前已曾运用过)再作适当交待。

L是 Π_K 的一个正(或负)的闭线性子空间(必是 Π_K 上完备子空间)。一般在L上总是以$(\cdot,\cdot)$(或$-(\cdot,\cdot)$)作为内积，使得$(L,(\cdot,\cdot))$(或$(L,-(\cdot,\cdot))$)成为 Hilbert 空间．今后有时对以这种方式所得到的 Hilbert 空间，简说成L是 Hilbert 空间。

Z是 Π_K 的零性子空间，今后常以下列方式在Z上引入内积$\langle\cdot,\cdot\rangle$：在$Z$中任取线性基

$$z_1, z_2, \cdots, z_l \quad (l=\dim Z\leqslant K), \tag{2.1}$$

对任何 $z=\sum_{i=1}^{l}\alpha_i z_i$, $z'=\sum_{i=1}^{l}\beta_i z_i$, 规定

$$\langle z, z'\rangle=\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\bar{\beta}_i, \tag{2.2}$$

显然Z以$\langle\cdot,\cdot\rangle$成为 Hilbert 空间．自然，$\langle\cdot,\cdot\rangle$随基(2.1)的选取而定．但因是有限维空间，所以不同基所导出的内积所产生

的拓扑是等价的．对于任何能使 $\{Z, Z^*\}$ 成为偶对的零性子空间 Z^*，总按下列方式引入内积：在 Z^* 中取一组线性基

$$z_1^*, \cdots, z_l^* \ (l = \dim Z^* = \dim Z),$$

使得 $\{z_i\}$，$\{z_i^*\}$ 成为对偶族，对任何 $z^* = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i^* z_i^*$，$z^{*\prime} = \sum_{i=1}^{l} \beta_i^* z_i^*$，规定内积(仍用$\langle \cdot, \cdot \rangle$)

$$\langle z^*, z^{*\prime} \rangle = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i^* \bar{\beta}_i^*. \tag{2.3}$$

显然，

$$(z, z^*) = \sum_{i,j=1}^{l} \alpha_i \bar{\alpha}_j^* (z_i, z_j^*) = \sum_{i,j=1}^{l} \alpha_i \bar{\alpha}_j^* \delta_{ij}, \tag{2.4}$$

即 Z^* 中任何 z^*，以 (z, z^*) 的方式可以视为 $(Z, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 的连续线性泛函．这样，$(Z^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ (或 $(Z, \langle \cdot, \cdot \rangle)$) 可视为 $(Z, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ (或 $(Z^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$) 的共轭空间．如果再将 $z^* = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i^* z_i^*$ 与 $z = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i^* z_i$ 视为同一，那末和普通 Hilbert 空间一样，就有 $(Z^*, \langle \cdot, \cdot \rangle) = (Z, \langle \cdot, \cdot \rangle)$，$\langle z, z^* \rangle$ 就有意义，并且 (2.4) 式将成为

$$(z, z^*) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \alpha_i^* = \langle z, z^* \rangle = \overline{\langle z^*, z \rangle}. \tag{2.5}$$

在今后的计算中，除用到 (2.5) 外还用到下列等式．

如果 P 是正的闭线性子空间 (必是完备子空间)，D 是 $(Z^*, \langle \cdot, \cdot \rangle) \to (P, (\cdot, \cdot))$ 的有界线性算子，那末对任何 $z^* \in Z^*$，$p \in P$，

$$(Dz^*, p) = \langle z^*, D^* p \rangle = (z^*, D^* p). \tag{2.6}$$

同样，如果 N 是负的闭线性子空间 (必是完备子空间)，C 是 $(Z^*, \langle \cdot, \cdot \rangle) \to (N, -(\cdot, \cdot))$ 的有界线性算子，那末对任何 $z^* \in Z^*$，$n \in N$，

$$-(Cz^*, n) = \langle z^*, C^* n \rangle = (z^*, C^* n). \tag{2.7}$$

如果 T 是 $(Z^*, \langle \cdot, \cdot \rangle) \to (Z, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 的有界线性算子，那末 T^* 便是 $(Z, \langle \cdot, \cdot \rangle)^* (= (Z^*, \langle \cdot, \cdot \rangle))$ 到 $(Z, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

的线性算子，这样，$T=T^*$ 或 $T=-T^*$ 等是有意义的，并且对任何 $z_1^*,\ z_2^*\in Z^*$，

$$(Tz_1^*, z_2^*)=\langle Tz_1^*, z_2^*\rangle=\langle z_1^*, T^*z_2^*\rangle=(z_1^*, T^*z_2^*). \quad (2.8)$$

注意 上面说明的事实，在第四章中讨论一般的完备的不定度规空间上酉、自共轭算子谱论也是需要的。另外也还会出现 C, D, T 等可能是稠定的（无界）算子情况。下面给出 Π_K 空间上半酉算子的三角模型。

定理 2.1 U 为 Π_K 上的半酉算子的充要条件是存在标准分解 $\Pi_K=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$，以及六个线性算子 $\{S, U_N, U_P, C, D, T\}$，其中 S 是 $(Z,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上非奇的；U_N 是 $(N,-(\cdot,\cdot))$ 上酉算子；U_P 是 $(P,(\cdot,\cdot))$ 上保距算子；C, D, T 分别是 $(Z^*,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 到 $(N,-(\cdot,\cdot))$, $(P,(\cdot,\cdot))$, $(Z,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的有界算子，并且 $T=-T^*$。而 U 和 $\{S, U_N, U_P, C, D, T\}$ 满足如下关系：

$$Uz=Sz,\ z\in Z; \quad (2.9)$$

$$Un=U_Nn+SC^*U_Nn,\ n\in N; \quad (2.10)$$

$$Up=U_Pp-SD^*U_Pp,\ p\in P; \quad (2.11)$$

$$Uz^*=S^{-1*}z^*+Bz^*+Cz^*+Dz^*,\ z^*\in Z^{*1)}; \quad (2.12)$$

$$B=\frac{1}{2}S(C^*C-D^*D+2T). \quad (2.13)$$

当 U 是 Π_K 上半酉算子时，还有如下谱等式：

$$\sigma(U)=\sigma(S)\cup\sigma(S^{-1*})\cup\sigma(U_N)\cup\sigma(U_P). \quad (2.14)$$

更准确的谱等式是

$$\sigma_r(U)\subset\sigma_r(U_P)\subset\sigma(U),\ \sigma'(S^{-1*})\subset(\sigma_p(U)\cup\sigma_r(U)), \quad (2.15)$$

$$(\sigma(S)\cup\sigma''(S^{-1*})\cup\sigma(U_N)\cup\sigma_p(U_P))\subset\sigma_p(U)$$
$$\subset(\sigma(S)\cup\sigma(S^{-1*})\cup\sigma(U_N)\cup\sigma_p(U_P)), \quad (2.16)$$

$$\sigma_a(U)-\sigma_p(U)=\sigma_a(U_P)-\sigma_p(U), \quad (2.17)$$

其中 $\sigma'(S^{-1*})=\{\lambda|\lambda\in\sigma(S^{-1*}),\ |\lambda|<1\}$，$\sigma''(S^{-1*})=\sigma(S^{-1*})-$

---

1) 下面也常不加说明地用 z, n, p, z^* 分别表示 Z, N, P, Z^* 中的向量。

$\sigma'(S^{-1*})$.

证 必要性 根据本章推论 1.6，对半酉算子 U，存在K维半负不变子空间 $\mathscr{L}$. 令

$$\mathscr{L}=Z\oplus N,\ Z=\mathscr{L}\cap\mathscr{L}^{\perp}$$

是 $\mathscr{L}$ 的标准分解. 由于 $\dim(N\oplus Z)=K$，所以必存在标准分解 $\Pi_K=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$. 显然，

$$\mathscr{L}^{\perp}=Z\oplus P. \tag{2.18}$$

由于 $\dim\mathscr{L}=K<\infty$，U是单射，所以 $U\mathscr{L}=\mathscr{L}$. 再由 $\mathscr{D}(U)=\Pi_K$ 以及U的保距性，易知 $U\mathscr{L}^{\perp}\subset\mathscr{L}^{\perp}$，即 $\mathscr{L}^{\perp}$ 也是U的不变子空间，从而 $Z=\mathscr{L}\cap\mathscr{L}^{\perp}$ 也是U的不变子空间. 对任何 $x\in\Pi_K$，有唯一分解 $x=n+z+z^*+p$，$n\in N$，$z\in Z$，$z^*\in Z^*$，$p\in P$. 作 Π_K 到N, Z, Z^*, P的线性算子：

$$\begin{aligned}&P_N:\ x\longmapsto n,\quad P_P:\ x\longmapsto p;\\&P_Z:\ x\longmapsto z,\quad P_{Z^*}:x\longmapsto z^*.\end{aligned}\tag{2.19}$$

显然，P_N, P_Z, P_{Z^*}, P_P 都是 Π_K 上的有界线性算子[1]. 下面分五步来完成必要性的证明.

(I) 令 $S=U|_Z$. 因为 $\dim Z=K<\infty$，U是单射，所以S是非奇的. 显然还有

$$\sigma(S)\subset\sigma_p(U). \tag{2.20}$$

(II) 令 $U_N=P_NU|_N$，$F=P_ZU|_N$. 因为 $U\mathscr{L}\subset\mathscr{L}=N\oplus Z$，所以对任何 $n\in N$，$Un=U_Nn+Fn$. 从而对任何 $n+z\in\mathscr{L}$，

$$U(n+z)=U_Nn+Fn+Sz. \tag{2.21}$$

根据U的保距性，易知 U_N 是 Hilbert 空间 $(N,-(\cdot,\cdot))$上的保距算子，但 $\dim N\leqslant K<\infty$，所以 U_N 是 $(N,-(\cdot,\cdot))$上酉算子.

---

1) 如果令 $\{Z+Z^*\}=N_0\oplus P_0$ 是正则分解，那末 $\Pi_K=(N\oplus N_0)\oplus(P_0\oplus P)$ 是正则分解，由它导出的内积为$[\cdot,\cdot]$. 显然，P_N, P_Z, P_{Z^*}, P_P 正是 Hilbert 空间 $(\Pi_K,[\cdot,\cdot])$ 分别在闭线性子空间 N, Z, Z^*, P 上的投影. 今后在类似的场合，不再交待 P_N, P_Z, P_{Z^*}, P_P 的意义.

再证 $\sigma(U_N)\subset\sigma_p(U)$．由于 $\sigma(S)\subset\sigma_p(U)$，所以不妨取 $\lambda\in\sigma(U_N)-\sigma(S)$，而 n 是相应于 λ 的特征向量．由 (2.21) 可知，$n-(S-\lambda I)^{-1}Fn$ 必是算子 U 相应于 λ 的特征向量．因此

$$\sigma(U_N)\subset\sigma_p(U). \tag{2.22}$$

(III) 令 $U_P=P_PU|_P$，$G=P_ZU|_P$．显然，U_P，G是有界线性算子（因为 U 是有界的）．由于 $U\mathscr{L}^{\perp}\subset\mathscr{L}^{\perp}$，所以对任何 $p+z\in\mathscr{L}^{\perp}=Z\oplus P$，

$$U(p+z)=U_Pp+Gp+Sz, \tag{2.23}$$

从 U 的保距性易知 U_P 是 $(P,(\cdot,\cdot))$ 上保距算子 $(\mathscr{D}(U_P)=P)$．类似于 (II)，还可以得到

$$\sigma_p(U_P)\subset\sigma_p(U). \tag{2.24}$$

再证

$$\sigma_a(U_P)\subset\sigma_a(U). \tag{2.25}$$

事实上，对任何 $\lambda\in\sigma_a(U_P)$，但 $\lambda\bar{\in}\sigma(S)$，这时存在 $\{p_n\}\subset P$，$(p_n,p_n)=1$，$n=1,2,\cdots$，使得

$$\lim_{n\to\infty}((U_P-\lambda I)p_n,(U_P-\lambda I)p_n)=0. \tag{2.26}$$

取 $z_n=-(S-\lambda I)^{-1}Gp_n$，$n=1,2,\cdots$，易知 $(U-\lambda I)(p_n+z_n)=(U_P-\lambda I)p_n$，$n=1,2,\cdots$．如取正则分解 $\Pi_K=H_-\oplus H_+$，$H_-\supset N$，$H_+\supset P$，由它导出的范数为 $\|\cdot\|$，显然

$$\|p_n+z_n\|\geqslant\|p_n\|=1,\ n=1,2,\cdots,$$

$$\lim_{n\to\infty}\|(U-\lambda I)(p_n+z_n)\|=\lim_{n\to\infty}\|(U_P-\lambda I)p_n\|=0.$$

所以 $\lambda\in\sigma_a(U)$，即 (2.25) 成立．

(IV) 令 $A=P_{Z^*}U|_{Z^*}$，$B=P_ZU|_{Z^*}$，$C=P_NU|_{Z^*}$，$D=P_P\cdot U|_{Z^*}$，则对任何 $z^*\in Z^*$，有 $Uz^*=Az^*+Bz^*+Cz^*+Dz^*$．设 $\{z_i\}$，$\{z_i^*\}$ 是对偶族，$Z=\mathrm{span}\{z_i\}$，$Z^*=\mathrm{span}\{z_i^*\}$．由 U 的保距性，

$$(Uz_i,Uz_j^*)=(z_i,z_j^*)=\delta_{ij}, \quad (i,j=1,2,\cdots,l) \tag{2.27}$$

$$(Uz_i,Uz_j)=0=(Uz_i^*,Uz_j^*). \tag{2.28}$$

从 (2.27) 和 (2.4)，(2.5) 得到

$$\langle z_i, z_j^* \rangle = \delta_{ij} = (Sz_i, Az_j^*) = \langle Sz_i, Az_j^* \rangle$$
$$= \langle z_i, S^* A z_j^* \rangle, \ i, j = 1, 2, \cdots, l. \tag{2.29}$$

由此可知 $A = S^{*-1} = S^{-1*}$. 再从 (2.28) 又可得到对任何 $i, j = 1, 2, \cdots, l$,

$$0 = (Uz_i^*, Uz_j^*) = (Az_i^*, Bz_j^*) + (Bz_i^*, Az_j^*)$$
$$+ (Cz_i^*, Cz_j^*) + (Dz_i^*, Dz_j^*)$$
$$= \langle z_i^*, (S^{-1}B + B^*S^{-1*} - C^*C + D^*D)z_j^* \rangle,$$

即 B 适合下列算子方程:

$$S^{-1}B + B^*S^{-1*} = C^*C - D^*D. \tag{2.30}$$

用 $B = \frac{1}{2}S(C^*C - D^*D) + ST$ 代入 (2.30), 立即知道 (2.30) 的通解形式是, B 中 T 满足

$$T = -T^*. \tag{2.31}$$

再证 $\sigma''(S^{-1*}) \subset \sigma_p(U)$. 下面分两种情况证明.

a) 如果 $\lambda_0 \in \sigma''(S^{-1*})$, 并且 $|\lambda_0| = 1$, 那末 $\lambda_0 = \frac{1}{\bar{\lambda}_0}$. 根据 $\sigma(S) = \left\{\frac{1}{\bar{\lambda}} \mid \lambda \in \sigma(S^{-1*})\right\}$, 易知 $\lambda_0 \in \sigma(S) \subset \sigma_p(U)$.

b) 如果 $\lambda_0 \in \sigma''(S^{-1*})$, 并且 $|\lambda_0| > 1$. 不妨设 $\lambda_0 \bar{\in} \sigma(S)$ (否则, $\lambda_0 \in \sigma(S) \subset \sigma_p(U)$). 记 z_0^* 是相应于 λ_0 的 S^{-1*} 的特征向量. 因为 $|\lambda_0| > 1$, 所以 $\lambda_0 \in \rho(U_N) \cap \rho(U_P)$. 经直接计算, 易知 Π_K 中向量 $z^* + n + p + z$ 必是相应于 λ_0 的算子 U 的特征向量, 其中

$$n = -(U_N - \lambda_0 I)^{-1}Cz_0^*, \ p = -(U_P - \lambda_0 I)^{-1}Dz_0^*,$$
$$z = (S - \lambda_0 I)^{-1}[F(U_N - \lambda_0 I)^{-1}Cz_0^*$$
$$+ G(U_P - \lambda_0 I)^{-1}Dz_0^* - Bz_0^*],$$

即 $\lambda_0 \in \sigma_p(U)$. 因此

$$\sigma''(S^{-1*}) \subset \sigma_p(U). \tag{2.32}$$

(V) 证明 $F = SC^*U_N$, $G = -SD^*U_P$. 由于

$$U(z^* + z + n + p) = U(z^* + z) + U_N n$$
$$+ U_P p + Fn + Gp, \tag{2.33}$$

利用 $(Ux, Ux) = (x, x)$ 对一切 $x = z^* + z + n + p$ 成立以及换 $z + z^*$ 为 $i(z + z^*)$ (i 是虚数单位)，便得到

$$(U(z + z^*), U_N n + U_P p + Fn + Gp) = 0, \qquad (2.34)$$

即 $(Uz^*, U_N n + U_P p + Fn + Gp) = 0$. 如分别取 $p = 0$ 和 $n = 0$,就得到

$$(Az^* + Cz^*, U_N n + Fn) = 0,$$
$$(Az^* + Dz^*, U_P p + Gp) = 0.$$

从而对一切 $z^* \in Z^*$, $n \in N$, $p \in P$,

$$\langle z^*, (S^{-1}F - C^* U_N)n \rangle = 0, \qquad (2.35)$$

$$\langle z^*, (S^{-1}G + D^* U_P)p \rangle = 0, \qquad (2.36)$$

即 $F = SC^* U_N$, $G = -SD^* U_P$. 必要性证得.

充分性　假设在标准分解 $\Pi_K = N \oplus \{Z + Z^*\} \oplus P$ 之下,有六个线性算子 $\{S, U_N, U_P, C, D, T\}$ 与给定的 Π_K 上线性算子满足(2.9)—(2.13)关系. 今证明U必是半酉算子.

由S的非奇性知道,U限制在Z上,按$(\cdot, \cdot)$是保距的,并且是Z到Z的双射.利用这个事实以及 U_N 是 Hilbert 空间 $(N, -(\cdot, \cdot))$ 上酉算子,易知U限制在 $N \oplus Z$ 上不仅按$(\cdot, \cdot)$是保距的，而且是 $N \oplus Z$ 到 $N \oplus Z$ 的双射. 同样,利用 U_P 是 Hilbert 空间 $(P, (\cdot, \cdot))$ 上保距算子，易知U限制在 $N \oplus Z \oplus P$ 上按$(\cdot, \cdot)$是保距的,并且是单射[1].

从假设 $F = SC^* U_N$, $G = -SD^* U_P$, 立即得到(2.35), (2.36), 从而又可得到(2.34). 再利用B的表达式(2.13), 以及(2.34)就可得出U是 Π_K 上半酉算子.

最后来证明谱的等式(2.14)—(2.17).

在证明必要性时,我们已经得到[见(2.20), (2.22), (2.24), (2.25), (2.32)]

$$(\sigma(S) \cup \sigma''(S^{-1*}) \cup \sigma(U_N) \cup \sigma_P(U_P)) \subset \sigma_P(U), \qquad (2.37)$$

$$\sigma_c(U_P) \subset \sigma_c(U). \qquad (2.38)$$

---

1) $U(N \oplus Z \oplus P) = N \oplus Z \oplus P$ 的充要条件显然是 U_P 为 $(P, (\cdot, \cdot))$ 上酉算子.

下面只要补充证明其余部分(分五点进行补充).

(1) 先证明 (2.16). 当 $\lambda\in\sigma_p(U)$ 时, 存在相应的特征向量 $x=z+z^*+n+p$,

$$
\begin{aligned}
\lambda(z+z^*+n+p)&=U(z^*+z+n+p)\\
&=S^{-1*}z^*+(Bz^*+Sz+Fn+Gp)\\
&\quad+(U_Nn+Cz^*)+(U_Pp+Dz^*).
\end{aligned}
$$

从上式易知, 如果 $z^*\neq 0$, 那末 $\lambda\in\sigma(S^{-1*})$. 如果 $z^*=0$, 就依次考察 n, p 是否为零. 如果不是零, 必可推出 $\lambda\in\sigma(U_N)$ 或 $\lambda\in\sigma(U_P)$. 而当 $z^*=n=p=0$ 时,又可推出 $\lambda\in\sigma(S)$. 这样,

$$\sigma_p(U)\subset(\sigma(S^{-1*})\cup\sigma(S)\cup\sigma(U_N)\cup\sigma(U_P)),$$

即 (2.16) 成立.

(2) 证明 $\sigma'(S^{-1*})\subset(\sigma_p(U)\cup\sigma_r(U))$. 设 $\lambda_0\in\sigma'(S^{-1*})$, 且 $\lambda_0\bar{\in}\sigma_p(U)$, 那末由 (2.16) 可知 $\lambda_0\bar{\in}\sigma(S)\cup\sigma(U_N)\cup\sigma_p(U_P)$. 因为 $|\lambda_0|<1$, 而 U_P 是 Hilbert 空间 $(P,(\cdot,\cdot))$ 上保距算子, 因而对任何 $p\in P$,

$$\|(U_P-\lambda_0I)p\|\geqslant\|p\|-|\lambda_0|\|p\|, \tag{2.39}$$

从而 $\mathscr{R}(U_P-\lambda_0I)=\overline{\mathscr{R}(U_P-\lambda_0I)}$. 如果 $\mathscr{R}(U_P-\lambda_0I)=P$, 那末 $\lambda_0\in\rho(U_P)$ (其实, 这时 U_P 必是 $(P,(\cdot,\cdot))$ 上酉算子). 这时和前面 (IV) 中的 (b) 相仿, 可以得到 $\lambda_0\in\sigma_p(U)$. 显然,这与假设 $\lambda_0\bar{\in}\sigma_p(U)$ 相冲突. 从而 $\mathscr{R}(U_P-\lambda_0I)\neq P$, 即 U_P 不是 $(P,(\cdot,\cdot))$ 上酉算子,而只是保距算子, 自然 $\lambda_0\in\sigma_r(U)$. 从而

$$\sigma'(S^{-1*})\subset(\sigma_p(U)\cup\sigma_r(U)).$$

(3) 证明 $\sigma_r(U)\subset\sigma_r(U_P)$. 设 $\mu\in\sigma_r(U)$, 因而 $\mu\bar{\in}\sigma_a(U)(\supset\sigma_p(U))$. 由 (2.16), (2.38), $\mu\bar{\in}(\sigma(S)\cup\sigma''(S^{-1*})\cup\sigma(U_N)\cup\sigma_p(U_P))$. 因此,

$$\mu\in\rho(S)\cap\rho(U_N),\ \mu\bar{\in}\sigma_a(U_P), \tag{2.40}$$

从而 $(U-\mu I)$ 在 Z, $Z\oplus N$ 上都是双射. 下面分 $|\mu|\geqslant 1$ 和 $|\mu|<1$ 两种情况来讨论.

假设 $|\mu|\geqslant 1$. 当 $|\mu|>1$ 时, $\mu\in\rho(U_P)$; 当 $|\mu|=1$

时，如果 $\mu\notin\sigma(U_P)$，那末 $\mu\in\sigma_c(U_P)$（因为 U_P 是 $(P,(\cdot,\cdot))$ 上保距算子），这与 (2.40) 相矛盾，因而也只有 $\mu\in\rho(U_P)$（其实，发生这种情况只可能 U_P 是 $(P,(\cdot,\cdot))$ 上酉算子）。总之，当 $|\mu|\geqslant 1$ 时，$\mu\in\rho(U_P)$。由此可知 $(U-\mu I)$ 是 $N\oplus Z\oplus P$ 上双射。再由于 $|\mu|\geqslant 1$，$\mu\bar{\in}\sigma'(S^{-1*})$，所以 $\mu\bar{\in}\sigma(S^{-1*})$，即 $\mu\in\rho(S^{-1*})$。利用这个事实以及 $(U-\mu I)$ 是 $N\oplus Z\oplus P$ 上双射，易知 $(U-\mu I)$ 也是 $\Pi_K=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$ 上双射。这与假设 $\mu\in\sigma_r(U)$ 相冲突。因而只有 $|\mu|<1$。

假设 $|\mu|<1$。显然 (2.39) 中 λ_0 换成现在的 μ 成立。如果 $\mathscr{R}(U_P-\mu I)=\overline{\mathscr{R}(U_P-\mu I)}=P$，那末 $\mu\in\rho(U_P)$。和 (IV) 中的 (b) 相仿也可得到 $\mu\in\sigma_P(U)$。但这与假设 $\mu\in\sigma_r(U)$ 冲突。另一种可能是 $\mu\in\rho(S^{-1*})$，易知，这将导致 $\mathscr{R}(U-\mu I)=\Pi_K$，这也与假设 $\mu\in\sigma_r(U)$ 相冲突。因此，当 $|\mu|<1$ 时，唯有可能是 $\mathscr{R}(U_P-\mu I)\neq P$，即 $\mu\in\sigma_r(U_P)$。

这样就得到 $\sigma_r(U)\subset\sigma_r(U_P)$。

(4) 下面证明 $\sigma_r(U_P)\subset\sigma(U)$。设 $\nu\in\sigma_r(U_P)$，这时 $\overline{\mathscr{R}(U_P-\nu I)}\neq P$。由于

$$(U-\nu I)(N\oplus Z)\subset N\oplus Z,\quad (U-\nu I)(P\oplus Z)\subset P\oplus Z,$$

从而 $\dim(U-\nu I)Z^*\leqslant\dim Z^*<\dim Z^*+\dim(P\ominus\overline{\mathscr{R}(U_P-\nu I)})$。由此可知，$\mathscr{R}(U-\nu I)\neq\Pi_K$，所以 $\nu\in\sigma(U)$，即 $\sigma_r(U_P)\subset\sigma(U)$。

综合 (2)，(3)，(4) 就得到 (2.15) 式。

(5) 再证 (2.17)。由 (2.38) 可以得到 $\sigma_a(U_P)-\sigma_p(U)\subset\sigma_a(U)-\sigma_p(U)$。为了证明 (2.17)，只要证明

$$\sigma_a(U_P)-\sigma_p(U)\supset\sigma_a(U)-\sigma_p(U) \tag{2.41}$$

就可以了。

设 $\lambda\in\sigma_a(U)-\sigma_p(U)$，因而存在 $\{y_k\}\subset\Pi_K$，$\|y_k\|=1$，$k=1,2,\cdots$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\|(U-\lambda I)y_k\|=0. \tag{2.42}$$

令 $y_k = z_k^* + z_k + n_k + p_k$, $k = 1, 2, \cdots$. 由 (2.15), (2.16) 知道 $\lambda \bar{\in} \sigma(S^{-1*})$. 根据 (2.42), 易知 $\lim\limits_{k\to\infty}\|z_k^*\| = 0$. 同样, 再由于 $\lambda \bar{\in} \sigma(U_N)$ (在 $\lim\limits_{k\to\infty}\|z_k^*\| = 0$ 前提下), 又从 (2.42) 得到 $\lim\limits_{k\to\infty}\|n_k\| = 0$. 因为考察的是近似点谱, 因此可不妨设 y_k 为下列形式:

$$y_k = p_k + z_k, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

如果发生 $\lim\limits_{k\to\infty}\|p_k\| = 0$, 那末必有 $\lambda \in \sigma(S) (\subset \sigma_p(U))$. 显然, 这不可能. 所以只有 $\{\|p_k\|\}$ 不趋于零. 通过选子序列和乘适当常数办法, 还可进一步假设 $\|p_k\| = 1$, $k = 1, 2, \cdots$. 这样, 由 (2.42) 就得到

$$\lim_{k\to\infty}\|(U_p - \lambda I)p_k\| = 0,$$

即 $\lambda \in \sigma_a(U_p)$. 因为 $\lambda \bar{\in} \sigma_p(U)$, 所以 $\lambda \in \sigma_a(U_P) - \sigma_p(U)$, 即 (2.41) 成立.

从 (2.15)—(2.17) 立即可得 (2.14). 证毕.

定理 2.2 U 为 Π_K 上酉算子的充要条件是存在标准分解 $\Pi_K = N \oplus \{Z + Z^*\} \oplus P$, 以及六个线性算子 $\{S, U_N, U_P, C, D, T\}$: S, U_N, C, D, T 如定理 2.1, 而 U_P 是 Hilbert 空间 $(P, (\cdot, \cdot))$ 上酉算子, 而 U 和 $\{S, U_N, U_P, C, D, T\}$ 的关系如定理 2.1 的 (2.9)—(2.13).

当 U 是 Π_K 上酉算子时, 谱有如下等式:

$$\sigma(U) = \sigma(S) \cup \sigma(S^{-1*}) \cup \sigma(U_N) \cup \sigma(U_P), \tag{2.43}$$

更准确的等式是

$$\sigma(S) \cup \sigma(S^{-1*}) \cup \sigma(U_N) \cup \sigma_p(U_P) = \sigma_p(U), \quad \sigma_r(U) = \phi, \tag{2.44}$$

$$\sigma(U) - \sigma_p(U) = \sigma(U_P) - \sigma_p(U). \tag{2.45}$$

证 在此沿用定理 2.1 中记号. 当 U 是 Π_K 上酉算子时, 在定理 2.1 的 (III) 中的 $U\mathscr{L}^\perp \subset \mathscr{L}^\perp$, 现在不仅仍成立, 而且还有 $U^{-1}\mathscr{L}^\perp \subset \mathscr{L}^\perp$. 由此可知, U_P 必是 $(P, (\cdot, \cdot))$ 上酉算子. 反之, 如果已知 U_P 是 $(P, (\cdot, \cdot))$ 上酉算子, 易知按 (2.9)—(2.13) 所作

的算子 U 必是 Π_K 上酉算子.

关于谱的等式, 证明的关键显然是证明 Π_K 上酉算子 U 必有 $\sigma_r(U) = \emptyset$. 事实上,如果 $\lambda \in \sigma_r(U)$, 则 $\bar{\lambda} \in \sigma_p(U^\dagger) = \sigma_p(U^{-1})$, 即 $\frac{1}{\bar{\lambda}} \in \sigma_p(U)$. Π_K上酉算子的谱和点谱都关于单位圆周对称(见第二章推论 4.10), 所以 $\lambda \in \sigma_p(U)$. 这与假设 $\lambda \in \sigma_r(U)$ 矛盾, 因此 $\sigma_r(U) = \emptyset$(这也可直接由(2.15)证得).

因为 $\sigma_r(U) = \emptyset$, $\sigma_r(U_P) = \emptyset$, 所以

$$\sigma_a(U) = \sigma(U), \quad \sigma_a(U_P) = \sigma(U_P). \tag{2.46}$$

将 (2.46) 代入 (2.15)—(2.17),立即可得 (2.44), (2.45). 证毕.

如果将 Π_K 的子空间按 Z, N, P, Z^* 的顺序排列,从而 Π_K 上线性算子可以表示成 4×4 矩阵,那末定理 2.1 和定理 2.2 中的算子

$$U = \begin{pmatrix} S & F & G & B \\ & U_N & & C \\ & & U_P & D \\ & & & S^{-1*} \end{pmatrix} \begin{matrix} Z \\ N \\ P \\ Z^* \end{matrix} \tag{2.47}$$

$$F = SC^*U_N, \quad G = -SD^*U_P,$$

$$B = \frac{1}{2}S(C^*C - D^*D + 2T), T = -T^*.$$

因为 $\dim Z < \infty$, 从 Jordan 标准形理论知道, 存在 Z 中线性基 $\{z_i'|1 \leqslant i \leqslant l\}$, 使得 S 在 $\{z_i'\}$ 下是上三角形矩阵. 因为 U_N 是 $(N, -(\cdot,\cdot))$ 上酉算子,所以存在N中就范直交系,使得 U_N 成为对角化算子. 同样,当 U 是 Π_K 上酉算子(从而 U_P 是 $(P, (\cdot,\cdot))$上酉算子), 那末 U_P 具有谱分解(也是一种"对角化"). 显然, 对于 Z^*, 必存在一组线性基 $\{z_i^{*\prime}|1 \leqslant i \leqslant l\}$, 使得 $\{z_i'\}$, $\{z_i^{*\prime}\}$ 是对偶族. S^{-1*} 在 $\{z_i^{*\prime}\}$ 之下成为下三角形. 如果 $\{z_i^{*\prime}\}$ 的下标编号 i 换为 $l-i$, 那末 S^{-1*} 也成为上三角形. 因此,定理 2.2 实际上是给出 Π_K 上酉算子的三角模型. 对于半酉算子, U_P 仅是 $(P, (\cdot, \cdot))$ 上保距算子,但具有"三角形"的形式.

今后常简写 (2.9)—(2.13) 为 $U=\{S, U_N, U_P, C, D, T\}$.

推论 2.3 (I) 如果 U 只是 Π_K 上半酉而非酉算子. 那末

(i) 闭单位圆内点必全是 U 的谱点, 并且开单位圆内最多除去有限个点 (个数不超过 K) 可能是 U 的特征值外,其余都是 U 的剩余谱.

(ii) 开单位圆外所有谱点是 U 的特征值, 并且最多不超过 K 个.

(II) 如果 U 是 Π_K 上酉算子, 那末不在单位圆周上的谱必是特征值, 并且谱 $\sigma(U)$ 关于单位圆周对称.

证 (I) 因为 U 不是酉算子, 而只是半酉算子, 所以 U_P 只是 $(P, (\cdot, \cdot))$ 上保距算子, 而不是酉算子. 从而 $\sigma(U_P)$ 是闭单位圆.

(i) 如果 $|\lambda|\leqslant 1$, 那末 $\lambda\in\sigma(U_P)$. 根据 (2.15), (2.17),

$$\sigma(U_P)=\sigma_r(U_P)\cup\sigma_a(U_P)\subset\sigma(U).$$

由于开单位圆内的 λ 决不是 U_P 的近似谱点,因此当 $\lambda\bar{\in}\sigma_p(U)$ 时, 根据 (2.17),必然有 $\lambda\bar{\in}\sigma_a(U)$, 从而 $\lambda\in\sigma_r(U)$.但是根据 (2.16), $\sigma_p(U)$ 在单位圆内的点是包含在 $\sigma(S)\cup\sigma(S^{-1*})$ 中, 由此易知 $\sigma_p(U)$ 在单位圆内最多是 l 个点 ($l=\dim Z$). 显然 $l\leqslant K$.

(ii) 如果 $\lambda\in\sigma(U)$, $|\lambda|>1$. 那末从 (2.14) 易知, 只有 $\lambda\in\sigma(S)\cup\sigma(S^{-1*})$, 即 $\lambda\in\sigma(S)\cup\sigma''(S^{-1*})$. 由 (2.16) 可知, $\lambda\in\sigma_p(U)$, 并且这种 λ 的个数不超过 $l(\leqslant K)$.

(II) 当 U 是 Π_K 上酉算子时, 从 (2.14) 可知, $\sigma(U)$ 中不在单位圆周上的点必在 $\sigma(S)\cup\sigma(S^{-1*})$内. 又根据 (2.15), $\sigma_r(U)\subset\sigma_r(U_P)=\varnothing$, 从而利用 (2.15), (2.16) 就得到 $\sigma(S)\cup\sigma(S^{-1*})\subset\sigma_p(U)$. 然而集 $\sigma(S)\cup\sigma(S^{-1*})$ 是关于单位圆周对称的, 所以 $\sigma(U)$ 关于单位圆周对称. 证毕.

注意 推论 2.3 中的 (II) 实际上是第一章推论 4.10 的结论的一部分. 这里不过是作为模型的推论而已.

推论 2.4 设 U 是 Π_K 上酉算子, $\sigma(U)$ 落在单位圆周上的充要条件是 $\sigma(S)=\sigma(S^{-1*})$, 或者说 $\sigma(S)$ 落在单位圆周上.

特别，$\sigma(U)=\{1\}$ 的酉算子U的充要条件是存在标准分解 $\Pi_K=N\oplus\{Z\oplus Z^*\}\oplus P$，使得 $U=\{S, I_N, I_P, C, D, T\}$，而 $\sigma(S)=\{1\}$。

本推论是显然的。

从推论 2.4 可见，Π_K上酉算子U，即使只允许以 1 为谱点，这种酉算子的一般形式中也仍含有四个算子 $S(\sigma(S)=\{1\})$，C，D，$T(T=-T^*)$ 作为“自由参数”。

推论 2.5 设在标准分解 $\Pi_K=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$ 之下，Π_K上半酉算子 $U=\{S, U_N, U_P, C, D, T\}$，那末

(i) P的线性子空间L为 U_P 的不变子空间的充要条件是，$L\oplus Z$是U的不变子空间。

(ii) 当U是酉算子时，P的闭线性子空间L为U_P的约化子空间的充要条件是，$Z\oplus L$是U，U^{-1}的公共不变子空间，或者是 $U(Z\oplus L)=Z\oplus L$。

2. $U^\dagger$，U^{-1} 的模型

推论 2.6 设在标准分解 $\Pi_K=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$ 之下，$U=\{S, U_N, U_P, C, D, T\}$ 是Π_K上半酉算子，那末在同一标准分解下，$U^\dagger$ 的表达式如下：

$$\begin{aligned}
&U^\dagger z=S^{-1}z,\ z\in Z;\\
&U^\dagger n=U_N^*n-C^*n,\ n\in N;\\
&U^\dagger p=U_P^*p+D^*p,\ p\in P;\\
&U^\dagger z^*=S^*z^*+B^*z^*-U_N^*CS^*z^*-U_P^*DS^*z^*,z^*\in Z^*.
\end{aligned}\tag{2.48}$$

特别，如果U是酉算子，那末在同一标准分解下有

$$U^\dagger=U^{-1}=\{S^{-1}, U_N^{-1}, U_P^{-1}, -U_N^{-1}CS^*, -U_P^*DS^*, -STS^*\}.\tag{2.49}$$

证 半酉算子是有界的，因而 $U^\dagger$ 也是有界的。

对任何 $x, y\in\Pi_K$，由 $(x, y)=(Ux, Uy)=(x, U^\dagger Uy)$ 可知，在 $\mathscr{R}(U)$ 上 $U^\dagger=U^{-1}$。因此，只要给出 $\mathscr{R}(U)$ 上的 U^{-1}，也就是给出 $U^\dagger|_{\mathscr{R}(U)}$（其实，容易证明 $\mathscr{R}(U)=\overline{\mathscr{R}(U)}$，并且 $U^\dagger|_{\mathscr{R}(U)^\perp}=0$）。

因为 $Z\subset\mathscr{R}(U)$，$Z\oplus N\subset\mathscr{R}(U)$，易知

$$\begin{aligned}&U^{\dagger}z=S^{-1}z,\ z\in Z;\\&U^{\dagger}n=U_N^{-1}n-S^{-1}FU_N^{-1}n=U_N^{*}n-C^{*}n,\ n\in N.\end{aligned}\tag{2.50}$$

因为 $U(Z\oplus N)=Z\oplus N$，所以 $U^{\dagger}(Z\oplus N)^{\perp}\subset(Z\oplus N)^{\perp}(=Z\oplus P)$. 令 $U'_P=P_PU^{\dagger}|_P$，$G'=P_ZU^{\dagger}|_P$，从而

$$U^{\dagger}p=U'_Pp+G'p,\ p\in P.$$

由于对任何 $p,\ p'\in P$，$z^*\in Z^*$，有

$$(p',U^{\dagger}p)=(Up',p),\ (z^*,U^{\dagger}p)=(Uz^*,p),$$

则立即可知

$$U'_P=U_P^*,\ G'=D^*.\tag{2.51}$$

再令 $A'=P_{Z^*}U^{\dagger}|_{Z^*}$，$B'=P_ZU^{\dagger}|_{Z^*}$，$C'=P_NU^{\dagger}|_{Z^*}$，$D'=P_PU^{\dagger}|_{Z^*}$. 又因为对任何 $z\in Z$，$n\in N$，$p\in P$，z^*，$z^{*\prime}\in Z^*$，有

$$(z,U^{\dagger}z^*)=(Uz,z^*),(n,U^{\dagger}z^*)=(Un,z^*),$$
$$(p,U^{\dagger}z^*)=(Up,z^*),(z^{*\prime},U^{\dagger}z^*)=(Uz^{*\prime},z^*),$$

则立即可以算出

$$A'=S^*,\ C'=-F^*,\ D'=G^*,\ B'=B^*.\tag{2.52}$$

特别，当 U 是 Π_K 上酉算子时，$U^{-1}=U^{\dagger}$. 假设在同一个标准分解下，$U^{\dagger}=\{S',U'_N,U'_P,C',D',T'\}$，根据 (2.50)，(2.51)，(2.52)，易知 $S'=S^{-1}$，$U'_N=U_N^*=U_N^{-1}$，$U'_P=U_P^*=U_P^{-1}$，$C'=-U_N^*CS^*$，$D'=-U_P^*DS^*$. 再根据

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S'(C'^*C'-D'^*D'+2T')=B'=B^*\\=\frac{1}{2}[S(C^*C-D^*D+2T)]^*,\end{aligned}$$

立即又可得到 $T'=-STS^*$. 证毕.

显然，当 U 是半酉而非酉算子时，$\mathscr{R}(U)\neq\Pi_K$，从而 $\mathscr{R}(U_P)\neq P$. 当 $p\in P\ominus\mathscr{R}(U_P)$ 时，从 (2.48) 可知，$p-SD^*p\in\mathscr{N}(U^{\dagger})$.

推论 2.7 设在标准分解 $\Pi_K=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$ 之下，$U=\{S,U_N,U_P,C,D,T\}$ 是 Π_K 上半酉算子，那末 P 的闭线性子空

间L为U_P的约化子空间的充要条件是，$Z\oplus L$是U，$U^\dagger$的不变子空间。

当然，对Π_K上酉和半酉算子的模式，还可以做出比定理 2.1 和定理 2.2 更为细致的分析。例如，可以用根子空间将U在Z，N，P以及Z^*上的形式作进一步地分解。这将在今后需要的时候再提出。

3. 自共轭算子模型 显然，利用 Cayley 变换，可从定理 2.2 得到Π_K上自共轭算子的模型。

定理 2.8 A为Π_K上自共轭算子的充要条件是存在标准分解 $\Pi_K=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$，以及六个线性算子 $\{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$。其中S是 $(Z, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 线性算子；A_N是 $(N, -(\cdot,\cdot))$ 上自共轭算子；A_P是 $(P, (\cdot,\cdot))$ 上自共轭算子；F^*，G^*，Q是 $(Z^*, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 分别到 $(N, -(\cdot,\cdot))$，$(P, (\cdot,\cdot))$，$(Z, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的有界算子，并且 $Q=Q^*$。而A和 $\{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$ 满足如下关系：

$$\begin{cases} Az=Sz, & z\in Z \\ An=A_Nn+Fn, & n\in N \\ Ap=A_Pp+Gp, & p\in\mathscr{D}(A_P) \\ Az^*=S^*z^*-F^*z^*+G^*z^*+Qz^*, & z^*\in Z^* \end{cases} \tag{2.53}$$

当A是Π_K上自共轭算子时，谱有如下等式

$$\sigma(A)=\sigma(S)\cup\sigma(S^*)\cup\sigma(A_N)\cup\sigma(A_P). \tag{2.54}$$

更细致的等式是

$$\sigma(S)\cup\sigma(S^*)\cup\sigma(A_N)\cup\sigma_p(A_P)=\sigma_p(A), \tag{2.55}$$

$$\sigma_r(A)=\emptyset,\quad \sigma(A)-\sigma_p(A)=\sigma(A_P)-\sigma_p(A). \tag{2.56}$$

这个定理就不证明了。我们只写出定理 2.2 和定理 2.8 中各个量之间的联系。但为了叙述和证明这种联系，我们还需下面的引理。

引理 2.9 设U是Π_K上酉算子，如果 $1\bar{\in}\sigma_p(U)$，那末必存在标准分解 $\Pi_K=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$，使得 $U=\{S, U_N, U_P, C, D, T\}$ 满足 $Z^*\subset\mathscr{R}(I-U)$（这时还必有 $\mathscr{R}(D)\subset\mathscr{R}(I-U_P)$）。

证 先证明：若有 $Z^*\subset\mathscr{R}(I-U)$，那末 $\mathscr{R}(D)\subset\mathscr{R}(I-U_P)$.

事实上，对任何 $z^*\in Z^*$，因为 $Z^*\subset\mathscr{R}(I-U)$，所以必有 $x'=z'^*+z'+n'+p'$，使得

$$
\begin{aligned}
z^* &= (I-U)(z'^*+z'+n'+p') \\
&= (I-S^{-1*})z'^*+(I-U_N)n'+(I-U_P)p'-Bz'^* \\
&\quad +(I-S)z'-Cz'^*-Dz'^* \\
&\quad -SC^*U_Nn'+SD^*U_Pp'.
\end{aligned} \tag{2.57}
$$

因为 $1\bar{\in}\sigma_p(U)$，所以 $1\bar{\in}[\sigma(S)\cup\sigma(S^{-1*})\cup\sigma(U_N)]$，从而由 (2.57) 得到 $z'^*=(I-S^{-1*})^{-1}z^*=S^*(S-I)^{-1*}z^*$，并且

$$
(I-U_P)p'=Dz'^*=DS^*(S-I)^{-1*}z^*. \tag{2.58}
$$

由于 $1\bar{\in}\sigma(S)$，从上式可知 $\mathscr{R}(D)\subset\mathscr{R}(I-U_P)$.

再证：对任何 $z^*\in Z^*$，必有 $p_{z^*}\in P$，使得

$$
z^*+p_{z^*}\in\mathscr{R}(I-U). \tag{2.59}
$$

事实上，由于 $1\bar{\in}\sigma_p(U)$，所以 $1\bar{\in}\sigma(U_N)$. 对任何 $z^*\in Z^*$，取 $p'=0$，$n'=(I-U_N)^{-1}CS^*(S-I)^{-1*}z^*$，$z'=(I-S)^{-1}(B+F)(S-I)^{-1*}z^*$，$z'^*=S^*(S-I)^{-1*}z^*$，$p_{z^*}=DS^*(S-I)^{-1*}z^*$，易知

$$
z^*+p_{z^*}=(I-U)(z'^*+n'+p'+z'),
$$

即 (2.59) 成立.

设 $\{z_i\}$，$\{z_i^*\}$ 是偶对 $\{Z,Z^*\}$ 中的对偶族. 如令 $Z'^*=\operatorname{span}\{z_i^*+p_{z_i^*}\}$，显然 $Z+Z'^*$ 是 Π_K 上非退化的闭线性子空间，$Z+Z'^*\subset\mathscr{R}(I-U)$，并且 $\dim(Z+Z'^*)=2\dim Z$. 令 $P_0=\operatorname{span}\{p_{z_i^*}\}$，$P_1=P\ominus P_0$. 作

$$
p_i'=p_{z_i^*}+\sum_{j=1}^{l}\alpha_j^{(i)}z_j\ (i=1,2,\cdots,l), \tag{2.60}
$$

其中 $\alpha_j^{(i)}=-(p_{z_j^*},p_{z_i^*})$. 显然

$$
(p_i',z_j^*+p_{z_j^*})=0,\ i,j=1,2,\cdots l. \tag{2.61}
$$

记 $P_0'=\operatorname{span}\{p_i'\}$，显然，$P'=P_0'\oplus P_1$，$P'$ 是正闭线性子空间，并且 $P'\perp\{Z+Z'^*\}$，$P'\oplus Z=P\oplus Z$. 令 $Z+Z'^*=H_-^0\oplus H_+^0$ 是

$(Z + Z'^*, (\cdot, \cdot))$ 的正则分解，并在 $H_-^0 \oplus H_+^0$ 中任取零性子空间 Z''^*，使得 $\{Z, Z''^*\}$ 构成偶对，并且 $Z + Z''^* = H_-^0 \oplus H_+^0$. 显然标准分解 $\Pi_K = N \oplus \{Z + Z''^*\} \oplus P'$ 就满足 $Z''^* \subset \mathscr{R}(I-U)$ 了。证毕.

今后凡是用到 Π_k 上酉算子的 Cayley 变换，特别是相应的自共轭算子是无界时，如无特别申明，总是取满足引理 2.9 的标准分解.

下面给出定理 2.8 和定理 2.2 之间的联系式. 不失一般性，假定 $-i$ 不是自共轭算子 A 的特征值，并令 A 的 Cayley 变换 U 在满足引理 2.9 的标准分解 $\Pi_K = N \oplus \{Z + Z^*\} \oplus P (Z^* \subset \mathscr{R}(I-U))$ 之下，$U = \{S_U, U_N, U_P, C, D, T\}$. 那末在同一标准分解下，$A = \{S_A, A_N, A_P, F, G, Q\}$，并且

$$U = (A - iI)(A + iI)^{-1}, \quad A = i(I + U)(I - U)^{-1}, \tag{2.62}$$

$$S_A = i(I + S_U)(I - S_U)^{-1}, \tag{2.63}$$

$$\begin{aligned} A_N &= i(I + U_N)(I - U_N)^{-1}, \\ A_P &= i(I + U_P)(I - U_P)^{-1} \\ &(\mathscr{D}(A_P) = \mathscr{R}(I - U_P)), \end{aligned} \tag{2.64}$$

$$\begin{aligned} F &= 2i(I - S_U)^{-1} S_U C^* U_N (I - U_N)^{-1}, \\ G &= -2i(I - S_U)^{-1} S_U D^* U_P (I - U_P)^{-1}, \end{aligned} \tag{2.65}$$

$$\begin{aligned} Q = &-(I - S_U)^{-1} S_U [C^* A_N C - D^* A_P D \\ &+ 2iT] S_U^* (I - S_U)^{-1*}. \end{aligned} \tag{2.66}$$

利用(2.62)的第二式 $A = i(I+U)(I-U)^{-1}$ 计算出(2.63)—(2.66)的过程简述如下:

(I) 因为 $1 \bar{\in} \sigma_p(U)$，而 $\sigma_p(U) = \sigma(S) \cup \sigma(S^{-1*}) \cup \sigma(U_N) \cup \sigma_p(A_P)$，所以 $1 \in \rho(S) \cap \rho(U_N)$. 因为 Z 和 $Z \oplus N$ 都是 U 的不变子空间，所以 $Z, Z \oplus N$ 都是 $U - I$ 的不变子空间；又因为 $U - I$ 是单射，$\dim Z < \infty$，$\dim Z + N < \infty$，所以 $Z, Z \oplus N$ 都是 $(I-U)^{-1}$ 以及 A 的不变子空间；但是，A 是自共轭的，因此 $Z^\perp$，$(Z \oplus N)^\perp$ 也是 A 的不变子空间.

(II) 既然 Z 是 U，$(U - I)^{-1}$，$(I + U)(I - U)^{-1}$ 的不变

子空间，由此易知 (2.63) 成立。

同样，因为 $Z\oplus N$ 是 U，$(U-I)^{-1}$，$(I+U)(I-U)^{-1}$ 的不变子空间，所以对任何 $n\in N$，$An=A_Nn+Fn$，如令 $(I-U)^{-1}n=n_1+z$，那末由 (2.47) 有

$$
\begin{aligned}
n &= (I-U)(I-U)^{-1}n \\
&= (I-U_N)n_1 - SC^*U_Nn_1 + (I-S_U)z.
\end{aligned}
$$

由此可知，$n_1=(I-U_N)^{-1}n$，$z=(I-S_U)^{-1}SC^*U_N(I-U_N)^{-1}n$。类似地就得到

$$
\begin{aligned}
An &= i(I+U)(I-U)^{-1}n \\
&= i(I+U_N)(I-U_N)^{-1}n \\
&\quad + iSC^*U_Nn_1 + i(I+S_U)z \\
&= i(I+U_N)(I-U_N)^{-1}n \\
&\quad + 2i(I-S_U)^{-1}SC^*U_N(I-U_N)^{-1}n,
\end{aligned}
$$

即 (2.64)，(2.65) 中的第一式都成立。

(III) 因为 $\mathscr{D}(A)=\mathscr{R}(I-U)$，而 $(Z\oplus N)+Z^*\subset\mathscr{R}(I-U)(=\mathscr{D}(A))$，所以 $\mathscr{D}(A)=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus(\mathscr{D}(A)\cap P)$。由此可知，对任何 $p\in\mathscr{D}(A)\cap P$，$Ap=A_Pp+Gp$ (因为 $(N\oplus Z)^{\perp}=Z\oplus P$ 是 A 的不变子空间)，其中 $\mathscr{D}(A_P)=\mathscr{D}(G)=\mathscr{D}(A)\cap P$。由于 $\overline{\mathscr{D}(A)}=\Pi_K$，易知 $\overline{\mathscr{D}(A_P)}=P$。又因为 $A=A^+$，所以 A_P 是 Hilbert 空间 $(P,(\cdot,\cdot))$ 上对称算子，即对任何 $p\in\mathscr{D}(A_P)$，

$$
\begin{aligned}
(A_Pp,p) &= (Ap-Gp,p) = (Ap,p) \\
&= (p,Ap) = (p,A_Pp).
\end{aligned}
$$

现在仿 (II) 中证明来证明 $A_P=i(I+U_P)(I-U_P)^{-1}$，$G=-2i(I-S_U)^{-1}S_UD^*U_P(I-U_P)^{-1}$：对任何 $p\in\mathscr{D}(A)\cap P$，令 $(I-U)^{-1}p=z^*+n+p_1+z$，由 (2.47) 得到

$$
\begin{aligned}
p &= (I-U)(I-U)^{-1}p \\
&= (I-S_U^{-1*})z^* - Dz^* - Cz^* - Bz^* \\
&\quad + (I-U_P)p_1 + (I-U_N)n + SD^*U_Pp_1 \\
&\quad - SC^*U_Nn + (I-S_U)z.
\end{aligned}
$$

由此可知 $z^*=0$, $n=0$, $p_1=(I-U_P)^{-1}p$, $z=(I-S_U)^{-1}(-SD^*U_P(I-U_P)^{-1}p)$. 仿(II)就得到 $\mathscr{D}(A_P)=(\mathscr{D}(A)\cap P)\subset\mathscr{R}((I-U_P))$, 并且有(2.64), (2.65)中有关 A_P, G 的表达式.

另一方面,显然有 $\mathscr{R}((I-U_P))\subset\mathscr{R}(I-U)$,所以 $\mathscr{D}(A_P)=\mathscr{R}(I-U_P)$.

由于 U_P 是 $(P,(\cdot,\cdot))$ 上酉算子, $1\bar{\in}\sigma_p(U_P)$, 所以 $i(I+U_P)(I-U_P)^{-1}$ 是 $(P,(\cdot,\cdot))$ 上自共轭算子,从而 A_P 也是 $(P,(\cdot,\cdot))$ 上自共轭算子.

(IV) 利用 $Z^*\subset\mathscr{R}(I-U)$, 类似地计算 $(I-U)^{-1}z^*$, 则不难得到(2.65).

注意 从(2.65)中并不能直接得到 G 是 $(P,(\cdot,\cdot))\to(Z,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的有界线性算子, 但由于 G^* 是 $(Z^*,\langle\cdot,\cdot\rangle)\to(P,(\cdot,\cdot))$, 而 $\dim Z^*<\infty$, 所以 G^* 是有界的, 亦即 G 必是可以延拓成全 $(P,(\cdot,\cdot))$ 上定义的有界线性算子.

下面先用定理 2.8 给出两个以后有用的推论.

定义 2.1 设 T 是完备的不定度规空间 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上线性算子, 定义域 $\mathscr{D}(T)$, $\lambda\in\sigma_p(T)$, $x\in\Phi_\lambda(T)$, 并且 x 是 r 级根向量, 称 $\operatorname{span}\{(T-\lambda I)^{r'}x\,|\,0\leqslant r'\leqslant r-1$ 是由 x 生成的推移子空间,记为 $V(x,r)$. 当 x 是最高级向量时, 简记 $V(x,r)$ 为 $V(x)$.

推论 2.10 设 A 是 Π_K 上自共轭算子, λ 是特征值, $\Phi_\lambda(A)$ 是相应的根子空间. 那末

(i) $\Phi_\lambda(A)$ 中向量的最高阶数不超过 $2K+1$,

(ii) $\Phi_\lambda(A)$ 是闭线性子空间,

(iii) $\Phi_\lambda(A)$ 具有分解 $\Phi_\lambda(A)=\Phi_0\dotplus\Phi'_\lambda$. Φ_0 是由 $\Phi_\lambda(A)$ 中某些特征向量张成的闭线性子空间, Φ'_λ 是 A 的有限维不变子空间.

证 如果 λ 是非实特征值,这时(i)—(iii)显然成立. 所以下面不妨设 λ 是实特征值.

(i) 设在标准分解 $\Pi_K=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$ 之下, $A=\{S,$

$A_N, A_P, F, G, Q\}$. 令 $Z_\lambda = Z\cap\Phi_\lambda(A)$, N_λ, P_λ 分别是 Hilbert 空间 $(N, -(\cdot,\cdot)),(P,(\cdot,\cdot))$ 上自共轭算子 A_N, A_P 相应于 λ 的特征子空间, Z^*_λ 是 Z^* 中相应于 λ 的 S^* 的根子空间. 易知,如果向量 $z^*+z+n+p\in\Phi_\lambda(A)$, 那末或者 $z^*=0$, 或者 $z^*\in Z^*_\lambda$. 如果 $z+n+p\in\Phi_\lambda(A)$, 显然必有 $n\in N_\lambda$, $p\in P_\lambda$ (注意, $\{Z+Z^*\}\oplus N\subset\mathscr{D}(A)$). 对任何 $z^*+z+n+p\in\Phi_\lambda(A)$, 以及任何自然数 k (注意, $\Phi_\lambda(A)\subset\mathscr{D}(A^k)$),

$$(A-\lambda I)^k(z^*+z+n+p)$$
$$=(S^*-\lambda I)^k z^*+n_{z^*}+p_{z^*}+z_{z^*}. \tag{2.67}$$

特别,当 $k\geqslant K$ 时,

$$(A-\lambda I)^k(z^*+z+n+p)=n_{z^*}+p_{z^*}+z_{z^*}. \tag{2.68}$$

显然, $n_{z^*}+p_{z^*}+z_{z^*}\in\Phi_\lambda(A)$, 从而 $n_{z^*}\in N_\lambda$, $p_{z^*}\in P_\lambda$. 由此可知,当 $l\geqslant 1$ 时,

$$(A-\lambda I)^{K+l}(z^*+z+n+p)$$
$$=(A-\lambda I)^l(n_{z^*}+p_{z^*}+z_{z^*})=z_l,$$

显然 $z_l\in(Z\cap\Phi_\lambda(A))$, 因而取 $l=1$ 时,

$$(A-\lambda I)^{2K+1}(z^*+z+n+p)=(A-\lambda I)^K z_1=0.$$

由此可知, $\Phi_\lambda(A)$ 中向量最高级不超过 $2K+1$.

(ii) 由 (i),

$$\Phi_\lambda(A)=\{x\,|\,(A-\lambda I)^{2K+1}x=0\quad x\in\Pi_K\}. \tag{2.69}$$

由于 G 是有界线性算子,所以

$$P^0_\lambda=\{p\,|\,G^*p=0,\ p\in P_\lambda\} \tag{2.70}$$

是闭线性子空间,并且 $\dim(P_\lambda\ominus P^0_\lambda)\leqslant K<\infty$. 显然, $\Phi_\lambda(A)$ 中除去 P^0_λ 中向量外, 尚可能有形式为 z 或 $n+z$ 或 $p+z(p\in P_\lambda\ominus P^0_\lambda)$ 或 $z^*+z+n+p(z^*\neq 0)$ 等向量, 然而由这些形式的向量所张成的线性子空间最多是有限维的,所以 $\Phi_\lambda(A)$ 是闭线性子空间[1].

(iii) 因为 $P^0_\lambda\subset\Phi_{\lambda_1}(A)$, 并且 $\Phi_\lambda(A)/P^0_\lambda$ 是有限维的, 因此

1) 如果知道 $(A-\lambda I)^{2K+1}$ 是闭线性算子,那末由 (2.69),(ii) 便是显然的. 下一节中我们将证明 $(A-\lambda I)^{2K+1}$ 不仅是闭的,而且是自共轭的.

$\Phi_\lambda(A)/\Phi_{\lambda 1}(A)$ 是有限维的. 对 $\Phi_\lambda(A)$ 中级数为 $r(\geq 2)$ 的最高级向量 x, 显然 $V(x)$ 是 A 的不变子空间. 用 $r(x)$ 表示 x 的级,令

$$\Phi'_\lambda = \text{span}\{V(x) \mid r(x) \geq 2\},$$
$$\Phi'_{\lambda 1} = \text{span}\{(A-\lambda I)^{r(x)-1}V(x) \mid r(x) \geq 2\}$$
$$(=\text{span}\{(A-\lambda I)^{r-1}x \mid x \text{ 是 } \Phi_\lambda(A) \text{ 中级为 } r(\geq 2) \text{ 的最高级向量全体}\})$$

显然, $A\Phi'_\lambda \subset \Phi'_\lambda$,并且 $\dim\Phi'_\lambda < \infty$. 在 $\Phi_{\lambda 1}(A)$ 中选一个闭线性子空间 Φ_0, 使得 $\Phi_{\lambda 1}(A) = \Phi'_{\lambda 1} \dotplus \Phi_0$ (这种 Φ_0 是可以选得到的. 例如, 取 Φ_0 为 $\Phi'_{\lambda 1}$ 在 $\Phi_{\lambda 1}(A)$ 中按 $(\Pi_K, [\cdot,\cdot])$ 的直交补子空间即可). 这样, $\Phi_\lambda(A) = \Phi_0 \dotplus \Phi'_\lambda$, 并满足 (iii) 的要求.

推论 2.11 在推论 2.10 假设下, 推论 2.10 的 (iii) 中的分解 $\Phi_\lambda(A) = \Phi_0 \dotplus \Phi'_\lambda$ 中的 Φ'_λ, 是一族(其实是有限个)线性无关的由最高级根向量产生的推移子空间张成的线性子空间.

证 由于

$$\Phi_{\lambda 1}(A) \subset \Phi_{\lambda 2}(A) \subset \cdots \subset \Phi_{\lambda\, 2K+1}(A) = \Phi_\lambda(A), \quad (2.71)$$

令 K_0 是使得 $\Phi_{\lambda m}(A) = \Phi_\lambda(A)$ 的 m 中最小的正整数. 作商空间

$$\Psi_i = \Phi_{\lambda i}(A)/\Phi_{\lambda\, i-1}(A), \quad i = 2, 3, \cdots, K_0.$$

设 $\dim\Psi_{K_0} = n_1$, 因而存在 $x_1, \cdots, x_{n_1} \in \Phi_\lambda(A)$, 它们都是级为 K_0 的最高级向量, 使得 $\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_{n_1} \in \Psi_{K_0}$, 并且 $\{\tilde{x}_i\}$ 是 Ψ_{K_0} 的线性基 ($\{x_i\}$ 本身必是线性无关的). 显然

$$\text{span}\{(A-\lambda I)x_i \mid i = 1, 2, \cdots, n_1\} \subset \Phi_{\lambda\, K_0-1}(A), \quad (2.72)$$

如果 $\{(A-\lambda I)x_i\}$ 在 Ψ_{K_0-1} 中相应的等价类 $\{\widetilde{(A-\lambda I)x_i}\}$ 张成的线性子空间 $\text{span}\{\widetilde{(A-\lambda I)x_i}\} \neq \Psi_{K_0-1}$, 可补充 $x_{n_1+1}, \cdots, x_{n_2} \in \Phi_{\lambda K_0-1}(A)$, 使得

$$\text{span}\{\widetilde{(A-\lambda I)x_1}, \cdots, \widetilde{(A-\lambda I)x_{n_1}}; \tilde{x}_{n_1+1}, \cdots, \tilde{x}_{n_2}\} = \Psi_{K_0-1}. \quad (2.73)$$

再考察 $(A-\lambda I)^2x_1, \cdots, (A-\lambda I)^2x_{n_1}, (A-\lambda I)x_{n_1+1}, \cdots,$

$(A-\lambda I)x_{n_2}$ 在 Ψ_{K_0-2} 中所相应等价类张成的线性子空间与 Ψ_{K_0-2} 的关系，类似地做下去，则不难得到如下一组最高级向量：

$$x_1, \cdots, x_{n_1}; x_{n_1+1}, \cdots, x_{n_2}; \cdots; x_{n_l+1}, \cdots, x_{n_l+1};$$
$$(l+1 \leqslant K_0-1),$$

它们都是最高级向量，如果取

$$\Phi_1' = \text{span}\{V(x_i)|1 \leqslant i \leqslant n_{l+1}\},$$

并类似于推论 2.10 的 (iii) 取 $\Phi_{\lambda 1}'(A)$ 和 Φ_0，易知分解 $\Phi_1(A)=\Phi_0 \dotplus \Phi_1'$ 就达到推论 2.11 的要求，证毕.

当然，也可以直接把 A 限制在推论 2.10 中所作的有限维不变子空间 Φ_λ' 上考虑，则利用 Jordan 标准形也可得到推论 2.11.

4.应用 下面给出自共轭算子的三角模型的两个直接的应用.

定理 2.12 Π_K 上自共轭算子 A 为有界的充要条件是，$\sigma(A)$ 是有界集.

证 必要性是显然的，下面证明充分性.

由于 $\sigma(A)$ 有界，所以数 $M>0$，对一切 $\lambda \in \sigma(A)$，$|\lambda| \leqslant M$. 不妨设 $M<\frac{1}{2}$ $\left(否则考察 \frac{1}{3M}A 即可\right)$. 这样，$\pm i \in \rho(A)$，因而 (2.62) 成立. 由于 U 是 A 的 Cayley 变换，所以 $1 \bar{\in} \sigma_p(U)$. 假设在标准分解 $\Pi_K = N \oplus \{Z+Z^*\} \oplus P$ 之下，$U=\{S, U_N, U_P, C, D, T\}$，因而

$$1 \bar{\in} \sigma(U_N) \cup \sigma(S) \cup \sigma(S^{-1*}) \cup \sigma_p(U_P).$$

如果 $1 \in \sigma(U_P)$，那末由 (2.14)—(2.17) 可知，$1 \in \sigma(U_P)-\sigma_p(U_P)$. 因而在 1 的任何环境中包含 $\sigma(U_P)$ 中无限个点，从而必有 $e^{i\theta} \neq 1$ (θ 是实数)，$e^{i\theta} \in \sigma(U_P)$，使得 $\left|\text{ctg}\frac{\theta}{2}\right|>M$. 因为 $\sigma(U_P) \subset \sigma(U)$. 根据 Cayley 变换的谱变换定理（第二章定理 3.14)，$-\text{ctg}\frac{\theta}{2} \in \sigma(A)$. 这与假设矛盾. 所以，$1 \in \rho(U_P)$. 再由 (2.64)，$A_P$ 是 $(P, (\cdot, \cdot))$ 有界线性算子，从而 A 是 Π_K 上有界线性算子. 证毕.

注意 定理 2.12 在一般的完备的不定度规空间中并不成立.

这样的例子将在第四章中给出。

下面给出 Von-Neumann的谱扰动理论在Π_κ间空间上的推广。

引理 2.13 设 $\Pi=H_-\oplus H_+$ 是正则分解，它产生的内积为 $[\cdot,\cdot]$. 如果Π上线性算子T是 $(\Pi,[\cdot,\cdot])$ 上 Hilbert-Schmidt 算子(或迹算子)，那末对任何正则分解 $\Pi=H'_-\oplus H'_+$，由它产生的内积记为$[\cdot,\cdot]'$，T必是 $(\Pi,[\cdot,\cdot]')$ 上的 Hilbert-Schmidt 算子(或迹算子)，并且在 $(\Pi,[\cdot,\cdot])$ 和 $(\Pi,[\cdot,\cdot]')$ 上 Hilbert-Schmidt 范数(或迹范数)是等价的.

证 由 $[\cdot,\cdot],[\cdot,\cdot]'$ 分别导出的范数记为 $\|\cdot\|,\|\cdot\|'$. 因为它们是等价的，所以存在Π到Π的双射v，它是 $(\Pi,[\cdot,\cdot])$ 上有界的正算子，使得

$$[x,y]'=[vx,y],\quad x,y\in\Pi. \tag{2.74}$$

这时 v^{-1} 存在，并且也是连续的。因而$v^{\frac{1}{2}}$是 $(\Pi,[\cdot,\cdot]')$ 到 $(\Pi,[\cdot,\cdot])$ 的酉算子.

设 $\{e'_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是 $(\Pi,[\cdot,\cdot]')$ 上完备就范直交系，因而 $\{e_\lambda|e_\lambda=v^{\frac{1}{2}}e'_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 是 $(\Pi,[\cdot,\cdot])$ 上完备就范直交系. 由于$\|T\|_2=\|T^*\|_2$($\|\cdot\|_2$ 表示按$\|\cdot\|$的 Hilbert-Schmidt 范数)，所以

$$\begin{aligned}\|T\|_2'^2&=\sum_\lambda\|Te'_\lambda\|'^2=\sum_\lambda\|v^{\frac{1}{2}}Tv^{-\frac{1}{2}}e_\lambda\|^2\\&\leqslant\|v^{\frac{1}{2}}\|^2\|Tv^{-\frac{1}{2}}\|_2^2=\|v^{\frac{1}{2}}\|\|v^{-\frac{1}{2}}T^*\|_2^2\\&\leqslant\|v^{\frac{1}{2}}\|^2\|v^{-\frac{1}{2}}\|^2\|T\|_2^2{}^{1)},\end{aligned}$$

即 $\|T\|_2'\leqslant\|v^{\frac{1}{2}}\|\|v^{-\frac{1}{2}}\|\|T\|_2$.

同样可证 $\|T\|_2\leqslant\|v^{-\frac{1}{2}}\|'\|v^{-\frac{1}{2}}\|'\|T\|_2'$. 这就是说，$T$也是 $(\Pi,[\cdot,\cdot]')$ 上 Hilbert-Schmidt 算子，并且$\|\cdot\|_2'$与$\|\cdot\|_2$等价.

由算子为迹算子的充要条件是表示成两个 Hilbert-Schmidt 算子的乘积，可知，T为 $(\Pi,[\cdot,\cdot])$ 上迹算子的充要条件是，它是 $(\Pi,[\cdot,\cdot]')$ 上迹算子. 下面再证迹范数是等价的.

设 $T=T_1T_2$，T_1,T_2 是两个 Hilbert-Schmidt 算子，$\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$，$\{g_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是 $(\Pi,[\cdot,\cdot])$ 的任意两个完备就范直交系，那

1) 这里$\|v^{1/2}\|$，$\|v^{-1/2}\|$ 是将$v^{1/2}$，$v^{-1/2}$ 视为 $(\Pi,[\cdot,\cdot])$ 上算子时的范数.

末

$$\|T\|_1 = \sup_{\{g_\lambda\},\{e_\lambda\}} \sum_\lambda |[Tg_\lambda, e_\lambda]|$$

$$\leqslant \left(\sum_\lambda \|T_2 g_\lambda\|^2 \sum_\lambda \|T_1^* e_\lambda\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|T_2\|_2 \|T_1^*\|_2 = \|T_2\|_2 \|T_1\|_2. \qquad (2.75)$$

显然，总可以找到一个分解 $T = T_1^0 T_2^0$，使得 $\|T\|_1 = \|T_2^0\|_2 \|T_1^0\|_2$ (例如，取 $T_2^0 = (T^*T)^{\frac{1}{4}}, T_1^0 = U(T^*T)^{\frac{1}{4}}$，其中$U$是$T$的极分解 $T = U(T^*T)^{\frac{1}{2}}$ 的保距部分).

设 $\{g'_\lambda | \lambda \in \Lambda\}, \{e'_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ 是 $(\Pi, [\cdot, \cdot]')$ 的两个完备就范直交系，令 $g_\lambda = v^{\frac{1}{2}} g'_\lambda$，$e_\lambda = v^{\frac{1}{2}} e'_\lambda$，那末

$$\|T\|'_1 = \sup_{\{g'_\lambda\},\{e'_\lambda\}} \sum_\lambda |[Tg'_\lambda, e'_\lambda]'|$$

$$= \sup_{\{g'_\lambda\},\{e'_\lambda\}} \sum_\lambda |[v^{\frac{1}{2}} T v^{-\frac{1}{2}} g_\lambda, e_\lambda]|$$

$$\leqslant \|T_2 v^{-\frac{1}{2}}\|_2 \|T_1^* v^{\frac{1}{2}}\|_2$$

$$\leqslant \|v^{-\frac{1}{2}}\| \|v^{\frac{1}{2}}\| \|T_1\|_2 \|T_2\|_2.$$

在上式中取 $T_1 = T_1^0$，$T_2 = T_2^0$，则可得到

$$\|T\|'_1 \leqslant \|v^{-\frac{1}{2}}\| \|v^{\frac{1}{2}}\| \|T\|_1. \qquad (2.76)$$

同样，又可以证得

$$\|T\|_1 \leqslant \|v^{-\frac{1}{2}}\|' \|v^{\frac{1}{2}}\|' \|T\|'_1, \qquad (2.77)$$

即 $\|\cdot\|'_1$，$\|\cdot\|_1$ 是等价的. 证毕.

根据引理 2.13，我们引入如下定义.

定义 2.2 设T是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上有界线性算子. $\Pi = H_- \oplus H_+$ 是正则分解，由它导出的内积为 $[\cdot, \cdot]$. 如果T是 $(\Pi, [\cdot, \cdot])$ 上 Hilbert-Schmidt 算子或迹算子，那末称T是 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上的 Hilbert-Schmidt 算子或迹算子. Hilbert-Schmidt 算子简称为 $H.S.$ 算子，迹算子又称为核算子.

定理 2.14 设A是可析的 Π_K 空间上的自共轭算子. 又设 $\Pi_K = H_- \oplus H_+$ 是正则分解，由它导出的范数为$\|\cdot\|$. 那末，对任何 $\epsilon > 0$，必存在 Π_K 上自共轭的 $H.S.$ 算子 A_1，使得 $\|A_1\|_2 < \epsilon$，

并且 $A+A_1$ 的谱全是特征值.

证 设在标准分解 $\Pi_K=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$ 之下，$A=\{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$. 又设 $\Pi_K=H'_-\oplus H'_+$ 是满足 $H'_-\supset N$, $H'_+\supset P$ 的一个正则分解，它导出的范数为 $\|\cdot\|'$. 我们只要对 $\|\cdot\|'$ 证明定理 2.14 成立就可以了.

事实上，因为 A_P 是 $(P,(\cdot,\cdot))$ 上自共轭算子，由 Von-Neumann 定理，存在 $(P,(\cdot,\cdot))$ 上自共轭算子 A_{1P}; $\|A_{1P}\|'_2<\varepsilon$, 并且 A_P+A_{1P} 的谱全是特征值. 在 Π_K 的上述标准分解下作算子 $A_1=\{0, 0, A_{1P}, 0, 0, 0\}$. 显然，$A_1$ 是 Π_K 上自共轭算子，并且 $\|A_1\|'_2<\varepsilon$. 再由定理 2.8，立即可知 $\sigma(A+A_1)=\sigma_p(A+A_1)$. 证毕.

为了以后应用的方便，我们给出下面的定理.

定理 2.15 设 A 是 Π_K 空间上自共轭算子，$N\oplus Z$ 是 A 的一个 K 维半负不变子空间，那末

(i) 必存在标准分解 $\Pi_K=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$, 使得 A 在这个标准分解下，$A=\{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$.

(ii) 对于 Π_K 的任何标准分解 $\Pi_K=N'\oplus\{Z'+Z^{*\prime}\}\oplus P'$, 只要 $N'\oplus Z'=N\oplus Z$, 并且 $Z^{*\prime}\subset\mathscr{D}(A)$, 那末在这个分解下，就有 $A=\{S', A_{N'}, A_{P'}, F', G', Q'\}$.

注意 这里 K 维半负不变子空间是事先给定的. 证明本定理的方法之一是用 Cayley 变换，$N\oplus Z$ 便成为 U 算子(A 的 Cayley 变换)不变子空间. 利用 U 的三角模型和引理 2.9，可以适当选取 $Z^*\oplus P$，使得 $Z^*\subset\mathscr{R}(I-U)(=\mathscr{D}(A))$，并且 $\Pi_K=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$ 成为标准分解，再用 Cayley 逆变换就得到 (i). 同样，因为已知 $Z^{*\prime}\subset\mathscr{D}(A)$，所以 $Z^{*\prime}\subset\mathscr{R}(I-U)$. 利用 Cayley 逆变换便知，$A_{P'}$ 是 $(P',(\cdot,\cdot))$ 上自共轭算子，并且 (ii) 成立. 证明本定理的另一个方法就是直接证明. 例如证明 (i)，就是想法适当选 Z^*, P, 然后证明 A 在 P 上的限制 A_P 是 $(P,(\cdot,\cdot))$ 上自共轭算子. 这样，(ii) 就成为 (i) 的直接推论.

§3 自共轭算子的开根

在 Hilbert 空间中，利用谱分解可以讨论自共轭算子的开根，例如 Hilbert 空间上半正自共轭算子 A，总存在自共轭算子 A_1，使得 $A_1^2 = A$. 如果再要求 $\sigma(A_1) = \{\sqrt{\lambda}\,|\,\lambda \in \sigma(A)\}$，那末满足这种要求的平方根是唯一的. 在一般不定度规空间中虽可形式地引入半正自共轭算子，但它已失去 Hilbert 空间上半正算子的重要性质，所以在一般不定度规空间中讨论自共轭算子的平方根并非易事. 在本节中将用 §2 给出的自共轭算子的模型来讨论自共轭算子的平方根问题.

1. 乘方 讨论自共轭算子的开方之前先讨论乘方.

首先注意，在普通 Hilbert 空间中，一个非零稠定算子 A 可能有 $\mathscr{D}(A^2) = \{0\}$. 而对于 Π_K 空间，自共轭算子 A 在标准分解 $\Pi_K = N \oplus \{Z + Z^*\} \oplus P$ 之下为 $\{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$，如果 A 是无界的，完全可能 Z^* 中没有向量属于 $\mathscr{D}(A^2)$. 下面就是一例.

例 3.1 设 $\Pi_K = \{Z + Z^*\} \oplus P$ 是标准分解，而且 $P = L^2[0, 1]$，$\dim Z = 1$，$(z, z^*) = 1 (z \in Z, z^* \in Z^*)$. 令 A 在这个标准分解之下为 $\{S, A_P, G, Q\} = \{0, A_P, G, 0\}$，其中 A_P 如下：

$$
\begin{aligned}
&A_P:\ f(t) \longmapsto \frac{1}{t} f(t), \\
&f(t) \in \mathscr{D}(A_P) \left(= \left\{ g(t)\ \Big|\ g(t), \frac{1}{t} g(t) \in L^2[0, 1] \right\} \right).
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

而算子 G 取法如下：对任何 $f \in \mathscr{D}(A_P)$，$Gf = (f, f_0)z$，这里的 $f_0(t) \in L^2[0,1]$，但 $\frac{1}{t} f_0(t) \bar{\in} L^2[0, 1]$. 从 $(f, f_0) = \langle Gf, z^* \rangle = (f, G^*z^*)$，立即推出 $G^*z^* = f_0$，由此可知 $Az^* = G^*z^* = f_0$. 但因为 $\frac{1}{t} f_0(t) \bar{\in} L^2[0, 1]$，所以 $f_0 \bar{\in} \mathscr{D}(A_P)$，从而 $z^* \bar{\in} \mathscr{D}(A^2)$.

虽然有上例，但仍与 Hilbert 空间一样，有如下定理。

定理 3.1 设 A 是 Π_K 上自共轭算子，那末 A^2 必是 Π_K 上自共轭算子，并且必存在某个标准分解 $\Pi_K = N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$. 在这个分解下，$A = \{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$，$A^2 = \{S^2, A_N^2, A_P^2, SF + FA_N, SG + GA_P, QS^* + SQ + GG^* - FF^*\}$.

证 因 $A = A^\dagger$，所以存在标准分解 $\Pi_K = N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$，使得 $A=\{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$. 下面分两步来证明 $A^2=A^{2\dagger}$.

(I) 先证对任何自然数 n，$\mathscr{D}(A^n)$ 在 Π_K 中稠密. 事实上，由于 $\dim(N\oplus Z) = K$，并且 $A(N\oplus Z)\subsetneq N\oplus Z$，所以 $N\oplus Z\subset\mathscr{D}(A^2)$. 而对任何 $x\in\mathscr{D}(A_P)$，由于 $\mathscr{D}(G)$[1]$\supset\mathscr{D}(A_P)$，所以当 $x\in\mathscr{D}(A_P^2)$ 时，$A_Px\in\mathscr{D}(G)$，并且

$$Ax = A_Px + Gx,\quad A^2x = A_P^2x + GA_Px + SGx. \tag{3.2}$$

由此可知，$\mathscr{D}(A_P^2)\subset\mathscr{D}(A^2)$.

令 $A_P = \int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE_\lambda$ 是谱分解，记 $P_0 = (E_\infty - E_1) + (E_{-1} - E_{-\infty})$. 对任何 $z^*\in Z^*$，$G^*z^*\in P$，显然 $(I-P_0)G^*z^*\in\mathscr{D}\cdot(A_P^k)$，$k=1,2,\cdots$. 令 $x^* = -A_P^{-1}P_0G^*z^*$，显然 $x^*\in\mathscr{D}\cdot(A_P)$. 由此得到

$$A_Px^* + G^*z^* = (I-P_0)G^*z^*(\in\mathscr{D}(A_P^k),\ k=1,2,\cdots). \tag{3.3}$$

因为(参见本章 (2.53) 式)

$$A(x^* + z^*) = A_Px^* + G^*z^* + S^*z^* + Qz^* - F^*z^* + Gx^*, \tag{3.4}$$

上式中右边后四项属于 $\mathscr{D}(A)$，再注意到 (3.3)，立即得到 $x^*+z^*\in\mathscr{D}(A^2)$.

任取 z^* 中线性基 $z_1^*, \cdots, z_l^*$ $(l\leqslant K)$，对每个 z_i^* 按上面配以 x_i^*，使得 $x_i^* + z_i^*\in\mathscr{D}(A^2)$，这样 $Z^{*\prime} = \mathrm{span}\{z_i^* + x_i\}\subset\mathscr{D}(A^2)$. 显然，$\Pi_K$ 中的稠密集 $N\oplus\{Z + Z^{*\prime}\}\dotplus\mathscr{D}(A_P^2)\subset$

---

1) 其实，G 是 $(P,(\cdot,\cdot))$ 到 $(Z,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的有界线性算子(它蕴含 $\mathscr{D}(G) = P$)参见本章 §2 的 (2.62)—(2.66) 式后的说明.

$\mathscr{D}(A^2)$，从而 A^2 是 Π_K 上稠定的。

继续类似地做下去，就得到对任何自然数 n，A^n 在 Π_K 上是稠定的算子[1]。

(II) 证明 $A^2 = A^{2\dagger}$． 对任何自然数 n，显然 $A^n \subset (A^n)^\dagger$，即 A^n 是对称的，特别 $A^2 \subset A^{2\dagger}$．因此，A^2，A 在上半开平面和下半开平面中最多只有有限个特征值（见第二章定理 1.6 的 (iii)），从而存在实数对 (ρ, θ)，$\rho > 0$，$\theta \in (0, \pi)$，使得 $\sqrt{\rho}e^{\pm\frac{i\theta}{2}}$，$-\sqrt{\rho}\cdot e^{\pm\frac{i\theta}{2}}$ 都不是 A 的特征值，而 $\rho e^{\pm i\theta}$ 都不是 A^2 的特征值。

由于对任何 $x \in \mathscr{D}(A^2)$，

$$(A^2 - \rho e^{\pm i\theta}I)x = (A + \sqrt{\rho}e^{\pm\frac{i\theta}{2}}I)(A - \sqrt{\rho}e^{\pm\frac{i\theta}{2}}I)x, \quad (3.5)$$

所以 $\mathscr{R}(A^2 - \rho e^{\pm i\theta}I) = (A + \sqrt{\rho}e^{\pm\frac{i\theta}{2}}I)(A - \sqrt{\rho}e^{\pm\frac{i\theta}{2}}I)\cdot \mathscr{D}(A^2)$．如能证明 $\mathscr{R}(A^2 - \rho e^{\pm i\theta}I) = \Pi_K$，那末算子

$$U = (A^2 - \rho e^{i\theta}I)(A^2 - \rho e^{-i\theta}I)^{-1}$$

便是酉算子，从而 $A^2 = A^{2\dagger}$（见第二章推论 3.5）。

今证明 $\mathscr{R}(A^2 - \rho e^{i\theta}I) = \Pi_K$：因为 $\pm\sqrt{\rho}e^{\frac{i\theta}{2}} \bar{\in} \sigma_p\cdot(A)$，所以 $\pm\sqrt{\rho}e^{\frac{i\theta}{2}} \bar{\in} \sigma(S) \cup \sigma(A_N)$，而 Z，$N \oplus Z$ 是 A 的两个有限维不变子空间，所以

$$(A^2 - \rho e^{i\theta}I)Z = Z, \ (A^2 - \rho e^{i\theta}I)(N \oplus Z) = N \oplus Z, \quad (3.6)$$

即 $N \oplus Z \subset \mathscr{R}(A^2 - \rho e^{i\theta}I)$．对任何 $p \in \mathscr{D}(A_P^2)$，$z \in Z$，由于

$$(A^2 - \rho e^{i\theta}I)(p + z) = (A_P^2 - \rho e^{i\theta}I)p + GA_P p + SGp + (S^2 - \rho e^{i\theta}I)z, \quad (3.7)$$

那末对于给定的 $p \in \mathscr{D}(A_P^2)$，如果取 $z = -(S^2 - \rho e^{i\theta}I)^{-1}\cdot(GA_P p + SGp)$，并注意到 $\mathscr{R}(A_P^2 - \rho e^{i\theta}I) = P$ 以及 (3.6)，立即有

$$(A^2 - \rho e^{i\theta}I)(N \oplus Z \oplus \mathscr{D}(A_P^2)) = N \oplus Z \oplus P. \quad (3.8)$$

---

1) 显然，$A^n (n \geq 3)$ 是稠定算子的结论，也可以作为"Π_K 上自共轭算子 A 的 A^2 也必是自共轭算子"这个结论的直接推论。

利用 (I) 中所证明的事实，对任何 $z^*\in Z^*$，可适当配以 $x^*=-A_P^{-1}P_0G^*z^*$，使得 $x^*+z^*\in\mathscr{D}(A^2)$，从而

$$(A^2-\rho e^{i\theta}I)(x^*+z^*)=(S^{*2}-\rho e^{i\theta}I)z^*$$
$$+p+n+z, \tag{3.9}$$

其中 $p+n+z\in N\oplus Z\oplus P$. 再利用 (3.8)，易知必存在 $n'+z'+p'\in N\oplus Z\oplus\mathscr{D}(A_P^2)$，使得

$$(A^2-\rho e^{i\theta}I)(x^*+z^*+n'+z'+p')=(S^{*2}-\rho e^{i\theta}I)z^*, \tag{3.10}$$

但 $\pm\sqrt{\rho}\,e^{\frac{i\theta}{2}}\bar{\in}\sigma(S^*)$，所以 $(S^{*2}-\rho e^{i\theta}I)Z^*=Z^*$. 再注意到 $\mathscr{D}(A_P^2)\subset\mathscr{D}(A^2)$，因而 $\mathscr{R}(A^2-\rho e^{i\theta}I)\supset N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$.

同样，用 $-\theta$ 代替上面的 θ，就得到 $\mathscr{R}(A^2-\rho e^{-i\theta}I)=\Pi_K$. 这样，就证明了 A^2 是 Π_K 上自共轭算子.

(III) 证明 A^2，A 具有公共的标准分解 $\Pi_K=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$：令 $U_\pm=(A\pm\sqrt{\rho}\,e^{\frac{i\theta}{2}}I)(A\pm\sqrt{\rho}\,e^{-\frac{i\theta}{2}}I)^{-1}$，$U=(A^2-\rho e^{i\theta}I)\cdot(A^2-\rho e^{-i\theta}I)^{-1}$. 显然，$U$，$U_\pm$ 都是 Π_K 上酉算子. 由于

$$\begin{aligned}U_+U_-&=(A+\sqrt{\rho}\,e^{\frac{i\theta}{2}}I)(A+\sqrt{\rho}\,e^{-\frac{i\theta}{2}}I)^{-1}\\&\quad\cdot(A-\sqrt{\rho}\,e^{\frac{i\theta}{2}}I)(A-\sqrt{\rho}\,e^{-\frac{i\theta}{2}}I)^{-1}\\&=(A+\sqrt{\rho}\,e^{\frac{i\theta}{2}}I)(A-\sqrt{\rho}\,e^{\frac{i\theta}{2}}I)\\&\quad\cdot(A+\sqrt{\rho}\,e^{-\frac{i\theta}{2}}I)^{-1}(A-\sqrt{\rho}\,e^{-\frac{i\theta}{2}})^{-1}\\&=U^{1)},\end{aligned} \tag{3.11}$$

同样，$U_-U_+=U$，即 U_+，U_-，U 彼此可交换，从而对 U_+，U_-，U 存在公共的标准分解 $\Pi_K=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$[2]. 利用 Cayley 变换，就得到在这个标准分解下，

$$A=\{S,\ A_N,\ A_P,\ F,\ G,\ Q\},$$

---

1) 这个等式中用到下列等式：$(A+\sqrt{\rho}\,e^{-i\theta/2}I)^{-1}(A-\sqrt{\rho}\,e^{i\theta/2}I)|_{\mathscr{D}(A)}=(A-\sqrt{\rho}\,e^{i\theta/2}I)(A+\sqrt{\rho}\,e^{-i\theta/2}I)^{-1}|_{\mathscr{D}(A)}$.

2) 当然，这里要求 $Z^*\subset(\mathscr{D}(A^2)\cap\mathscr{D}(A))$，即要求 $Z^*\subset\mathscr{D}(A^2)$. 因此，$Z^*$ 要满足 $Z^*\subset\mathscr{R}(I-U)$. 这点是可以做到的，见本章引理 2.9.

$$A^2 = \{S_1, A_{N1}, A_{P1}, F_1, G_1, Q_1\}.$$

注意到 $N\oplus\{Z + Z^*\}\subset\mathscr{D}(A^2)$，经直接计算不难得到

$$S_1 = S^2, \quad A_{N1} = A_N^2, \quad A_{P1} = A_P^2, \tag{3.12}$$

$$F_1 = SF + FA_N, \quad G_1 = SG + GA_P, \tag{3.13}$$

$$Q_1 = QS^* + SQ + GG^* - FF^*. \tag{3.14}$$

定理证毕。

推论 3.2 A 是 Π_K 上自共轭算子，那末 $\sigma(A^2) = \{\lambda^2 | \lambda \in \sigma(A)\}$.

证 利用定理 3.1 和谱的等式(见本章定理2.8中 (2.54) 式)，

$$\begin{aligned} \sigma(A) &= \sigma(S)\cup\sigma(A_N)\cup\sigma(A_P)\cup\sigma(S^*), \\ \sigma(A^2) &= \sigma(S^2)\cup\sigma(A_N^2)\cup\sigma(A_P^2)\cup\sigma(S^{*2}), \end{aligned} \tag{3.15}$$

立即得到本推论的结论．证毕．

定理 3.1 以及推论 3.2 可以推广到任意乘方情况．

定理 3.3 若 A 是 Π_K 上自共轭算子，则下列命题成立：

(i) 对任何自然数 n，A^n 是 Π_K 上自共轭算子，并且

$$\sigma(A^n) = \{\lambda^n | \lambda \in \sigma(A)\}. \tag{3.16}$$

(ii) 存在标准分解 $\Pi_K = N\oplus\{Z + Z^*\}\oplus P$，使下式成立：

$$\begin{aligned} A^k = \Big\{ & S^k, A_N^k, A_P^k, \sum_{i=0}^{k-1} S^i F A_N^{k-1-i}, \\ & \sum_{i=0}^{k-1} S^i G A_P^{k-1-i}, \sum_{i=0}^{k-1} S^i Q S^{*k-1-i} \\ & - \sum_{l+j+m=k-2} S^l (F A_N^j F^* + G A_P^j G^*) S^{*m} \Big\}, \\ & k = 1, 2, \cdots. \end{aligned} \tag{3.17}$$

特别，如果 $\mathscr{D}(A) = \Pi_K$，那末对使 A 具有形为 $\{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$ 的标准分解 $\Pi_K = N\oplus\{Z\oplus Z^*\}\oplus P$，(3.17) 必成立．

本定理可先仿定理 3.1 及推论 3.2 的证明得到 (i)．利用 A^n 是自共轭算子的事实，再仿定理 3.1 的证明中的 (III)，知道 A^n 的 Cayley 变换 $U^{(n)}$ 必是 A 的某 n 个 Cayley 变换 $U_i^{(n)}(i=1, 2, \cdots, n)$ 的积：$U^{(n)} = U_1^{(n)}U_2^{(n)}\cdots U_n^{(n)}$．注意 $\{U_i^{(n)} | n = 1, 2, \cdots,$

$i=1,2,\cdots,n\}$ 是彼此可交换的，根据§1定理1.18及第二章§3定理3.14的(i)，立即可知(ii)成立。

推论 3.4 设 A 是 Π_K 上自共轭算子。

(i) 如果 A 是无界的，那末对任何自然数 n，A^n 也是无界的。

(ii) 如果 A 是广义幂零算子[1]，那末 A 必是幂零算子。

证 由于 A 无界等价于 $\sigma(A)$ 无界，从定理3.3的(i)立即可知，推论中的(i)是显然的。

当 A 是广义幂零时，$\sigma(A)=\{0\}$，因而存在一个标准分解 $\Pi_K=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$。在这个分解之下，$A=\{S,A_N,A_P,F,G,Q\}$ 中的 $A_N=0$，$A_P=0$，$\sigma(S)=\{0\}$，从而 $S^K=0$。再由(3.17)可知，$A^{2K+1}=0$，即 A 是幂零算子。从而(ii)成立。证毕。

2. 平方根 我们只讨论自共轭算子的自共轭平方根。

定义 3.1 设 A 是 Π_K 空间上自共轭算子。如果存在自共轭算子 A_1，使得 $A_1^2=A$，那末称 A_1 是 A 的自共轭平方根。

引理 3.5 设 A 是 Π_K 空间上有界自共轭算子。如果 A_1 是 A 的自共轭平方根，那末 A_1 必是有界的。

证 根据定理2.12知道，$\sigma(A)$ 是有界集。再根据定理3.1，$\{\lambda^2|\lambda\in\sigma(A_1)\}=\sigma(A)$，从而 $\sigma(A_1)$ 必是有界集。再根据定理2.12，便知道 A_1 是有界的。证毕。

引理 3.6 设 $\Pi_K=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$ 是标准分解，在这个分解下，自共轭算子 $A=\{S,A_N,A_P,F,G,Q\}$。当 $\{Z,Z^*\}$ 中对偶基 $\{z_i\}$，$\{z_i^*\}$ 换为对偶基 $\{z_i'\}$，$\{z_i^{*\prime}\}$ 时，如记基变换为 $T:z_i'\longmapsto z_i$ $(i=1,2,\cdots,l,\ l=\dim Z)$，那末 Q 在 $\{z_i'\}$，$\{z_i^{*\prime}\}$ 下为

$$Q'=TQT^*. \tag{3.18}$$

证 令 $L:z_i'^*\longmapsto z_i^*$，$i=1,2,\cdots,l$，利用

$$\langle z_i,z_j^*\rangle=\delta_{ij}=\langle z_i',z_j^{*\prime}\rangle\quad i,j=1,2,\cdots,l \tag{3.19}$$

---

1) "广义幂零算子"是指谱仅含一个点0的线性算子。

得到 $L=T^{-1*}$. 再由

$$Qz_i^{*\prime}=QL^{-1}z_i^*=\sum_{j=1}^{l}T_{ji}^*Qz_j^*=\sum_{j,k=1}^{l}T_{ji}^*Q_{kj}z_k$$

$$=\sum_{j,k,m=1}^{l}T_{ji}^*Q_{kj}T_{mk}z_m'^{1)},\tag{3.20}$$

有 $Q'=TQT^*$.

在讨论自共轭算子在什么条件下才有自共轭平方根之前，先给一些例子说明确有自共轭算子，没有自共轭平方根.

例 3.2 设 A 是 Π_K 空间上线性算子，并且对一切 $x\in\Pi_K$，$(Ax,x)\geqslant 0$，即使 A 是有界的(这时，A 必是自共轭的)，也不存在自共轭的平方根的例子如下：

设 $\Pi_K=\{Z+Z^*\}\oplus P$ 是标准分解，$\dim Z=K$. 作 $A=\{S,A_P,G,Q\}$: $S=0$，$G=0$，A_P 是 $(P,(\cdot,\cdot))$ 上有界正算子，但 $0\bar{\in}\sigma_p(A_P)$，$Q=\alpha I$ (α 是非零实数). 注意，I 在对偶基 $\{z_i\}$，$\{z_i^*\}$ 之下表示：$z_i^*\longmapsto z_i$ $(i=1,2,\cdots,K)$. 下面证明如此作出的自共轭算子 A 没有自共轭平方根.

证 假如不对，有自共轭算子 A_1，使得 $A_1^2=A$. 由引理 3.5，A_1 是有界的. 显然，相应于 0 的 A 的特征子空间就是 Z. 由于 $A_1^2=A$，所以 A_1 与 A 可交换，因而 Z 是 A_1 的 K 维半负不变子空间. 这样，在标准分解 $\Pi_K=\{Z+Z^*\}\oplus P$ 之下，$A_1=\{S_1,A_{P1},G_1,Q_1\}$，而且(见定理 3.1)

$$S_1^2=S,\quad A_{P1}^2=A_P,\tag{3.21}$$

$$S_1G_1+G_1A_{P1}=0,\quad S_1Q_1+Q_1S_1^*=Q-G_1G_1^*.\tag{3.22}$$

由于 $A_{P1}^2=A_P>0$，所以 $\mathcal{N}(A_{P1})=\mathcal{N}(A_P)=\{0\}$. 由于 $S_1^2=S=0$，所以 $\sigma(S_1)=\{0\}$，从而 $Z\subset\Phi_0(S_1)$($\Phi_0(S_1)$ 是 S_1 相应于 0 的根子空间)，并且 Z 中向量为二级根向量. 因此，存在 Z 的线性基

$$z_1',\cdots,z_{l_0-1}',z_{l_0}',\cdots,z_{l_0+2m}'\ (l_0+2m=K),$$

1) 这里 T_{ij}，T_{ij}^*，Q_{ij} 是在相应对偶基之下线性变换 T，T^*，Q 的矩阵表示中矩阵元.

使得

$$S_1 z_i' = 0,\ i = 1, 2, \cdots, l_0, l_{0+2n+1}\ (n=0, 1, \cdots, m-1),$$
$$S_1 z_{l_0+2n}' = z_{l_0+2n-1}',\ n = 1, 2, \cdots, m. \tag{3.23}$$

因为 G_1 是 $(P, (\cdot, \cdot))$ 到 $(Z, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ 的有界线性算子，所以 G_1 可以表示成

$$G_1 p = \sum_{i=1}^{K} (p, y_i) z_i', \tag{3.24}$$

其中 $y_1, \cdots, y_K$ 是 P 中由 G_1 所决定的一组向量。显然 $G_1 \longmapsto (y_1, \cdots, y_K)$ 是线性同构，今后简写为 $G_1 = (y_1, \cdots, y_K)$。由 (3.22) 的第一式得到对任何 $p \in P$,

$$(S_1 G_1 + G_1 A_{P1}) p = 0,$$

即

$$\sum_{i=1}^{K} (p, y_i) S_1 z_i' + \sum_{i=1}^{K} (A_{P1} p, y_i) z_i' = 0,\ p \in P. \tag{3.25}$$

利用 (3.23)，由上式便得到对一切 $p \in P$,

$$(p, A_{P1} y_i) = (A_{P1} p, y_i) = 0,$$
$$i = 1, 2, \cdots, l_0, l_0 + 2n (n = 1, 2, \cdots, m), \tag{3.26}$$
$$(p, y_{i+1} + A_{P1} y_i) = 0,$$
$$i = l_0 + 2n - 1\ (n = 1, 2, \cdots, m). \tag{3.27}$$

由于 $\mathscr{N}(A_{P1}) = \{0\}$，从 (3.26) 就得到

$$y_i = 0,\ i = 1, 2, \cdots, l_0, l_0 + 2n\ (n = 1, 2, \cdots, m). \tag{3.28}$$

再利用 (3.28)，又从 (3.27) 得到 $y_i = 0$, $i = l_0 + 2n - 1 (n=1, 2, \cdots, m)$，即 $G_1 = (y_1, \cdots, y_K) = 0$.

在把对偶基 $\{z_i'\}$, $\{z_i^{*\prime}\}$ 中 z_i' 与 $z_i^{*\prime}$ 视为同一个，由 (3.23) 得到

$$\langle z_i^{*\prime}, (S_1 Q_1 + Q_1 S_1^*) z_i^{*\prime} \rangle = \langle S_1^* z_i^{*\prime}, Q_1 z_i^{*\prime} \rangle + \langle z_i^{*\prime}, Q_1 S_1^* z_i^{*\prime} \rangle = 0,$$
$$i = 1, 2, \cdots, l_0, l_0 + 2n\ (n = 1, 2, \cdots, m). \tag{3.29}$$

如记 $T: z_i' \longmapsto z_i (i = 1, 2, \cdots, K)$，由引理 3.6，有 $Q' = \alpha TT^*$. 因为 T 是非奇的，所以对每个 z_i',

$$\langle TT^* z_i^{*\prime}, z_i^{*\prime} \rangle = \langle T^* z_i^{*\prime}, T^* z_i^{*\prime} \rangle \neq 0,\ i=1, 2, \cdots, K. \tag{3.30}$$

注意到 $G_1 = 0$，从 (3.22) 易知 (3.29) 与 (3.30) 是矛盾的。从

而不可能有自共轭算子 A_1，使得 $A_1^2=A$．证毕．

其实，上例说明：一个自共轭算子 A，如果相应于 0 的特征子空间是退化的，那末一般说来，A 不能有自共轭的平方根．

此外，对于 Π_K 空间上含有负实谱的自共轭算子，如果相应于某个负实谱的特征子空间是一维时，它显然也不可能有自共轭平方根．

下面先给出 Π_K 上自共轭算子 A 存在自共轭平方根的充要条件．

定理 3.7 设 A 是 Π_K 空间上自共轭算子．如果 A 有自共轭的平方根，那末

(i) A 的负实谱必是特征值．

(ii) 对 A 的每个负特征值，相应的根子空间 $\Phi_\lambda(A)$ 必是非退化的，并且 $\Phi_\lambda(A)$ 的极大正和极大负子空间维数必相等．

(iii) A 的负特征值只有有限个，个数不超过 K．

(iv) 对每个负特征值 λ，有分解 $\Phi_\lambda(A)=\Phi_0\dotplus\Phi'$，其中 $\Phi'=\mathrm{span}\{V(x)|x\in\Phi_\lambda(A)\}$，而对每个最高级向量 $x\in\Phi_\lambda(A)$，$V(x)$ 是零性子空间，且存在相应的最高级向量 y，使得 $V(x)+V(y)$ 是非退化的，而 $\{(A-\lambda I)^q x\}$，$\{(A-\lambda I)^{r-q}y\}$ 构成对偶族，其中 r 是 x，也是 y 的级．$\Phi_0\subset\Phi_{\lambda 1}(A)$，$\Phi_0$ 是非退化并具有相同维数的极大正和极大负子空间．

反之，如果自共轭算子的负实谱满足 (i)—(iv)，并且在 $(\mathrm{span}\{\Phi_\lambda(A)|\lambda<0\})^\perp$ 具有自共轭平方根，那末 A 在 Π_K 上必有自共轭平方根．

证 先设 A 有自共轭的平方根 A_1．下面证明 (i)—(iv) 是必要的．

(i) 由于 $\sigma(A_1^2)=\sigma(A)$，所以只有 A_1 的纯虚数特征值 λ，才有 $\lambda^2<0$，但 A_1 的纯虚数特征值是有限个，从而 A 的负谱点只有有限个，并且每个负谱点必是特征值．

(ii) 设 λ 是 A 的负特征值．显然，$\pm\sqrt{|\lambda|}i\in\sigma_p(A_1)$，并且对任何 $x\in\Phi_{\sqrt{|\lambda|}i}(A_1)\dotplus\Phi_{-\sqrt{|\lambda|}i}(A_1)$，必存在充分大的自然数 q，使

得(注意，$\Phi_{\pm\sqrt{|\lambda|}i}(A_1)\subset D(A_1^k)$，$k=1,2,\cdots$)

$$0=(A_1-\sqrt{|\lambda|}iI)^q(A_1+\sqrt{|\lambda|}iI)^q x=(A_1^2-\lambda I)^q x, \quad (3.31)$$

即 $\Phi_{\sqrt{|\lambda|}i}(A_1)\dotplus\Phi_{-\sqrt{|\lambda|}i}(A_1)\subset\Phi_\lambda(A)$.

反之，由于非退化的闭线性子空间$\Phi_{\sqrt{|\lambda|}i}(A_1)\dotplus\Phi_{-\sqrt{|\lambda|}i}(A_1)$(见第二章定理4.6和推论 4.7)是 A_1 的不变子空间，所以，$L=(\Phi_{\sqrt{|\lambda|}i}\cdot(A_1)\dotplus\Phi_{-\sqrt{|\lambda|}i}(A_1))^\perp$ 也是 A_1 的不变子空间. 显然 $\pm\sqrt{|\lambda|}i$ 是 $A_1|_L$ 的正则点，从而对任何自然数 q，以及非零向量 $y\in L\cap\mathscr{D}\cdot(A_1^{2q})$，

$$(A-\lambda I)^k y=(A_1-\sqrt{|\lambda|}iI)^k(A_1+\sqrt{|\lambda|}iI)^k y\neq 0, \quad k=1,2,\cdots,q. \quad (3.32)$$

由此可知，$\Phi_\lambda(A)\subset\Phi_{\sqrt{|\lambda|}i}(A_1)\dotplus\Phi_{-\sqrt{|\lambda|}i}(A_1)$.

显然，(完备)子空间 $\Phi_{\sqrt{|\lambda|}i}(A_1)\dotplus\Phi_{-\sqrt{|\lambda|}i}(A_1)$ 中极大正和极大负子空间维数相等.

(iii) 是 (i) 的直接推论.

(iv) 视 $\Phi_\lambda(A)=\Phi_{\sqrt{|\lambda|}i}(A_1)\dotplus\Phi_{-\sqrt{|\lambda|}i}(A_1)$ 为 Π_K 型空间，显然这个分解是 $(\Phi_\lambda(A),(\cdot,\cdot))$ 的标准分解，令 $A_1|_{\Phi_{\sqrt{|\lambda|}i}(A_1)}$ 为 S_1，那末 $A_1|_{\Phi_{-\sqrt{|\lambda|}i}(A_1)}$ 便是 S_1^*. 利用 S_1 以及 S_1^* 相应的 Jordan 标准形，易知 (iv) 成立.

反之，如果 (i)—(iv) 成立，那末对 A 的每个负特征值 λ，在 $V(x)\dotplus V(y)$ 上 A 的形式如下：

$$A|_{V(x)}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & O\\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1\\ O & & & \lambda\end{pmatrix}, \quad A|_{V(y)}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & O\\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1\\ O & & & \lambda\end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

取 A_1 在 $V(x)$, $V(y)$ 上分别为

$$\begin{aligned} A_1|_{V(x)}&=\frac{\pm 1}{2\pi i}\oint\frac{\mu^{\frac{1}{2}}}{\mu I-A|_{V(x)}}d\mu,\\ A_1|_{V(y)}&=\frac{\mp 1}{2\pi i}\oint\frac{\mu^{\frac{1}{2}}}{\mu I-A|_{V(y)}}d\mu, \end{aligned} \quad (3.34)$$

其中积分的围道是包含 λ 点的圆．在 Φ_0 上取 A_1 为

$$\begin{aligned} A_1: z_0 &\longmapsto i\sqrt{|\lambda|}z_0, \quad z_0 \in Z_0, \\ z_0^* &\longmapsto -i\sqrt{|\lambda|}z_0^*, \quad z_0^* \in Z_0^*. \end{aligned} \tag{3.35}$$

易知这样所作的 A_1，在每个非退化闭线性子空间 $\Phi_\lambda(A)$ 上是自共轭，并且 $A_1^2=A$．再利用 $\Phi_{\lambda_1}(A)\perp\Phi_{\lambda_2}(A)$ 对任何负特征值 λ_1, λ_2 成立以及在 $(\bigoplus\limits_{\lambda<0}\Phi_\lambda(A))^\perp$ 上 A 存在自共轭平方根，易知 A 在 Π_K 上必有自共轭平方根．证毕．

定理 3.7 实质上是给出仅含负谱的自共轭算子的自共轭平方根存在的充要条件．下面讨论 $\sigma(A)\subset[0,\infty)$ 的自共轭算子 A 的平方根．

定理 3.8 设 A 是 Π_K 空间上自共轭算子，$\sigma(A)\subset[0,\infty)$．如果 $0\bar{\in}\sigma_p(A)$，或虽 $0\in\sigma_p(A)$，但相应的特征子空间 $\Phi_{01}(A)$ 是一维非退化的．那末，A 必有自共轭的平方根 A_1．如果要求 $\sigma(A_1)=\{\sqrt{\lambda}\,|\,\lambda\in\sigma(A)\}$，那末在 $0\bar{\in}\sigma_p(A)$，或 $0\in\sigma_p(A)$ 但 $\dim\Phi_{01}(A)=1$ 时，A 的自共轭平方根是唯一的．

证 证明存在性：当 $0\in\sigma_p(A)$ 时，由假设闭线性子空间 $\Phi_{01}(A)$ 是非退化的，从而 $\Pi_K=\Phi_{01}(A)\oplus\Phi_{01}(A)^\perp$．显然，$\mathscr{R}(A)\subset\Phi_{01}(A)^\perp$．如在 $\Phi_{01}(A)$ 上取 $A_1=0$，则只要证明在 Π_K 型空间 $\Phi_{01}(A)^\perp$ 上 A 有自共轭平方根即可．所以下面不妨设 $0\bar{\in}\sigma_p(A)$．

设 A 在标准分解 $\Pi_K=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$ 之下为 $\{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$，由假设

$$\begin{aligned} &0\bar{\in}\sigma(S)\cup\sigma(A_N)\cup\sigma_p(A_P) \quad (\sigma(S)=\sigma(S^*)), \\ &\sigma(S)\cup\sigma(A_N)\cup\sigma(A_P)\subset[0,\infty). \end{aligned} \tag{3.36}$$

下面证明在上述标准分解下必有某个自共轭算子 $A_1=\{S_1, A_{N1}, A_{P1}, F_1, G_1, Q_1\}$，使得 $A_1^2=A$，并且 $\sigma(A_1)=\{\sqrt{\lambda}\,|\,\lambda\in\sigma(A)\}$．

取 $A_{P1}=\sqrt{A_P}$，$A_{N1}=\sqrt{A_N}$．对任何 Jordan 单块

$$T=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & O\\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1\\ O & & & \lambda\end{pmatrix}\quad \lambda\neq 0,$$

易知必有 T_1,使得 $T_1^2=T$,且 T_1 是上三角阵;并且,当 $\lambda>0$ 时,T_1 的主对角线上可以全取成数 $\sqrt{\lambda}$,并且这样的 T_1 是唯一的. 据此,对于 Z 上的算子 S, 必有 Z 上唯一算子 S_1, 使得

$$S_1^2=S,\ \sigma(S_1)=\{\sqrt{\lambda}\,|\,\lambda\in\sigma(S)\}. \tag{3.37}$$

令 $\{z_i'\}$ 是 Z 上一个线性基, 在这个基下, S 成为 Jordan 块形式. 利用标准型来解下列算子方程中 F_1, G_1, Q_1,

$$F_1\sqrt{A_N}+S_1F_1=F,\ \ G_1\sqrt{A_P}+S_1G_1=G, \tag{3.38}$$

$$S_1Q_1+Q_1S_1^*=Q-G_1G_1^*+F_1F_1^*. \tag{3.39}$$

解 F_1: 令 $Fn=\sum\limits_{i=1}^{l}(n,y_i)z_i'$, $F_1n=\sum\limits_{i=1}^{l}(n,x_i)z_i'$ ($n\in N$, $l=\dim Z$), 那末从 (3.38) 的第一方程中解出 F_1, 等价于从下列方程中解出 $(x_1,\cdots,x_l)$,

$$S_1\sum_{i=1}^{l}(n,x_i)z_i'+\sum_{i=1}^{l}(\sqrt{A_N}\,n,x_i)z_i'$$

$$=\sum_{i=1}^{l}(n,y_i)z_i',\ n\in N. \tag{3.40}$$

如果视 $\{x_i\}$ 是形式上的线性无关向量,并视 $\{x_i\}$, $\{z_i'\}$ 为形式对偶族,易知

$$S_1\sum_{i=1}^{l}(n,x_i)z_i'=\sum_{i=1}^{l}(n,x_i)S_1z_i'=\sum_{i=1}^{l}(n,S_1^*x_i)z_i' \tag{3.41}$$

(上式也可用基 $\{z_i'\}$ 之下的 S_1 的矩阵形式 (S_{1il}) 计算得到). 这样, (3.40) 等价于

$$(S_1^*+\sqrt{A_N})x_i=y_i\ \ (i=1,2,\cdots,l). \tag{3.42}$$

注意 S_1 在 $\{z_i'\}$ 下已成为 Jordan 块形式, 为叙述方便,不妨假设 S_1 是单块,从而 S_1^* 在 $\{x_i\}$ 之下的形式是

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & & & & O \\ 1 & \sqrt{\lambda} & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \sqrt{\lambda} & \\ O & & & 1 & \end{pmatrix}.$$

这样，从方程 (3.42) 立即可依次唯一地解出 $x_l, x_{l-1}, \cdots, x_1$:

$$\begin{aligned} x_l &= (\sqrt{A_N} + \sqrt{\lambda}\, I)^{-1} y_l, \\ x_{i-1} &= (\sqrt{A_N} + \sqrt{\lambda}\, I)^{-1}(y_{i-1} - x_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant l). \end{aligned} \tag{3.43}$$

对于 S_1 是多块的情况，完全类似地可以从方程 (3.42) 中得到唯一的解 $(x_1, \cdots, x_l)$.

同样，对给定的 G，从方程 $G_1\sqrt{A_P} + S_1G_1 = G$ 中可唯一地解出 G_1.

由于 $\sigma(S_1^*) = \sigma(S_1)$ 是正数集，所以对给定的 Q, F_1, G_1，从 (3.39) 中可唯一地解出 Q_1. 又因为 Q_1^* 也适合 (3.39)，根据解的唯一性，还有 $Q_1 = Q_1^*$.

为了证明定理中有关唯一性的结论，先证明几个引理.

引理 3.9 在 Π_K 空间上，满足 $A_1^2 = I$, $\sigma(A_1) \subset [0, \infty)$ 的自共轭算子 A_1 是唯一的 $A_1 = I$.

证 设 A_1 满足 $A_1^2 = I$, $\sigma(A_1) \subset [0, \infty)$. 对于 A_1，存在标准分解 $\Pi_K = N \oplus \{Z + Z^*\} \oplus P$，使得 $A_1 = \{S_1, A_{1N}, A_{1P}, F_1, G_1, Q_1\}$，因此

$$\begin{aligned} &\{S_1^2,\ A_{1N}^2,\ A_{1P}^2,\ S_1F_1 + F_1A_{1N},\ S_1G_1 + G_1A_{1P}, \\ &\qquad Q_1S_1^* + S_1Q_1 - F_1F_1^* + G_1G_1^*\} \\ &= I = \{I, I, I, 0, 0, 0\}. \end{aligned}$$

根据 Hilbert 空间上半正自共轭算子的半正平方根的唯一性，则

$$A_{1N} = I, \quad A_{1P} = I.$$

根据有限维空间的 Jordan 标准形理论知道：满足 $S_1^2 = I$，并且 $\sigma(S_1) \subset [0, \infty)$ 的解只可能 $S_1 = I$.

由于 $F = (y_1, \cdots, y_l) = (0, 0, \cdots, 0)$，由 (3.43) 立即得

到 $F_1=(x_1,\cdots,x_n)=(0,0,\cdots,0)$，即 $F_1=0$. 同样可证 $G_1=0$. 再由于 $F_1=G_1=Q=0$，直接计算(4.39)，又得到 $Q_1=0$. 所以 $A_1=I$. 证毕.

引理 3.10 设 A 是 Π_K 上自共轭算子，$1\in\sigma_p(A)$，特征子空间 $\Phi_{11}(A)$ 是退化的，而 $\Phi_{11}(A)=N\oplus Z\oplus P$ 是标准分解. 如果 A_1 是 A 的自共轭平方根，那末

(i) $\Phi_{11}(A)$ 和 Z 都是 A_1 的不变子空间.

(ii) 当满足 $\sigma(A_1|_{\Phi_{11}(A)})\subset[0,\infty)$ 时，$A_1|_{\Phi_{11}(A)}=I$.

证 (i) 由于 $A_1^2=A$，$\Phi_{11}(A)\subset\mathscr{D}(A^k)(=\mathscr{D}(A_1^{2k}))$，$k=1,2,\cdots$，因此，对任何 $x\in\Phi_{11}(A)$，$AA_1x=A_1Ax=A_1x$，即 $A_1\Phi_{11}(A)\subset\Phi_{11}(A)$. 对任何 $x\in\Phi_{11}(A)$，$z\in Z$，由于

$$(x,A_1z)=(A_1x,z)=0,$$

所以 $A_1Z\subset Z$.

(ii) 将 A_1，A_1 限制在闭线性子空间 $\Phi_{11}(A)$ 上考察. 令 $L_1=N\oplus P$，显然 L_1 是 Π_K 的完备子空间，并且 $L_1=N\oplus P$ 是正则分解. 再令 P_Z，P_{L_1} 是 $(\Pi_K,[\cdot,\cdot])$[1] 到闭线性子空间 Z，L_1 的投影，

$$S_2=P_ZA_1|_Z,\quad A_2=P_{L_1}A_1|_{L_1},\quad F_2=P_ZA_1|_{L_1}. \tag{3.44}$$

简记 $A_1|_{\Phi_{11}(A)}=\{S_2,A_2,F_2\}$. 由于 $N\oplus P\subset\mathscr{D}(A_1)$ 和 A_1 是自共轭算子，因而 A_2 是满足 $\mathscr{D}(A_2)=L_1$ 的 $(L_1,(\cdot,\cdot))$ 上自共轭算子. 这样，A_2 便是 Π_K 型空间 $(L_1,(\cdot,\cdot))$ 上有界自共轭算子. 类似地，由于 A_1 是闭算子，$A_1\Phi_{11}(A)\subset\Phi_{11}(A)$，以及 A_2 是有界的，所以 F_2 是 Hilbert 空间 $(L_1,[\cdot,\cdot])$ 到 Hilbert 空间 $(Z,[\cdot,\cdot])$ 的闭线性算子，因而 F_2 也是有界线性算子.

容易根据假设 $\sigma(A_1|_{\Phi_{11}(A)})\subset[0,\infty)$，依次地证明 $\sigma(S_2)$，$\sigma(A_2)$ 都是非负实数集. 显然，

$$\begin{aligned}(A_1|_{\Phi_{11}(A)})^2&\doteq\{S_2^2,A_2^2,S_2F_2+F_2A_2\}\\&=A|_{\Phi_{11}(A)}=I=\{I,I,0\}.\end{aligned} \tag{3.45}$$

---

1) 这里 $[\cdot,\cdot]$ 是由 Π_K 的某个正则分解所导出的内积.

剩下的和引理 3.9 的证明一样，可证 $S_2=I$，$A_2=I$，$S_2F_2+F_2A_2=0$，从而 $A_1|_{\Phi_{11}(A)}=I$. 证毕.

引理 3.11 设 A 是 Π_K 上自共轭算子，$1\in\sigma_p(A)$，$\Phi_1(A)$ 是相应的根子空间. 如果 A_1 是 A 的自共轭平方根，并且 $\sigma(A_1)\subset[0,\infty)$，那末 A_1 在 $\Phi_1(A)$ 上是唯一的.

证 先证 $\sigma(A_1|_{\Phi_{11}(A)})\subset[0,\infty)$. 事实上，根据引理 3.10 的 (i)，$A_1\Phi_{11}(A)\subset\Phi_{11}(A)$. 因为

$$(A_1|_{\Phi_{11}(A)})^2=A|_{\Phi_{11}(A)}=I,$$

所以 $\sigma(A_1|_{\Phi_{11}(A)})=\{1,-1\}$. 显然，只要证明 $-1\in\rho(A_1|_{\Phi_{11}(A)})$ 就可以了.

如果 $-1\in\sigma_p(A_1|_{\Phi_{11}(A)})$，那末必有非零向量 x_0，使得 $(A_1+I)x_0=0$，这与假设 $\sigma(A_1)\subset[0,\infty)$ 相矛盾.

如果 $-1\in\sigma_r(A_1|_{\Phi_{11}(A)})$，那末 $\overline{(A_1+I)\Phi_{11}(A)}\subsetneqq\Phi_{11}(A)$，从而

$$\begin{aligned}(A_1+I)(A_1+I)\Phi_{11}(A)&\subset(A_1+I)\overline{(A_1+I)\Phi_{11}(A)}\\&\subsetneqq(A_1+I)\Phi_{11}(A).\end{aligned}\tag{3.46}$$

但是，在 $\Phi_{11}(A)$ 上，$(A_1+I)(A_1+I)=A_1^2+I+2A_1=2\cdot(A_1+I)$，所以

$$(A_1+I)(A_1+I)\Phi_{11}(A)=(A_1+I)\Phi_{11}(A).$$

这显然与 (3.46) 相矛盾.

如果 $-1\in\sigma_c(A_1|_{\Phi_{11}(A)})$，那末由于 $\Phi_{11}(A)$ 是 $(\Pi_K,[\cdot,\cdot])$ 上的线性算子不变子空间，并且 $\Phi_{11}(A)\subset\mathscr{D}(A_1)$，所以 $-1\in\sigma_c(A_1)$. 这又与假设 $\sigma(A_1)\subset[0,\infty)$ 相矛盾.

这就证明了 $-1\in\rho(A_1|_{\Phi_{11}(A)})$，从而 $\sigma(A_1|_{\Phi_{11}(A)})\subset[0,\infty)$.

显然，根子空间 $\Phi_1(A)$ 是 A_1 的不变子空间. 根据 §2 推论 2.11，$\Phi_1(A)=\Phi_0\dotplus\Phi_1'$，这里 $\Phi_0\subset\Phi_{11}(A)$，$\Phi_1'$ 是有限维线性子空间，并且是由 A 的最高级向量产生推移子空间的线性无关族所张成的. 由于引理 3.10，$A_1|_{\Phi_{11}(A)}=I$. 从而 $A_1|_{\Phi_0}=I$. 因此，只要证 Φ_1' 是 A_1 的不变子空间，并且 A_1 在 Φ_1' 上是唯一的就可以

了.

由于 $\Phi(A)\subset\mathscr{D}(A^k)=\mathscr{D}(A_1^{2k})(k=1,2,\cdots)$, $A_1^2=A$, 所以

$$A_1\Phi_{1q}(A)\subset\Phi_{1q}(A)\ (q=1,2,\cdots,2K+1), \quad (3.47)$$

(参见 § 2 推论 2.10), 即 A_1 不提高根向量的级. 在 Φ_1' 中任取一组线性基 $\{x_i|i=1,2,\cdots,m\}$, 令

$$A_1x_i=x_i'+x_i^0,\ x_i'\in\Phi_1',\ x_i^0\in\Phi_0,\ i=1,2,\cdots,m,$$

注意到 $A_1|_{\Phi_0}=I$, 易知 $L_1=\Phi_0'\dotplus\Phi_1'$ 是关于 A_1 不变的有限维线性子空间, 其中

$$\Phi_0'=\operatorname{span}\{x_i^0|i=1,2,\cdots,m\}. \quad (3.48)$$

现在将 A, A_1 都限制在 L_1 上来证明 $A_1\Phi_1'\subset\Phi_1'$, 并且 A_1 在 Φ_1' 上是唯一的:

令 L_1 上算子

$$B_1=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\mu^{\frac{1}{2}}}{\mu I-A|_{L_1}}d\mu, \quad (3.49)$$

这里围道取在平面上点 (1, 0) 近旁, 但点 (0, 0) 在围道之外. 显然, $B_1^2=A|_{L_1}$. 因为 $\sigma(A|_{L_1})=\{1\}$, 所以 $\sigma(B_1)\subset\{1,-1\}$. 但由于 $(1+\lambda^{\frac{1}{2}})^{-1}$ 在点 (1, 0) 近旁解析, 所以 $(B_1+I)^{-1}$ 存在, 由此易知 $\sigma(B_1)=\{1\}$. 因为 A_1 与 A 可交换, 所以 A_1 在 L_1 上与 B_1 可交换.

现在证明 A_1+B_1 是单射. 如果不对, 必有非零向量 $x\in L_1$, 使得 $(A_1+B_1)x=0$. 用 Ψ_0 表示 (A_1+B_1) 在 L_1 上相应于 $\lambda=0$ 的特征子空间. 因为 A_1, B_1 可交换, 所以 $A_1\Psi_0\subset\Psi_0$, $B_1\Psi_0\subset\Psi_0$. 因为 $\dim\Psi_0<\infty$, 所以 Ψ_0 中有 B_1 的特征向量 x_0, $B_1x_0=x_0$, 从而 $A_1x_0=-x_0$. 这与假设 $\sigma(A_1)\subset[0,\infty)$ 矛盾. 这样就得到 A_1+B_1 是单射.

再从

$$0=(A_1^2-B_1^2)=(A_1+B_1)(A_1-B_1), \quad (3.50)$$

立即得到 $A_1=B_1$ 在 L_1 上成立.

对于每个最高级根向量 $x\in\Phi_1'$, 显然推移子空间 $V(x)$ 不仅

是 $A|_{L_1}$ 的不变子空间，即对任何 $\mu\in\mathbf{C}$，$(A|_{L_1}-\mu I)V(x)\subset V(x)$，而且当 $\mu\in\rho(A|_{L_1})$ 时，也有 $(A|_{L_1}-\mu I)^{-1}\subset V(x)$. 从(3.49)可知，$B_1\Phi_1'\subset\Phi_1'$，即 $A_1\Phi_1'\subset\Phi_1'$，证毕.

显然，如果在 Φ_1' 上选取一组线性基，使得 $A|_{L_1}$ 在这组基之下，具有 Jordan 块形式. 这时 B_1 的形式(即 A_1 在 L_1 上的形式)可以明确地写出.

用引理 3.9—引理 3.11 来证明定理 3.8 中的唯一性.

定理 3.8 中唯一性证明　当 $0\in\sigma_p(A)$ 时，由于相应于 0 的特征子空间 $\Phi_{01}(A)$ 对一切 A 的自共轭平方根都不变，而 $\dim\Phi_{01}\cdot(A)=1$，所以任何 A 的自共轭平方根 A_1 在 $\Phi_{01}(A)$ 上是零算子. 这就是说，A_1 在 $\Phi_{01}(A)$ 上是唯一的.

按定理的假设 Φ_{01} 是非退化的，因而 $\Pi_K=\Phi_{01}(A)\oplus\Phi_{01}\cdot(A)^{\perp}$. 易知 $\Phi_{01}(A)^{\perp}$ 也是 A 的自共轭平方根 A_1 的不变子空间，因而只要在 Π_K 型空间 $\Phi_{01}(A)^{\perp}$ 上证明 A 的满足 $\sigma(A_1)\subset[0,\infty)$ 的自共轭平方根 A_1 的唯一性就可以了. 换言之，我们可不妨在假设 $0\bar{\in}\sigma_p(A)$ 的情况下证明唯一性.

对于 $\lambda\in\sigma_p(A)$，$\lambda>0$，如果 A_1 是 A 的自共轭平方根，并且 $\sigma(A_1)\subset[0,\infty)$，那末根据引理 3.11，$A_1$ 在 $\Phi_\lambda(A)$ 上是唯一的，从而 A_1 在 A 的一切根子空间 $\Phi_\lambda(A)$ $(\lambda\in\sigma_p(A),\lambda>0)$ 上是唯一的. 这样，对 A 的任何 K 维半负不变子空间 $N\oplus Z$，A_1 在 $N\oplus Z$ 上是唯一的. 利用这一事实来证 A_1 在 Π_K 上唯一.

设 $\Pi_K=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$ 是标准分解，在这个分解下，$A=\{S,A_N,A_P,F,G,Q\}$. 在证明自共轭平方根存在性时，已经知道有 $A_1=\{S_1,A_{1N},A_{1P},F_1,G_1,Q_1\}$，$A_1^2=A$，并且 $\sigma(A_1)\subset[0,\infty)$. 如果又有 A 的自共轭平方根 A_2，$A_2^2=A$，$\sigma\cdot(A_2)\subset[0,\infty)$，则根据上面所证，$(A_1-A_2)|_{N\oplus Z}=0$，从而 $N\oplus Z$ 也是 A_2 的 K 维半负不变子空间. 由于 $\mathscr{D}(A)=\mathscr{D}(A_2^2)\subset\mathscr{D}(A_2)$，所以 $Z^*\subset\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{D}(A_2)$. 由 §2 定理 2.15 的(ii)，在上述标准分解下，$A_2=\{S_2,A_{2N},A_{2P},F_2,G_2,Q_2\}$. 根据 $(A_1-A_2)|_{N\oplus Z}=0$，所以 $S_1=S_2$，$A_{1N}=A_{2N}$. 又因为 $A_2^2=A$，σ

$(A_2)\subset[0,\infty)$，易知

$$A_{2P}=\sqrt{A_P}=A_{1P}.$$

正如证明存在性时已指出的；当 S_i, A_{iN}, A_{iP} $(i=1,2)$ 确定以后，F_i, G_i, Q_i 将随之唯一确定，从而 $F_1=F_2$, $G_1=G_2$, $Q_1=Q_2$，即 $A_1=A_2$. 证毕.

显然，当 $0\in\sigma_p(A)$ 时，定理 3.8 中 $\dim\Phi_{01}(A)=1$ 这个条件是不可去掉的，否则是不能保证唯一性的.

例 3.3 设 $\Pi_2=\{Z+Z^*\}$, $\dim Z=2$. A 在 Π_2 上是零算子，显然 $A_1=0$ 是 Π_2 的自共轭平方根. 但 A 还有一个自共轭平方根 $A_2=\{S,Q\}$，其中 S 在 Z 的某个基 z_1, z_2 之下表示为

$$S=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

而 $Q=0$.

更一般的结果如下.

定理 3.12 设 A 是 Π_K 上自共轭算子，记 $\sigma_0(A)=\sigma(A)\cap(-\infty,\infty)$. 如果 $\sigma_0(A)\subset[0,\infty)$，并且 $0\bar{\in}\sigma_p(A)$，或 $0\in\sigma_p(A)$，但特征子空间 $\Phi_{01}(A)$ 是非退化的，那末 A 一定有自共轭的平方根 A_1，并且 $(\sigma(A_1)\cap(-\infty,\infty))\subset[0,\infty)$.

进一步假设，若 $0\bar{\in}\sigma_p(A)$，或 $0\in\sigma_p(A)$，但 $\dim\Phi_{01}=1$，那末谱满足下列条件的自共轭平方根 A_1 是唯一的.

(i) $\sigma(A_1)\cap(-\infty,\infty)$ 是非负实数集；

(ii) 任何非实数 $\lambda\in\sigma(A_1)$，必然 $0<|\arg\lambda|<\frac{\pi}{2}$.

证 设 $\lambda_0=\rho e^{i\theta}$ 是 A 在开上半平面的特征值，因而根子空间 $\Phi_{\lambda_0}(A)$ 是零性子空间. 如果有自共轭算子 A_1：$A_1^2=A$，那末 $A_1\Phi_{\lambda_0}(A)\subset\Phi_{\lambda_0}(A)$. 作 Π_K 空间上算子

$$A_{\pm}^{\frac{1}{2}}=\pm\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\mu^{\frac{1}{2}}}{\mu I-A}d\mu, \tag{3.51}$$

围道取在 λ_0 近旁，并且内部仅含谱 $\sigma(A)$ 中点 λ_0. 显然 $(A_{\pm}^{\frac{1}{2}})^2=A$ 在 $\Phi_{\lambda_0}(A)$ 上成立，并且 $\sigma(A_{\pm}^{\frac{1}{2}})=\{\pm\sqrt{\rho}\,e^{\frac{i\theta}{2}}\}$.

同样，对 $\bar{\lambda}_0$，算子，

$$A_{\pm}^{\bar{\lambda}_0} = \pm \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\bar{\mu}^{\frac{1}{2}}}{\bar{\mu} I - A} d\bar{\mu}, \tag{3.52}$$

在 $\Phi_{\bar{\lambda}_0}(A)$ 上满足 $(A_{\pm}^{\bar{\lambda}_0})^2 = A$，上面的围道取在 $\bar{\lambda}_0$ 近旁，并且内部仅含 $\sigma(A)$ 中的点 $\bar{\lambda}_0$. 显然 $A_{\pm}^{\lambda_0} A_{\pm}^{\bar{\lambda}_0} = 0$，并且

$$\begin{aligned}(A_{\pm}^{\lambda_0})^{+} &= \pm \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\bar{\mu}^{\frac{1}{2}}}{\bar{\mu} I - A^{+}} d\bar{\mu} \\ &= \pm \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\bar{\mu}^{\frac{1}{2}}}{\bar{\mu} I - A} d\bar{\mu} = A_{\pm}^{\bar{\lambda}_0}.\end{aligned} \tag{3.53}$$

在 $\Phi_{\lambda_0}(A) \dotplus \Phi_{\bar{\lambda}_0}(A)$ 上令 $A_1 = A_{+}^{\lambda_0} + A_{+}^{\bar{\lambda}_0}$，利用上述事实，以及 $\Phi_{\lambda_0}(A), \Phi_{\bar{\lambda}_0}(A)$ 都是零性子空间，立即得到：对任何 $z^{(i)} = z_1^{(i)} + z_2^{(i)}$，$z_1^{(i)} \in \Phi_{\lambda_0}(A)$，$z_2^{(i)} \in \Phi_{\bar{\lambda}_0}(A)$，$i = 1, 2$，

$$\begin{aligned}&(A_1(z_1^{(1)} + z_2^{(1)}), z_1^{(2)} + z_2^{(2)}) \\ &= (A_1 z_1^{(1)}, z_2^{(2)}) + (A_1 z_2^{(1)}, z_1^{(2)}) \\ &= (A_{+}^{\lambda_0} z_1^{(1)}, z_2^{(2)}) + (A_{+}^{\bar{\lambda}_0} z_2^{(1)}, z_1^{(2)}) \\ &= (z_1^{(1)}, A_{+}^{\bar{\lambda}_0} z_2^{(2)}) + (z_2^{(1)}, A_{+}^{\lambda_0} z_1^{(2)}) \\ &= (z_1^{(1)} + z_2^{(1)}, A_1(z_1^{(2)} + z_2^{(2)})),\end{aligned}$$

即 A_1 是 $(\Phi_{\lambda_0}(A) \dotplus \Phi_{\bar{\lambda}_0}(A), (\cdot, \cdot))$ 上自共轭算子. 显然还有 $A_1^2 = A$；A_1 在 $\Phi_{\lambda_0}(A) \dotplus \Phi_{\bar{\lambda}_0}(A)$ 上的谱 $\lambda = \rho e^{i\theta}$ 满足 $0 < |\theta| < \frac{\pi}{2}$.

令 $\Phi = \operatorname{span}\{\Phi_{\lambda_0}(A) \mid \lambda_0 \in \sigma_p(A), I_m \lambda_0 \neq 0\}$. 显然，$\Pi_K = \Phi \oplus \Phi^{\perp}$，$A\Phi \subset \Phi$，$A\Phi^{\perp} \subset \Phi^{\perp}$，并且对一切 A 的自共轭平方根 A_1，$A_1\Phi \subset \Phi$，$A_1\Phi^{\perp} \subset \Phi^{\perp}$. 在 $\Phi^{\perp}$ 上应用定理 3.8，就知道 A 在 Π_K 上存在满足定理 3.12 要求的自共轭平方根 A_1，并且满足定理中 (i)，(ii) 条件的自共轭平方根是唯一的. 证毕.

对于 n 次根，也有类似结果. 这里只列出如下定理.

定理 3.13 设 A 是 Π_K 上自共轭算子，$\sigma(A) \subset [0, \infty)$. 如果 $0 \bar{\in} \sigma_p(A)$，或 $0 \in \sigma_p(A)$，但 $\Phi_{01}(A)$ 是非退化的，那末对任何自然数 n，必存在自共轭算子 A_1，使得 $A_1^n = A$，并且 $\sigma(A_1) \subset$

$[0, \infty)$. 如果 $0 \bar{\in} \sigma_p(A)$ 或当 $0 \in \sigma_p(A)$ 时，有 $\dim \Phi_{01}(A) = 1$，那末 A 的具有非负实谱的自共轭的 n 次根是唯一的.

本定理可仿定理 3.8 的证明，只不过要将算子方程 (3.77)—(3.39) 等换成更复杂一点的方程.

$$S_1^n = S, \quad A_{1N}^n = A_N, \quad A_{1P}^n = A_P, \tag{3.54}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} S_1^i F_1 A_{1N}^{n-1-i} = F, \quad \sum_{i=0}^{n-1} S_1^i G_1 A_{1P}^{n-1-i} = G, \tag{3.55}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} S_1^i Q_1 S_1^{*n-1-i} = Q - \sum_{i+j+k=n-1} S_1^i (F_1 A_{1N}^j F_1^* + G_1 A_{1P}^j G^*) S_1^{*k}. \tag{3.56}$$

关于上面方程的具体求解过程以及唯一性的证明从略.

3. 酉算子的平方根 对酉算子可类似地讨论平方根问题.

定理 3.14 设 U 是 Π_K 上酉算子，那末必存在 Π_K 上酉算子 U_1，使得 $U_1^2 = U$. 如果再要求

(i) $\sigma(U_1)$ 在单位圆周上的部分仅包含在上半圆周，并且 $-1 \bar{\in} \sigma_p(U_1)$，

(ii) U_1 在单位圆外的特征值 $\lambda = \rho e^{i\theta}$ 满足 $-\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$，

那末 U_1 便是唯一的.

证 证明的基本步骤与定理 3.8 相同. 下面只作简略地说明.

设在标准分解 $\Pi_K = N \oplus \{Z + Z^*\} \oplus P$ 之下，$U = \{S, U_N, U_P, C, D, T\}$，为了便于和自共轭算子情况对照，将"参数"算子 C, D 分别换成"参数"算子 $F(= SC^*U_N)$, $G(= -SD^*U_P)$，在同一标准分解下，$U = \{S, U_N, U_P, F, G, T\}$，$U_1 = \{S_1, U_{1N}, U_{1P}, F_1, G_1, T_1\}$，则 $U_1^2 = U$ 等价于

$$S_1^2 = S, \quad U_{1N}^2 = U_N, \quad U_{1P}^2 = U_P, \tag{3.57}$$

$$F_1 U_{1N} + S_1 F_1 = F, \quad G_1 U_{1P} + S_1 G_1 = G, \tag{3.58}$$

$$S_1^{-1} T_1 S^{-1*} + T_1 = T + \frac{1}{2} (S_1^{-2} G U_P G^* S_1^{-1*} - S_1^{-1} G U_P^{-1} G^* S^{-2*}$$

$$+ S_1^{-1}FU_N^{-1}F^*S_1^{-2*} - S_1^{-2}FU_NF^*S_1^{-1*}). \quad (3.59)$$

类似定理 3.12，对不在单位圆周上的某个特征值 λ_0 和 $\frac{1}{\bar{\lambda}_0}$，先处理好 $\Phi_{\lambda_0}(U)\dotplus\Phi_{\frac{1}{\bar{\lambda}_0}}(U)$ 上 U 的平方根． 当然，代替 (3.51)，(3.52) 要考虑的是下列积分

$$\begin{aligned} U_{\pm}^{\lambda_0} &= \pm\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\mu^{\frac{1}{2}}}{\mu I - U}\,d\mu, \\ U_{\pm}^{\frac{1}{\lambda_0}} &= \pm\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\tau^{\frac{1}{2}}}{\tau I - U}\,d\tau. \end{aligned} \quad (3.60)$$

类似地有

$$(U_{\pm}^{\lambda_0})^{\dagger} = \left(U_{\pm\frac{1}{\bar{\lambda}_0}}\right)^{-1}, \quad (3.61)$$

在 $\Phi_{\lambda_0}(U)\dotplus\Phi_{\frac{1}{\bar{\lambda}_0}}(U)$ 上有 $U_1 = U_+^{\lambda_0} + U_+^{\frac{1}{\lambda_0}}$. 用这个办法处理 U 的谱不在单圆周上的部分．对谱仅包含在单位圆周上的酉算子可仿照定理 3.8，依次地讨论 (3.57)，(3.58)，(3.59)．

类似地可以讨论酉算子的 n 次根．这里略．

算子的开方、乘方等与算子演算问题有密切联系． 关于演算问题将在建立谱系理论以后再作讨论．

§4 谱　　系

在本节中，将和 Hilbert 空间类似地给出 Π_K 空间上自共轭和酉算子的谱系概念，并为下一节的 Π_K 空间上自共轭和酉算子的算子演算作准备．

1. 投影算子的形式　先利用 §2,3 的自共轭算子模型以及乘方、开方等给出投影算子的一般形式．

引理 4.1　设 Π_K 上有界自共轭算子 E 在标准分解 $\Pi_K = N\oplus\{Z\dotplus Z^*\}\oplus P$ 之下为 $E = \{S, E_N, E_P, F, G, Q\}$，那末 E 为 Π_K 上投影算子的充要条件是有分解 $Z = Z_0\dotplus Z_1$，$Z^* = Z_0^*\dotplus Z_1^*$，而 $\{Z_0, Z_0^*\}$，$\{Z_1, Z_1^*\}$ 都是 $H.D.$ 对，并且 S: $Z\to Z$;

$S^*: Z^* \to Z^*$ 具有下列形式:

$$S=\begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{matrix} Z_1 \\ Z_0 \end{matrix}, \quad S^*=\begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{matrix} Z_1^* \\ Z_0^* \end{matrix}, \tag{4.1}$$

而 E_N, E_P 分别是 $(N, -(\cdot,\cdot))$, $(P,(\cdot,\cdot))$ 上投影算子,

$$F=\begin{pmatrix} F_0 & O \\ O & F_1 \end{pmatrix}, \quad G=\begin{pmatrix} G_0 & O \\ O & G_1 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

$$F_0: \mathscr{N}(E_N) \to Z_1, \quad F_1: \mathscr{N}(E_N)^{\perp} \to Z_0, \tag{4.3}$$

$$G_0: \mathscr{N}(E_P) \to Z_1, \quad G: \mathscr{N}(E_P)^{\perp} \to Z_0. \tag{4.4}$$

当 $Q: Z^* \to Z$ 为在分解 $Z^* = Z_1 \dotplus Z_0$, $Z = Z_1 \dotplus Z_0$ 下表示成 $Q=\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{10} \\ Q_{01} & Q_{00} \end{pmatrix}$, 并视 Z, Z^* 为同一时,

$$Q_{11} = Q_{11}^*, \quad Q_{10} = Q_{01}^*, \quad Q_{00} = Q_{00}^*, \tag{4.5}$$

$$Q_{11} = F_0F_0^* - G_0G_0^*, \quad Q_{00} = G_1G_1^* - F_1F_1^*. \tag{4.6}$$

证 必要性 因为 E 是投影算子, 所以 $E^2 = E$. 根据定理 3.3, 必有

$$S^2 = S, \quad E_N^2 = E_N, \quad E_P^2 = E_P, \tag{4.7}$$

$$SF + FE_N = F, \quad SG + GE_P = G, \tag{4.8}$$

$$QS^* + SQ + GG^* - FF^* = Q. \tag{4.9}$$

由 (4.7) 可知, E_N, E_P 分别是 $(N, -(\cdot,\cdot))$, $(P,(\cdot,\cdot))$ 的投影算子, S 是 Z 上幂等算子.

对于空间 Z 上幂等算子 S, 显然有分解 $Z = Z_1 \dotplus Z_0$, 其中 $Z_1 = \Phi_{11}(S)$, $Z_0 = \Phi_{01}(S)$. 在 Z_1, Z_0 中分别取线性基 $z_1, \cdots, z_{l_1}$, $z_{l_1+1}, \cdots, z_l$, 并在 Z^* 中取对偶基 $z_1^*, \cdots, z_{l_1}^*$, $z_{l_1+1}^*, \cdots, z_l^*$, 由此可知 $\{Z_1, Z_1^*\}$, $\{Z_0, Z_0^*\}$ ($Z_1^* = \mathrm{span}\{z_1^*, \cdots, z_{l_1}^*\}$, $Z_0^* = \mathrm{span}\{z_{l_1+1}^*, \cdots, z_l^*\}$) 都成为 $H.D.$ 对, 并且 S, S^* 具有 (4.1) 形式.

对任何 $n \in \mathscr{N}(E_N)$, $n' \in \mathscr{N}(E_N)^{\perp}$, 由 (4.8) 得到

$$SFn = Fn, \quad SFn' = 0. \tag{4.10}$$

从 (4.10) 可知, 在分解 $N = \mathscr{N}(E_N) \oplus \mathscr{N}(E_N)^{\perp}$ 以及 $Z = Z_1 \dotplus Z_0$ 之下, F 具有 (4.2) 的形式. 同样, 由 (4.8) 还可得到 (4.2)中 G

的形式。

当 Z, Z^* 视为同一(即 Z_1, Z_1^*; Z_0, Z_0^* 分别视为同一时),由于 $Q=Q^*$,因而(4.5)成立。再由(4.9),得到

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{10} \\ Q_{10}^* & Q_{00} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2Q_{11} & Q_{10} \\ Q_{10}^* & O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_0G_0^* & O \\ O & G_1G_1^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F_0F_0^* & O \\ O & F_1F_1^* \end{pmatrix},$$

即(4.6)成立。

充分性 显然,根据引理的假设,立即知道(4.7)—(4.9)成立,即自共轭算子是幂等的。从而 E 是投影算子。证毕。

推论 4.2 设在标准分解 $\Pi_K = N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$ 下,投影算子 $E=\{S, E_N, E_P, F, G, Q\}$,那末在引理 4.1 的(4.1)—(4.6)表示下,有

$$\begin{aligned} E\Pi_K = &\operatorname{span}\{n+Fn \mid n\in \mathcal{N}(E_N)^\perp\}\oplus\{Z_1+\hat{Z}_1^*\} \\ &\oplus \operatorname{span}\{p+Gp \mid p\in\mathcal{N}(E_P)^\perp\}, \\ \hat{Z}_1^* = &\{z_1^* - (F_0^*z_1^* - FF_0^*z_1^*) + (G_0^*z_1^* \\ &- GG_0^*z_1^*) + Q_{11}^*z_1^* \mid z_1^*\in Z_1^*\}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} (I-E)\Pi_K = &\operatorname{span}\{n-Fn \mid n\in\mathcal{N}(E_N)\} \\ &\oplus\{Z_0+\hat{Z}_0^*\}\oplus\operatorname{span}\{p-Gp \mid p\in\mathcal{N}(E_P)\} \\ \hat{Z}_0^* = &\{z_0^* + (F_1^*z_0^* + FF_1^*z_0^*) \\ &- (G_1^*z_0^* + GG_1^*z_0^*) - Q_{10}z_0^* \mid z_0^*\in Z_0^*\}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

证 显然 $E\Pi_K=\Phi_{11}(E)$, $(I-E)\Pi_K=\Phi_{01}(E)$。下面证(4.11):

首先,易知 $Z_1\subset\Phi_{11}(E)$。而对任何 $n\in E_NN$,根据(4.3),(4.10),

$$E(n+Fn)=E_Nn+Fn+SFn=n+Fn,$$

即 $n+Fn\in\Phi_{11}(E)$。同样,可以证明对任何 $p\in E_PP$, $p+Gp\in\Phi_{11}(E)$。

对任何 $z^*\in Z^*$,必有唯一分解 $z^*=z_0^*+z_1^*$, $z_0^*\in Z_0^*$, $z_1^*\in Z_1^*$。根据(4.1)—(4.6),

$$\begin{aligned} Ez^* &= S^*z^* - F^*z^* + G^*z^* + Q^*z^* \\ &= z_1^* - (F_1^*z_0^* + FF_1^*z_0^*) + (G_1^*z_0^* + GG_1^*z_0^*) \end{aligned}$$

$$+ Q_{10}z_0^* - (F_0^* z_1^* - FF_0^* z_1^*)$$
$$+ (G_0^* z_1^* - GG_0^* z_1^*) + Q_{10}^* z_1^*. \tag{4.13}$$

由于已知 Ez^*, $F_1^* z_0^* + FF_1^* z_0^*$, $G_1^* z_0^* + GG_1^* z_0^*$, $Q_{10}z_0^* \in \Phi_{11}(E)$, 并且 $Z_0 \perp Z_1^*$, $Z_1 \perp Z_0^*$[1), 所以从上式立即得到

$$\operatorname{span}\{n + Fn \mid n \in \mathscr{N}(E_N)^\perp\} \oplus \{Z_1 + \hat{Z}_1^*\}$$
$$\oplus \operatorname{span}\{p + Gp \mid p \in \mathscr{N}(E_P)^\perp\} \subset E\Pi_K$$

反之，也易于直接证明，对任何 $z^* + z + n + p \in \Pi_K$,

$$E(z^* + z + n + p) \in \operatorname{span}\{n + Fn \mid n \in \mathscr{N}(E_N)^\perp\}$$
$$\oplus \{Z_1 + \hat{Z}_1^*\} \oplus \operatorname{span}\{p + Gp \mid p \in \mathscr{N}(E_P)^\perp\}.$$

这样就证明了 (4.11) 成立.

类似地可以证明 (4.12) 成立. 证毕.

推论 4.3 设在标准分解 $\Pi_K = N \oplus \{Z + Z^*\} \oplus P$ 下，投影算子 $E = \{S, E_N, E_P, F, G, Q\}$, 令

$$\begin{cases} N' = \operatorname{span}\{n + Fn \mid n \in \mathscr{N}(E_N)^\perp\} \\ \qquad \oplus \operatorname{span}\{n - Fn \mid n \in \mathscr{N}(E_N)\} \\ P' = \operatorname{span}\{p + Gp \mid p \in \mathscr{N}(E_P)^\perp\} \\ \qquad \oplus \operatorname{span}\{p - Gp \mid p \in \mathscr{N}(E_P)\}, \end{cases} \tag{4.14}$$

那末，必存在 $Z^{*\prime}$, 使得 $\Pi_K = N' \oplus \{Z + Z^{*\prime}\} \oplus P'$ 是标准分解，并且在这个标准分解下，$E = \{S, E_{N'}, E_{P'}, 0, 0, 0\}$, 其中 $E_{N'}$, $E_{P'}$ 分别是 $(N', -(\cdot, \cdot))$, $(P', (\cdot, \cdot))$ 上投影算子.

证 显然 $\operatorname{span}\{n + Fn \mid n \in \mathscr{N}(E_N)^\perp\}$, $\operatorname{span}\{n - Fn \mid n \in \mathscr{N}(E_N)\}$ 按 $(\cdot, \cdot)$ 是直交的，并且没有公共的非零向量，所以 (4.14) 中第一式的"$\oplus$"是确当的. 同样第二式中的"$\oplus$"也是确当的.

从 F, G 的连续性易知，N', P' 是两个闭线性子空间，又显然它们是非退化的，因而存在 $Z^{*\prime\prime}$, 使得

$$\Pi_K = N' \oplus \{Z + Z^{*\prime\prime}\} \oplus P' \tag{4.15}$$

是标准分解，并且 Z, N', P' 都是 E 的不变子空间. 假设在标准分

---

1) $Z_0 \perp Z_1^*$, $Z_1 \perp Z_0^*$ 保证了 $\operatorname{span}\{n + Fn \mid n \in \mathscr{N}(E_N)^\perp\} + \{Z + \hat{Z}^*\} + \operatorname{span}\{p + Gp \mid p \in \mathscr{N}(E_P)^\perp\}$ 是直交直接和.

解(4.15)下，$E=\{S', E_{N'}, E_{P'}, F', G', Q'\}$，根据 $EZ\subset Z$，$EN'\subset N'$，$EP'\subset P'$，显然

$$S'=E|_Z=S,\quad F'=0,\quad G'=0,$$

并且 $E_{N'}$，$E_{P'}$ 分别是 $(N,'-(\cdot,\cdot)),(P',(\cdot,\cdot))$ 上投影算子。

对在标准分解(4.15)之下的 $E=\{S, E_{N'}, F_{P'}, 0, 0, Q'\}$ 应用引理 4.1，存在空间的分解

$$Z=Z_0\dot{+}Z_1,\quad Z^{*''}=Z_0^{*''}\dot{+}Z_1^{*''},$$

并且在这个分解下，

$$Q'=\begin{pmatrix}Q_{11} & Q_{10}\\ Q_{01} & Q_{00}\end{pmatrix},\ Q_{11}=0,\ Q_{00}=0,\ Q_{01}^*=Q_{10}. \quad (4.16)$$

利用(4.16)，容易证明，对任何 $z^*\in Z_1^{*''}$，$z^*+Qz^*\in\Phi_{11}(E)$，而对任何 $z^*\in Z_0^{*''}$，$z^*-Qz^*\in\Phi_{01}(E)$，并且如果用

$$Z_1^{*'}=\mathrm{span}\{z^*+Qz^*\,|\,z^*\in Z_1^{*''}\},$$

$$Z_0^{*'}=\mathrm{span}\{z^*-Qz^*\,|\,z^*\in Z_0^{*''}\}$$

分别代替 $Z_1^{*''}$，$Z_0^{*''}$，那末 $\Pi_K=N'\oplus\{Z+Z^{*'}\}\oplus P'$ ($Z^{*'}=Z_0^{*''}\dot{+}Z_1^{*''}$) 仍是标准分解，而且在这个标准分解下，$E=\{S, E_{N'}, E_{P'}, 0, 0, 0\}$. 证毕.

注意 在推论 4.3 的标准分解 $\Pi_K=N'\oplus\{Z+Z^{*'}\}\oplus P$ ($Z=Z_0\dot{+}Z_1$, $Z^{*'}=Z_0^{*'}\dot{+}Z_1^{*'}$) 之下，投影算子 $E=\{S, E_{N'}, E_{P'}, 0, 0, 0\}$ 的 $E\Pi_K$，$(I-E)\Pi_K$ 分别是下列完备子空间

$$E\Pi_K=\mathcal{N}(E_{N'})^{\perp}\oplus\{Z_1+Z_1^{*'}\}\oplus\mathcal{N}(E_{P'})^{\perp}, \quad (4.17)$$

$$(I-E)\Pi_K=\mathcal{N}(E_{N'})\oplus\{Z_0+Z_0^{*'}\}\oplus\mathcal{N}(E_{P'}). \quad (4.18)$$

2. 投影算子序列的弱收敛

定义 4.1 设 $\{A_n\}$ 是完备不定度规空间 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上一列有界线性算子，如果存在线性算子 A，使得任何 $x, y\in\Pi$，

$$\lim_{n\to\infty}(A_nx, y)=(Ax, y),$$

则称 $\{A_n\}$ 弱收敛于 A. 记为 $A=(\text{弱})\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

显然，$\{A_n\}$ 在 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上弱收敛于 A 等价于：对任何正则分解 $\Pi=H_-\oplus H_+$ (由它导出的内积为$[\cdot,\cdot]$)，$\{A_n\}$ 在

Hilbert 空间 ($\Pi_1[\cdot, \cdot]$) 弱收敛于 A.

定理 4.4 设 $\{E_n\}$ 是 Π_K 上一列投影算子，并且 $E_1 \gtrsim E_2 \gtrsim \cdots \gtrsim E_n \gtrsim \cdots$，如果 $\{E_n\}$ 弱收敛于 E，那末 E 必是 Π_K 上投影算子，并且(强) $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = E$.

证 证明分三步.

(I) 证 E 是投影算子：由于 $\{E_n\}$ 是一列有界线性算子，所以 $E =$ (弱)$\lim\limits_{n\to\infty} E_n$ 也是有界线性算子. 显然，对任何 $x, y \in \Pi_K$

$$(Ex, y) = \lim_{n\to\infty}(E_n x, y) = \lim_{n\to\infty}(x, E_n y) = (x, Ey),$$

即 $E^\dagger = E$. 显然，要证明 E 是投影算子，只要证明 $E^2 = E$ 就可以了. 事实上，先取定 $x, y \in \Pi_K$，由于 $\{E_n\}$ 弱收敛于 E，所以对任何 $\varepsilon > 0$，必有 N_0，使得

$$|(Ex, Ey) - (E_{N_0}x, Ey)| < \frac{\varepsilon}{4}; \tag{4.19}$$

固定 N_0 后，又必存在 n_0 (不妨设 $n_0 \geqslant N_0$)，使得

$$|(E_{N_0}x, E_n y) - (E_{N_0}x, Ey)| < \frac{\varepsilon}{4},\ n \geqslant n_0, \tag{4.20}$$

$$|(E_n x, y) - (Ex, y)| < \frac{\varepsilon}{4},\ n \geqslant n_0. \tag{4.21}$$

从 (4.19)—(4.21)，并注意到当 $n \geqslant n_0 \geqslant N_0$ 时，$E_n E_{N_0} = E_n$，立即得到

$$|(E^2x, y) - (Ex, y)| = |(Ex, Ey) - (Ex, y)| < \frac{3}{4}\varepsilon.$$

由于 ε 是任意的，由上式得到 $(E^2x, y) = (Ex, y)$ 对任何 $x, y \in \Pi_K$ 成立，即 $E^2 = E$.

(II) 证明 $E\Pi_K = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n\Pi_K$. 令 $L = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n\Pi_K$，则 L 显然是闭线性子空间. 对任何 $x \in L$，由于 $E_n x = x$，$n = 1, 2, \cdots$，所以

$$Ex = (\text{弱})\lim_{n\to\infty} E_n x = x,$$

即 $E\Pi_K \supset L$. 下面再证明 $L \supset E\Pi_K$.

事实上，由于 $\{E_n\}$ 是一列彼此可交换的，因而弱极限 E 与 $\{E_n\}$ 中每个算子都可交换。从而对任何 $x, y \in \Pi_K$, 以及自然数 n,

$$(E_n E x, y) = (Ex, E_n y) = \lim_{m\to\infty}(E_m x, E_n y)$$
$$= \lim_{\substack{m\to\infty \\ m>n}}(E_m x, y) = (Ex, y),$$

即 $E_n E = E(n = 1, 2, \cdots)$, 从而 $E\Pi_K \subset E_n \Pi_K (n = 1, 2, \cdots)$, 即 $E\Pi_K \subset L$.

由等式 $E\Pi_K = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \Pi_K$, 还可以得到

$$(E\Pi_K)^{\perp\perp} = E\Pi_K = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \Pi_K$$
$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} (E_n \Pi_K)^{\perp\perp} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \Pi_K)^{\perp}}^{\perp};$$

由第一章推论 3.6，即得

$$(E\Pi_K)^{\perp} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \Pi_K)^{\perp}}. \tag{4.22}$$

(III) 证明(强) $\lim_{n\to\infty} E_n = E$: 由于 $\{E_n\}$ 是可交换的一列算子，所以 $E = (\text{弱})\lim_{n\to\infty} E_n$ 也与每个 E_n 可交换，因而存在公共的标准分解 $\Pi_K = N \oplus \{Z + Z^*\} \oplus P$, 在这个分解之下，

$$\begin{aligned} &E = \{S, E_N, E_P, F, G, Q\}, \\ &E_n = \{S_n, E_{nN}, E_{nP}, F_n, G_n, Q_n\}, \quad n = 1, 2, \cdots. \end{aligned} \tag{4.23}$$

令 $\{Z + Z^*\} = H_-^0 \oplus H_+^0$ 是正则分解，下面将用由正则分解 $\Pi_K = (N \oplus H_-^0) \oplus (H_+^0 \oplus P)$ 所产生的范数 $\|\cdot\|$ 来研究 $\{E_n\}$ 的强极限。

显然，(强) $\lim_{n\to\infty} E_n = E$ 的充要条件是

$$\begin{cases}(\text{强})\ \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S,\ (\text{强})\ \lim\limits_{n\to\infty} E_{nN} = E_N \\ (\text{强})\ \lim\limits_{n\to\infty} F_n = F,\ (\text{强})\ \lim\limits_{n\to\infty} Q_n = Q,\end{cases} \tag{4.24}$$

$$(\text{强})\ \lim_{n\to\infty} E_{nP} = E_P,\ (\text{强})\ \lim_{n\to\infty} G_n = G. \tag{4.25}$$

因此,只要证明 (4.24), (4.25) 成立即可.

由于(弱) $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = E$, 由此可知相应于 (4.24) 中的四个等式的弱极限等式成立. 但由于 Z, Z^*, N 都是有限维空间, 所以 (4.24) 的强极限等式成立. 因此, 我们只要再证 (4.25) 成立就可以了.

由于(弱) $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = E$, 所以对任何 p, $p'\in P$, $z^*\in Z^*$,

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(E_{nP}p, p') = (E_P p, p'),\\ &\lim_{n\to\infty}(G_n p, z^*) = (Gp\ , z^*).\end{aligned} \tag{4.26}$$

又根据共鸣定理,存在常数 $M > 0$, 使得

$$\|E_{nP}\| \leqslant M,\ \|G_n\| \leqslant M,\ n = 1, 2, \cdots. \tag{4.27}$$

对任何 $p\in P$,

$$\begin{cases}E_n E_m p = E_{nP}E_{mP}p + G_n E_{mP}p + S_n G_m p\\ E_m E_n p = E_{mP}E_{nP}p + G_m E_{nP}p + S_m G_n p\\ \quad E_n p = E_{nP}p + G_n p\end{cases} \tag{4.28}$$

而当 $n \geqslant m$ 时,有 $E_n E_m = E_m E_n = E_n$, 所以由上式得到

$$E_{nP}E_{mP} = E_{mP}E_{nP} = E_{nP}, \tag{4.29}$$

$$G_n E_{mP} + S_n G_m = G_n,\ G_m E_{nP} + S_m G_n = G_n. \tag{4.30}$$

(4.29) 表示 $\{E_{nP}\}$ 是 $(P, (\cdot, \cdot))$ 上单调下降投影算子序列. 根据 Hilbert 空间上弱收敛的投影算子的单调序列必强收敛的事实, 立即从 (4.26), (4.29) 得到(强)$\lim\limits_{n\to\infty} E_{nP} = E_P$. 剩下只要证明(强) $\lim\limits_{n\to\infty} G_n = G$.

因为 $\{\|G_n\|\}$ 是有界数列, 所以只要证明在 $(P, (\cdot,\cdot))$ 的某个稠密集上 $\{G_n\}$ 强收敛就可以了. 显然, 集

$$A = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{np}P\right) \cup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (I - E_{np})P\right)$$

是 $(P, (\cdot, \cdot))$上稠密集（因为 $\{E_{np}\}$ 是 $(P, (\cdot, \cdot))$ 上可交换的投影算子序列)．对任何 $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{np}P$，显然 $p \in E_pP$，并且

$$E_{np}p = p = E_pp, \quad n = 1, 2, \cdots; \tag{4.31}$$

又由于 $Ep = E_pp + Gp \in E\Pi_K, \left(= \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\Pi_K\right)$，则有

$$p + Gp = E_n(p + Gp) = E_{np}p + G_np + S_nGp,$$

$$p + Gp = E(p + Gp) = E_pp + Gp + SGp.$$

从 (4.31)，(4.24) 和上两式可知，$\{G_np\}$ 必强收敛于 Gp，即 $\{G_n\}$ 在 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{np}P$ 上强收敛于 G．而对任何 $p' \in (I - E_{mp})P$，由 (4.30) 的第一式可得(不妨设 $n \geqslant m$)

$$G_np' = G_n(I - E_{mp})p' = S_nG_mp';$$

当m取定后，由 $\{S_n\}$ 的强收敛性立即可知，$\{G_n\}$ 在 $(I-E_{mp})P$ 上强收敛于G(因为 $\{G_n\}$ 在 P 上已弱收敛于 G)．证毕．

定理 4.5 设 $\{E_n\}$ 是 Π_K 上一单调的投影算子序列，则下列三件事等价．

(i) $\{E_n\}$ 是有界序列．

(ii) $\{E_n\}$ 弱收敛．

(iii) $\{E_n\}$ 强收敛．

证 定理 4.4 已说明由 (ii) 可得到 (iii)，而由共鸣定理可知由 (iii) 能推出 (i)，所以只要证明从 (i) 能推出 (ii) 即可．

假设 $\{E_n\}$ 是有界的序列，并且 $E_1 \gtrsim E_2 \gtrsim \cdots \gtrsim E_n \gtrsim \cdots$，今证明 $\{E_n\}$ 必弱收敛．由于 $\{E_n\}$ 可交换，所以存在公共的标准分解 $\Pi_K = N \oplus \{Z + Z^*\} \oplus P$，在这个分解下，$\{E_n\}$ 能表成 (4.23)．令 $\{Z + Z^*\} = H_-^0 \oplus H_+^0$ 是正则分解，$\|\cdot\|$ 是由分解 $\Pi_K = (N \oplus H_-^0) \oplus (H_+^0 \oplus P)$ 所产生的范数（下面就用这个范数计算)．显然，只要证明下列弱极限存在即可．

$$
\begin{cases}(\text{弱})\ \lim\limits_{n\to\infty} S_n,\ (\text{弱})\ \lim\limits_{n\to\infty} E_{nN}\\ (\text{弱})\ \lim\limits_{n\to\infty} F_n,\ (\text{弱})\ \lim\limits_{n\to\infty} Q_n\end{cases} \tag{4.32}
$$

$$
(\text{弱})\ \lim_{n\to\infty} E_{nP},\ (\text{弱})\ \lim_{n\to\infty} G_n. \tag{4.33}
$$

由于 $\{E_n\}$ 是有界序列，即 $\{\|E_n\|\}$ 是有界数列，易知 $\{\|S_n\|\}$，$\{\|F_n\|\}$，$\{\|G_n\|\}$，$\{\|Q_n\|\}$ 都是有界数列，而 $\|E_{nP}\|=\|E_{nN}\|=1$，$n=1,2,\cdots$. 因为 $\{E_{nN}\}$，$\{E_{nP}\}$ 分别是 Hilbert 空间 $(N,-(\cdot,\cdot))$，$(P,(\cdot,\cdot))$ 上单调下降投影算子序列，所以(弱) $\lim\limits_{n\to\infty} E_{nP}$，(弱) $\lim\limits_{n\to\infty} E_{nN}$ 存在. 因为 Z，N，Z^* 是有限维空间，根据 $\{\|S_n\|\}$，$\{\|F_n\|\}$，$\{\|Q_n\|\}$ 的有界性，易知必存在自然数的子列 $\{n_k\}$，使得(弱) $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k}$，(弱) $\lim\limits_{k\to\infty} F_{n_k}$，(弱) $\lim\limits_{n\to\infty} Q_{n_k}$ 存在.

对每个 G_n: $P\to Z$，由于 $\dim\mathscr{R}(G_n)\leqslant\dim Z<\infty$，所以 $\dim(P\ominus\mathscr{N}(G_n))=\dim\mathscr{R}(G_n)<\infty$. 从而 $P\ominus\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{N}(G_n)$ 是可析的，再利用 $\{\|G_n\|\}$ 的有界性，易知必有子序列 $\{G_{n_{k'}}\}$ 在 $P\ominus\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{N}(G_n)$ 上弱收敛，但 $G_n\Big|_{\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\mathscr{N}(G_m)}=0\ (n=1,2,\cdots)$，所以 $\{G_{n_{k'}}\}$ 弱收敛.

综上所述，我们证明了下列命题：如果 Π_K 上单调下降的投影算子序列 $\{E_n\}$ 是有界的，那末它必有弱收敛的子序列 $\{E_{n_k}\}$. 根据定理 4.4，$E=(\text{弱})\ \lim\limits_{k\to\infty} E_{n_k}$ 是相应于 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_{n_k}\Pi_K$ 的投影算子.

由于 $\{E_n\}$ 的任何子序列 $\{E_{n_{k'}}\}$ 都有 $\bigcap\limits_{n_{k'}} E_{n_{k'}}\Pi_K=\bigcap\limits_{n_k} E_{n_k}\Pi_K=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n\Pi_K$，所以 $\{E_n\}$ 的一切弱收敛子序列的极限是同一个 E. 由此，不难知道 $\{E_n\}$ 是弱收敛的序列. 证毕.

注意 在一般完备的不定度规空间中，$\{E_n\}$ 强、弱收敛是不

等价的.

3. 相应于自共轭、酉算子的谱系

定义 4.2 令 $\mathbf{E}$ 表示 Π_K 上投影算子全体. 设 $\{E_t\}$ 是除了 $(-\infty,\infty)$ 的某有限个点 $\lambda_1,\cdots,\lambda_l$ 之外都有定义的，并取值于 $\mathbf{E}$ 中的(投影)算子值函数. 如果具有如下性质

(i) 对任何 $t<t'$, $t,t'\neq\lambda_1,\cdots,\lambda_l$, $E_t\lessgtr E_{t'}$.

(ii) (强) $\lim\limits_{t\to-\infty}E_t=0$, (强) $\lim\limits_{t\to\infty}E_t=I$.

(iii) 对任何 $t_0\neq\lambda_1,\cdots,\lambda_l$,

$$(\text{强})\ \lim_{t\to t_0+0}E_t=E_{t_0},$$

则称 $\{E_t\}$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上谱系.

定义 4.3 设 $\{E_t\}$ 是仅在 $(-\infty,\infty)$ 的有限个点 $\lambda_1,\cdots,\lambda_l$ 上没有定义的谱系，如果对于某个 λ_i，以及任何包含 λ_i 的区间 $\Delta=(t,t']$，相应的 $E_\Delta=E_{t'}-E_t$ 满足

$$\overline{\lim_{\Delta\to\lambda_i}}\{\|E_\Delta\|\}=\infty, \tag{4.34}$$

那末称 λ_i 是谱系 $\{E_t\}$ 的临界点.

注意 临界点概念在 Hilbert 空间谱系理论中是没有的. 它是 Hilbert 空间谱论和完备不定度规空间谱论本质区别之一. 另外，和 Hilbert 空间一样，也可在 Π_K 空间上引进 $[a,b]$ 上或直线上一般的闭集上谱系的概念，以及圆周上谱系概念等等，这里不再一一叙述.

相应地可引进 Π_K 上自共轭、酉算子的临界点概念.

定义 4.4 设 A (或 U) 是 Π_K 上自共轭(或酉)算子，λ 是它的实特征值(或单位圆周上特征值)，如果相应的根子空间 $\Phi_\lambda(A)$ (或 $\Phi_\lambda(U)$)是退化的，那末称 λ 是 A (或 U) 的临界点.

在讨论 Π_K 上自共轭算子的谱论(Π_K 上酉算子可类似讨论)的时候，我们首先注意到的是，A 的非实谱必是特征值，并且相互共轭成对地出现；而相互共轭的一对特征值 $\lambda,\bar{\lambda}(I_m\lambda\neq 0)$ 所相应的根子空间的和 $\Phi_\lambda(A)\dotplus\Phi_{\bar{\lambda}}(A)$ 是非退化的闭线性子空间(即 $\Phi_\lambda(A)\dotplus\Phi_{\bar{\lambda}}(A)$ 是 Π_K 的完备子空间)，从而 $\Phi_\lambda(A)\dotplus\Phi_{\bar{\lambda}}(A)$ 约

化 A. 由此可见，自共轭算子 A 的谱论实质上是讨论 A 的谱仅是包含在实轴上的情况,而对任何 A 的实特征值 λ, 如果相应的根子空间 $\Phi_\lambda(A)$ (它是闭线性子空间, 见 § 2 推论 2.10 的 (ii)) 是含有零性向量的非退化子空间, 那末 A 在约化子空间 $\Phi_\lambda(A)$ 上的谱仅含有单点 $\{\lambda\}$,而 A 在 Π_K 型空间 $\Phi_\lambda(A)^\perp$ 就不再以 λ 为特征值. 显然, 使得 $\Phi_\lambda(A)$ 中含有零性向量而非退化的 λ 最多不超过 K 个, 因而我们只要讨论 A 在 Π_K 上的谱仅含单点 $\{\lambda\}$ 和不含相应的根子空间是非退化的且包含零性向量的特征值这两种情况就可以了.

根据自共轭算子的三角模型, Π_K 上谱仅含单点 $\{\lambda\}$ 的自共轭算子必具有下列形式: 存在标准分解 $\Pi_K=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$, 在这个标准分解下, $A=\{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$, 其中 $A_N=\lambda I$, $A_P=\lambda I$, 它们分别是 $(N, -(\cdot,\cdot))$, $(P,(\cdot,\cdot))$ 上单位算子的 λ 倍, 而 $\sigma(S)=\{\lambda\}$. 令 $P_0=\{p|Gp=0\}$, 显然 P_0 是 $(P,(\cdot,\cdot))$ 的闭线性子空间(从而也是 Π_K 的完备子空间),并且 $\dim(P\ominus P_0)\leqslant K$. 由于 $P_0\subset\Phi_{\lambda 1}(A)$, 所以 P_0 约化 A. 这样, A 在 P_0 上是 λI, 而 A 在有限维 Π_K 型空间 $P_0^\perp=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus(P\ominus P_0)$ 是具有单点谱 $\{\lambda\}$ 的自共轭算子, 它的结构是清楚的. 因此, 下面讨论 Π_K 上自共轭算子. 不妨都只假定具有实谱, 而且不含有相应的根子空间是非退化且含有零性向量的特征值.

定理 4.6 设 A 是 Π_K 上自共轭算子, $\sigma(A)\subset(-\infty,\infty)$, 并且没有相应的根子空间是非退化且含有半负向量的特征值. 如果在标准分解 $\Pi_K=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$ 之下, $A=\{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$, 那末

(i) $\sigma(A_N)\subset\sigma(S)$.

(ii) $\sigma(S)$ 是由 A 的所有临界点组成.

证 (i) 设 $\lambda_0\in\sigma(A_N)$, 并且 $\lambda_0\bar{\in}\sigma(S)$. 任取 $z^*+z+n+p\in\Phi_{\lambda_0}(A)$, 则必有自然数 $m\leqslant 2K+1$, 使得

$$\begin{aligned}0&=(A-\lambda_0 I)^m(z^*+z+n+p)\\&=(S^*-\lambda_0 I)^m z^*+n'+p'+z',\end{aligned}$$

$$n' \in N, \ p' \in P, \ z' \in Z. \qquad (4.35)$$

由于 $\sigma(S^*) = \sigma(S)$，所以只有 $z^* = 0$，即 $\Phi_{\lambda_0}(A)$ 中向量的一般形式是 $z + n + p$.

同样，可从 $0 = (A - \lambda_0 I)^m (z + n + p)$ 中推出 $(A_P - \lambda_0 I)^m p = 0$，$(A_N - \lambda_0 I)^m n = 0$，即 $(A_P - \lambda_0 I)p = 0$，$(A_N - \lambda_0 I)n = 0$. 但对这样的向量 p, n，由于 $\lambda_0 \bar{\in} \sigma(S)$，必可找到唯一相应的向量 z_p，$z_n \in Z$，使得

$$(A - \lambda_0 I)(p + z_p) = 0, \ (A - \lambda_0 I)(n + z_n) = 0. \qquad (4.36)$$

如果 $\Phi_{\lambda_0}(A)$ 中每个向量 $z + n + p$ 都能表示成 $p + z_p$，$n + z_n$ 的和，那末 $\Phi_{\lambda_0}(A) = \mathrm{span}\{n + z_n\} \oplus \overline{\mathrm{span}}\{p + z_p\}$. 显然，$\Phi_{\lambda_0}(A)$ 是非退化的，这与假设不含有相应的根子空间是非退化且含有负性向量的特征值相矛盾. 因此 $\Phi_{\lambda_0}(A)$ 中必有向量 $z + n + p$ 不能如此表示，即有 $z + n + p = z' + (n + z_n) + (p + z_p)$；而 $z' \neq 0$. 但这又将导致 $(A - \lambda_0 I)^m z' = 0$，这又与假设 $\lambda_0 \bar{\in} \sigma(S)$ 相冲突。所以 $\sigma(A_N) \subset \sigma(S)$.

(ii) 对任何 $\lambda_0 \in \sigma(S)$，由于 $\lambda_0 \in \sigma_p(A)$，并且存在 $z \in Z$，使得 $(A - \lambda_0 I)z = 0$，因而 $\Phi_{\lambda_0}(A)$ 必是退化的，这就是说，λ_0 是 A 的临界点。

反之，如果有临界点 $\lambda_0 \bar{\in} \sigma(S)$，那末由 (i)，$\lambda_0 \bar{\in} \sigma(A_N)$. 因为 A 的不同特征值相应的根子空间互相直交，所以 $\Phi_{\lambda_0}(A) \perp N \oplus Z$. 令 $Z' = \Phi_{\lambda_0}(A) \cap \Phi_{\lambda_0}(A)^{\perp}$，由于 $\Phi_{\lambda_0}(A)$ 是退化的，所以 $Z' \neq \{0\}$，并且 $Z' \perp N \oplus Z$. 由此可知，$(N \oplus Z) + Z'$ 是 Π_K 上半负子空间；再根据 A 的不同特征值相应的根子空间必线性无关，所以 $(N \oplus Z) + Z' = (N \oplus Z) \oplus Z'$，从而 $\dim(N \oplus Z + Z') = \dim(N \oplus Z) + \dim Z' = K + \dim Z' > K$. 显然，这不可能. 所以，$A$ 的临界点必在 $\sigma(S)$ 中. 证毕.

定义 4.5 设 $L_1, \cdots, L_n$ 是线性空间 L 的线性子空间，并且 $L = L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} \cdots \dot{+} L_n$，因而对任何 $x \in L$，有唯一表示 $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$，$x_i \in L_i$ $i = 1, 2, \cdots, n$. 称 L 到 L_i 的线性算子 P_i: $x \longmapsto x_i$ 是 L 在分解 $L = L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} \cdots \dot{+} L_n$ 下在 L_i

的平行投影。

为给出自共轭算子的谱系，我们先给出自共轭算子的预解式的表达式。

引理 4.7 设 A 是 Π_K 上自共轭算子，并且在标准分解 $\Pi_K = N \oplus \{Z + Z^*\} \oplus P$ 之下，$A = \{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$。那末，当 $\lambda \in \rho(A)$ 时，在同一标准分解下，有

$$
\begin{aligned}
(\lambda I - A)^{-1} = \{&(\lambda I - S)^{-1}, (\lambda I - A_N)^{-1}, \\
&(\lambda I - A_P)^{-1}, (\lambda I - S)^{-1}F(\lambda I - A_N)^{-1}, \\
&(\lambda I - S)^{-1}G(\lambda I - A_P)^{-1}, \\
&(\lambda I - S)^{-1}[Q - F(\lambda I - A_N)^{-1}F^* \\
&+ G(\lambda I - A_P)^{-1}G^*](\lambda I - S^*)^{-1}\},
\end{aligned} \tag{4.37}
$$

并且

$$
(\lambda I - S^*)^{-1} = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=0}^{K-1} \frac{(S^* - \lambda_j)^i}{(\lambda - \lambda_j)^{i+1}} P_j^*, \tag{4.38}
$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ 是 S^* 的特征值全体，P_j^* 是 Z^* 按分解 $Z^* = \Phi_{\lambda_1}(S^*) \dot{+} \Phi_{\lambda_2}(S^*) \dot{+} \cdots \dot{+} \Phi_{\lambda_l}(S^*)$ 在 $\Phi_{\lambda_j}(S^*)$ 上的平行投影。

证 用定理 2.8 的 (2.53) 式可直接计算出 (4.37) 式，这里从略。而 (4.38) 是线代数中的结论。证毕。

定理 4.8 设 A 是 Π_K 上自共轭算子，$\sigma(A) \subset (-\infty, \infty)$，$\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ 是 A 的临界点全体。那末，必存在 $(-\infty, \infty)$ 上谱系 $\{E_t\}$ 满足下列条件。

(i) 除去 $t = \lambda_1, \cdots, \lambda_l$ 外，$\{E_t\}$ 都有定义。

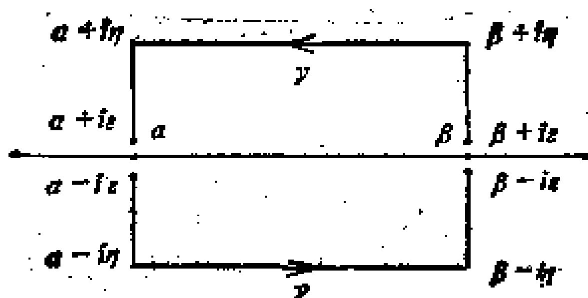
(ii) 对任何区间 $\Delta = (\alpha, \beta]$ $(\alpha, \beta \neq \lambda_1, \cdots, \lambda_l)$，$E_\Delta \Pi_K \subset \mathscr{D}(A)$ $(E_\Delta = E_\beta - E_\alpha)$，并且是 A 的不变子空间。如令 A_Δ 是 A 在 $E_\Delta \Pi_K$ 上的限制，那末 $\sigma(A_\Delta) \subset \bar{\Delta}$。

(iii) 当 A 不含有相应根子空间是非退化的且含有零性向量的特征值时，那末对不含 A 的临界点的 $\Delta = (\alpha, \beta]$，$E_\Delta \Pi_K$ 是正的完备子空间

(iv) 对每个 $t_0 \neq \lambda_1, \cdots, \lambda_l$，(强) $\lim\limits_{\substack{t' \to t_0 \\ t' < t_0}} E_{t'}$ 存在，

(v) 当 A 是有界算子时，记 $m=\inf\{\lambda|\lambda\in\sigma(A)\}$，$M=\sup\{\lambda|\lambda\in\sigma(A)\}$，那末 $E_t=0\ (t<m)$，$E_t=I\ (t>M)$。

(vi) 任何与 A 可交换的有界自共轭算子 B 必与 $E_t(t\neq\lambda_1,\cdots,\lambda_l)$ 可交换。



本定理的证明主要是利用 A 的预解式(4.37),(4.38)，直接计算下列围道积分。设 $\varepsilon>0$，$\Delta=(\alpha,\beta]$，$\eta>\varepsilon$，

$$E_\Delta=(\text{强})\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\pi i}\oint(\lambda I-A)^{-1}d\lambda, \qquad (4.39)$$

其中 λ_l 是可能落在围道 γ 内部的临界点。从(4.37)，(4.38)可知，只要(4.37)中每一项的围道积分强极限存在，并计算出相应的极限值，就可知(4.39)中强极限存在，并且给出 E_Δ 的解析表达式。

下面将利用 Hilbert 空间 $(N, -(\cdot,\cdot))$，$(P, (\cdot,\cdot))$ 上的自共轭算子 A_N，A_P 的谱分解，以及复变函数论中计算留数的方法直接计算(4.37)中每一项的围道积分。这里计算的方法都是通常的，不拟写出计算过程，只列出结果(部分计算可见附录)。下面的极限都是指强极限。

引理 4.9 设 $\varepsilon>0$，对每个实数 λ，记 $F_\varepsilon(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint\frac{d\lambda'}{(\lambda'-\lambda)}$，那末

$$F_\varepsilon(\lambda)=\begin{cases}1-f_\varepsilon(\lambda), & \alpha<\lambda<\beta,\\ -f_\varepsilon(\lambda), & \lambda<\alpha \text{ 或 } \lambda>\beta,\end{cases}$$

其中 $f_\varepsilon(\lambda)=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{\beta-\lambda}+\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{\lambda-\alpha}\right)$.

显然，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\lambda\to\beta-0}F_\varepsilon(\lambda)=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\lambda\to\alpha+0}F_\varepsilon(\lambda)=\frac{1}{2}, \tag{4.40}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\lambda\to\beta+0}F_\varepsilon(\lambda)=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\lambda\to\alpha-0}F_\varepsilon(\lambda)=\frac{1}{2}. \tag{4.41}$$

引理 4.10 设 A 是 Hilbert 空间 H 上自共轭算子，那末 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint(\lambda' I-A)^{-1}d\lambda'$ 存在。如果 $\{E_\lambda^A\}$ 是 A 的(右连续)谱系，那末对任何 $x\in H$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint(\lambda' I-A)^{-1}d\lambda' x=E^A_{(\alpha,\beta)}x+\frac{1}{2}(E^A_\beta-E^A_{\beta-0})x$$
$$+\frac{1}{2}(E^A_\alpha-E^A_{\alpha-0})x. \tag{4.42}$$

由引理 4.10 可见，对于 Hilbert 空间上自共轭算子 A，如果 α 或 β 是 A 的谱系 $\{E_\lambda^A\}$ 的不连续点时，必须修改围道积分 $\frac{1}{2\pi i}\oint(\lambda' I-A)^{-1}d\lambda'$ 在这些点上的值，才能具有下列形式

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint(\lambda' I-A)^{-1}d\lambda=E^A_{(\alpha,\beta]}. \tag{4.43}$$

下面，凡是 Hilbert 空间上有关自共轭算子的上述围道积分均采用修改后的定义 (4.43) 式。这种修改的办法可以通过换围道 γ 成为变动围道 γ_ε 来实现。这里，γ_ε 是将 γ 平行实轴右移 $\sqrt{\varepsilon}$ 后所得到的围道。这样就得到

$$F_\varepsilon(\lambda-\sqrt{\varepsilon})=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\varepsilon}\frac{d\lambda'}{\lambda'-\lambda}.$$

显然，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}F_\varepsilon(\lambda-\sqrt{\varepsilon})=\chi_{(\alpha,\beta]}(\lambda)$ （$\chi_{(\alpha,\beta]}(\lambda)$ 是 $(\alpha,\beta]$ 的特征函数）。从而，如果 (4.43) 中围道积分中围道取为 γ_ε，(4.43) 则严格成立。今后的围道积分，都把 γ 理解为这样修改后的定义方

式(附录中积分也如此)。

引理 4.11 下列等式成立，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma(\lambda I-S^*)^{-1}d\lambda z^*=P_S^*z^*,\quad z^*\in Z^*;\quad (4.44)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma(\lambda I-A_N)^{-1}d\lambda n=E_{(\alpha,\beta]}^{A_N}n,\ n\in N;\quad (4.45)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma(\lambda I-A_P)^{-1}d\lambda p=E_{(\alpha,\beta]}^{A_P}p,\ p\in P;\quad (4.46)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma(\lambda I-S)^{-1}d\lambda z=P_Sz,\ z\in Z.\quad (4.47)$$

其中 $\{E_t^{A(\cdot)}\}$ 是自共轭算子 $A_{(\cdot)}$ 的谱系；P_S^* 是 Z^* 中平行投影，当 γ 中不含算子 S 的特征值时，$P_S^*=0$，而当 γ 中含有 S 的特征值 λ_i 时，$P_S^*=P_i^*$；P_S 与 P_S^* 意义相类似，只不过用 Z 代替 Z^*。

(4.45)，(4.46) 就是 (4.43) 在 $A=A_N$，$A=A_P$ 情况下的具体应用．直接利用 (4.38) 计算积分就得到 (4.44)，类似地又可得 (4.47)。

下面的计算中，只考虑围道 γ 中最多只含 S 的一个特征值的情况。

引理 4.12 对任何 $p\in P$，$n\in N$，下式对一切非负整数 k 成立。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma(\lambda I-A_{(\cdot)})^{-1}(\lambda_j-\lambda)^{-(k+1)}(p;n)d\lambda$$

$$=(\lambda_jI-A_{(\cdot)})^{-(k+1)}(E_{(\alpha,\beta]}^{A(\cdot)}-F(\lambda_j))(p;n).\quad (4.48)$$

其中，当 $\lambda_j\in(\alpha,\beta)$ 时，$F(\lambda_j)=I$；当 $\lambda_j\bar{\in}[\alpha,\beta]$ 时，$F(\lambda_j)=0$，又 $(p;n)$ 表示向量 n 或 p，视 $A_{(\cdot)}$ 取 A_N 或 A_p 而定。

为了计算算子

$$B_\varepsilon=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma(\lambda I-A_{(\cdot)})^{-1}(\lambda_e-\lambda)^{-(k+1)}(\lambda_m-\lambda)^{-(j+1)}d\lambda\tag{4.49}$$

的强极限，引入记号：

$$
\begin{aligned}
&R_{(\cdot)}(\lambda_m, j+1;\ \lambda_e, k+1) \\
&= (\lambda_e I - A_{(\cdot)})^{-(k+1)} \Big[(\lambda_m I - A_{(\cdot)})^{-(j+1)} \\
&\quad - \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} (\lambda_m - \lambda)^{-(j+1)} \Big|_{\lambda=\lambda_e} \\
&\quad \cdot (A_{(\cdot)} - \lambda_e I)^n \Big] E^{A(\cdot)}_{(\alpha,\beta]}.
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

显然，当 $\lambda_m \bar{\in} [\alpha, \beta]$ 时，$R_{(\cdot)}(\lambda_m, j+1;\ \lambda_e, k+1)$ 是 $A_{(\cdot)}$ 的有界函数[1]，我们称它为 $(\lambda_m, j+1)$ 关于 $(\lambda_e, k+1)$ 在 $(\alpha, \beta]$ 上的余项算子。

引理 4.13 对任何 $p \in P$，$n \in N$，下式对一切非负整数 k，j 成立

$$
\lim_{\varepsilon \to 0} B_\varepsilon(p;\ n) =
\begin{cases}
\Big\{ -(\lambda_e I - A_{(\cdot)})^{-(k+1)} \Big[\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} (\lambda_m - \lambda)^{-(j+1)} \Big|_{\lambda=\lambda_e} \\
\quad \cdot (A_{(\cdot)} - \lambda_e I)^n \Big] (I - E^{A(\cdot)}_{(\alpha,\beta]}) + R_{(\cdot)}(\lambda_m, j+1;\ \lambda_e, \\
\quad k+1)\, E^{A(\cdot)}_{(\alpha,\beta]} \Big\} (p;\ n), \qquad \text{若 } \lambda_e \in (\alpha, \beta],\ \lambda_m \bar{\in} [\alpha, \beta]; \\
(\lambda_e I - A_{(\cdot)})^{-(k+1)} (\lambda_m I - A_{(\cdot)})^{-(j+1)} \\
\quad \cdot (E^{A(\cdot)}_{(\alpha,\beta]} - F(\lambda_m, \lambda_e))(p;\ n), \text{其余情况。}
\end{cases}
\tag{4.51}
$$

其中的 $(p;\ n)$，意义如引理 4.12，而当 $\lambda_e = \lambda_m$，且 $\lambda_e \in (\alpha, \beta)$ 时，$F(\lambda_m, \lambda_e) = I$；当 λ_e，$\lambda_m \bar{\in} [\alpha, \beta]$ 时，$F(\lambda_m, \lambda_e) = 0$。

利用引理 4.10—引理 4.13，即可给出 (4.39) 中 $E_{(\alpha,\beta]}$ 的解析表达式。我们引入下列记号：

$$
\hat{E}^{A(\cdot)}_{(\alpha,\beta)} = \begin{cases} (I - E^{A(\cdot)}_{(\alpha,\beta]}), & \lambda_e \in (\alpha, \beta) \\ E^{A(\cdot)}_{(\alpha,\beta]}, & \lambda_e \bar{\in} [\alpha, \beta] \end{cases}
\tag{4.52}
$$

---

1) 其实 $R_{(\cdot)}(\lambda_m, j+1;\ \lambda_e, k+1) = f(A_{(\cdot)}) \chi_{(\alpha,\beta]}(A_{(\cdot)})$，其中 $f(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上解析，$(-\infty, \infty)$ 上连续且有界，$\chi_{(\alpha,\beta]}(t)$ 是 $(\alpha, \beta]$ 的特征函数.

$$H_{(\alpha,\beta]}(\lambda_e, X, A_{(\cdot)}) = \sum_j P_e(\lambda_e I - S)^{j-1} X(\lambda_e I - A_{(\cdot)})^{-j} \hat{E}^{A_{(\cdot)}}_{(\alpha,\beta]}, \tag{4.53}$$

$$P_{(\alpha,\beta]}(X, A_{(\cdot)}) = \sum_m (1 - 2\delta_{em}) H_{(\alpha,\beta]}(\lambda_m, X, A_{(\cdot)}) \tag{4.54}$$

(当 $e = m$ 时，$\delta_{em} = 1$；当 $e \neq m$ 或 $\lambda_e \bar{\in} [\alpha, \beta]$ 时，$\delta_{em} = 0$.)

$$\begin{aligned}
Q_{(\alpha,\beta]}(X, A_{(\cdot)}) = & \sum_{\substack{n,m \neq e \\ n=m=e}} (1 - 2\delta_{em}) H_{(\alpha,\beta]}(\lambda_m, X, A_{(\cdot)}) \\
& \cdot H_{(\alpha,\beta]}(\lambda_n, X, A_{(\cdot)})^* + \sum_{m \neq e} \sum_{j,k} \Big\{ (\lambda_e I - S)^j P_e X \\
& \cdot \Big[(\lambda_e I - A_{(\cdot)})^{-(j+1)} \sum_{n=0}^{j} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} (\lambda_m - \lambda)^{-(k+1)} \Big|_{\lambda=\lambda_e} \\
& (A_{(\cdot)} - \lambda_e I)^n (I - E^{A_{(\cdot)}}_{(\alpha,\beta]}) \\
& + R_{(\cdot)}(\lambda_m, k+1; \lambda_e, j+1) E^{A_{(\cdot)}}_{(\alpha,\beta]} \Big] \\
& \cdot X^*(\lambda_m I - S^*)^k P_m^* \Big\} + \sum_{m \neq e} \sum_{j,k} \Big\{ (\lambda_m I - S)^j P_m X \\
& \cdot \Big[(\lambda_e I - A_{(\cdot)})^{-(k+1)} \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} (\lambda_m - \lambda)^{-(j+1)} \\
& \cdot \Big|_{\lambda=\lambda_e} (A_{(\cdot)} - \lambda_e I)^n (I - E^{A_{(\cdot)}}_{(\alpha,\beta]}) \\
& + R_{(\cdot)}(\lambda_m, j+1; \lambda_e, k+1) E^{A_{(\cdot)}}_{(\alpha,\beta]} \Big] \\
& \cdot X^*(\lambda_e I - S^*)^k P_e^* \Big\}
\end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned}
Q_e = & \sum_{m \neq e} \sum_{j,k} \frac{1}{(j-1)!} \frac{d^{j-1}}{d\lambda^{j-1}} (\lambda_m - \lambda)^{-k} \Big|_{\lambda=\lambda_e} \\
& \cdot [(-1)^j (\lambda_e I - S)^{j-1} P_e Q (\lambda_m I - S^*)^{k-1} P_m^* \\
& + (-1)^k (\lambda_m I - S)^{j-1} P_m Q (\lambda_e I - S^*)^{k-1} P_e^*.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

定理 4.14 设在标准分解 $\Pi_K = N \oplus \{Z + Z^*\} \oplus P$ 之下，自共轭算子 $A = \{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$，$\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ 是 S 的特征值

全体。 P_i 表示Z按分解 $Z = \Phi_{\lambda_1}(S) \dotplus \Phi_{\lambda_2}(S) \dotplus \cdots \dotplus \Phi_{\lambda_l}(S)$ 在 $\Phi_{\lambda_i}(S)$ 上的平行投影.又设 $\{E_t^{A_{(\cdot)}}\}$ 是 $A_{(\cdot)}$ 的谱系，那末对仅含 $\lambda_1, \cdots \lambda_l$ 中一个点 λ_c 的区间 (α, β)，在同一标准分解下，

$$E_{(\alpha,\beta]} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \oint (\lambda I - A)^{-1} d\lambda$$

$$= \{P_c, E^{A_N}_{(\alpha,\beta]}, E^{A_P}_{(\alpha,\beta]}, P_{(\alpha,\beta]}(F, A_N), P_{(\alpha,\beta]}(G, A_P),$$

$$- Q_{(\alpha,\beta]}(F, A_N) + Q_{(\alpha,\beta]}(G, A_P) + Q_c\}. \quad (4.57)$$

本定理可以利用引理 4.7 的 $(\lambda I - A)^{-1}$ 的表达式以及引理 4.10—引理 4.13 的计算直接得到。证明略。

注 如果 (α, β) 不含任何 S 的特征值，那末 (4.57) 中 $P_c = 0$。如果 (α, β) 中不含 S 的特征值，$(\alpha, \beta]$ 中也不含 A_N 的特征值，那末 (4.57) 中 $P_c = 0$，$E^{A_N}_{(\alpha,\beta]} = 0$，$P_{(\alpha,\beta]}(F, A_N) = 0$，$Q_c = 0$，$Q_{(\alpha,\beta]}(F, A_N) = 0$，并且 $Q_{(\alpha,\beta]}(G, A_P) = \sum_{m,n} H_{(\alpha,\beta]}(\lambda_m, G, A_P) H_{(\alpha,\beta]}(\lambda_n, G, A_P)^* = P_{(\alpha,\beta]}(G, A_P) P^*_{(\alpha,\beta]}(G, A_P)$，即

$$E_{(\alpha,\beta]} = \{0, 0, E^{A_P}_{(\alpha,\beta]}, 0, P_{(\alpha,\beta]}(G, A_P),$$

$$P_{(\alpha,\beta]}(G, A_P) P_{(\alpha,\beta]}(G, A_P)^*\}. \quad (4.58)$$

用定理 4.14，上面的注，以及类似证明引理 4.12 和引理 4.13 的方法，就可证明定理 4.8。

下面证明定理 4.8

(i) 作出 $\{E_t\}$，并证明 $\{E_t\}$ 是除去 $t = \lambda_1, \cdots, \lambda_l$ 外有意义的谱系。事实上，对任何 $(\alpha, \beta]$，由 (4.57) 可知，$E_{(\alpha,\beta]}$ 已是 Π_K 上自共轭算子，所以只要再证明 $E^2_{(\alpha,\beta]} = E_{(\alpha,\beta]}$，那末 $E_{(\alpha,\beta]}$ 便是 Π_K 上投影算子。$E^2_{(a,b]} = E_{(a,b]}$ 不难直接利用(4.52)—(4.57) 的表达式以及 $P_{\lambda_i} P_{\lambda_j} = 0 = P^*_{\lambda_i} P^*_{\lambda_j}$ $(i \neq j)$ 加以验证。

为了验证 E_Δ 的可加性（即对任何 $(\alpha, \beta]$，$(\alpha', \beta']$，如果 $(\alpha, \beta] \wedge (\alpha', \beta'] = \varnothing$，那末 $E_{(\alpha,\beta]} E_{(\alpha',\beta']} = 0$），可不妨设 (α, β)，(α', β') 中分别最多仅含 $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ 中一个点的情况（在验证时，应将有关的“余项算子”还原成原来积分的形式，这样较为方

便)．由 E_Δ 的可加性，就得到单调性：对任何 $(\alpha,\beta]\subset(\alpha',\beta']$，必有 $E_{(\alpha,\beta]}\lesssim E_{(\alpha',\beta']}$，并且 $E_{(\alpha',\beta']}=E_{(\alpha',\alpha]}+E_{(\alpha,\beta]}+E_{(\beta,\beta']}$.

因为 $\{E_t^{A_N}\}$，$\{E_t^{A_P}\}$ 分别是 Hilbert 空间 $(N,-(\cdot,\cdot))$，$(P,(\cdot,\cdot))$ 上谱系，而 G，F 是连续算子，所以下列强极限存在

$$\lim_{\beta\to\infty}E_{(\alpha,\beta]},\quad \lim_{\alpha\to-\infty}E_{(\alpha,\beta]},\tag{4.59}$$

并且

$$\lim_{\beta\to-\infty}\lim_{\alpha\to-\infty}E_{[\alpha,\beta]}=0,\quad \lim_{\alpha\to\infty}\lim_{\beta\to\infty}E_{[\alpha,\beta]}=0,\tag{4.60}$$

$$\lim_{\beta'\to\beta+0}E_{(\alpha,\beta']}=E_{(\alpha,\beta]},\tag{4.61}$$

$$\lim_{\alpha\to-\infty,\beta\to\infty}E_{(\alpha,\beta]}=\{I,I,I,0,0,0\}.\tag{4.62}$$

根据 (4.59)，当 $t\neq\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l$ 时，定义 E_t 如下

$$E_t=\lim_{\alpha\to-\infty}E_{(\alpha,t]}.\tag{4.63}$$

由 (4.60)—(4.62) 以及上面已得到单调性可知，$\{E_t\}$ 满足了定理 4.8 的(i).

(ii) 对任何 $\Delta=(\alpha,\beta]$，由于 E_Δ 是投影算子，所以 $E_\Delta\Pi_K$ 是完备子空间，自然它是非退化的(并且还是闭线性子空间)．因为 A 是闭算子，所以对任何 $x\in\mathscr{D}(A)$ 以及 $\varepsilon>0$，

$$A\frac{1}{2\pi i}\oint(\lambda I-A)^{-1}d\lambda x=\frac{1}{2\pi i}\oint A(\lambda I-A)^{-1}d\lambda x$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint(\lambda I-A)^{-1}d\lambda Ax,\tag{4.64}$$

即 A 与 $\frac{1}{2\pi i}\oint(\lambda I-A)^{-1}d\lambda$ 可交换．然而 E_Δ 是 $\frac{1}{2\pi i}\oint(\lambda I-A)^{-1}d\lambda$ 的强极限，由 (4.64) 又得到

$$E_\Delta\Pi_K\subset\mathscr{D}(A),\ E_\Delta Ax=AE_\Delta x\ (x\in\mathscr{D}(A)).\tag{4.65}$$

(必须注意，极限 (4.43) 是由 (4.42) 修改定义后得到的，所以严格地说，由 (4.64) 要得到 (4.65) 应仿附录中证明引理 4.12 和引理 4.13 加以证明)．(4.65) 说明 $E_\Delta\mathscr{D}(A)$ 是 A 的不变子空间．

对任何 $\lambda_0\bar{\in}[\alpha,\beta]$，易知 (证明见附录的引理 2) 下面的强极限存在，

$$g(A)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{1}{\lambda_0-\lambda}(\lambda I-A)^{-1}d\lambda, \tag{4.66}$$

并且

$$g(A)E_{(\alpha,\beta]}=E_{(\alpha,\beta]}g(A). \tag{4.67}$$

由 A 的闭性，又易知

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}(\lambda_0 I-A)\oint\frac{1}{\lambda_0-\lambda}(\lambda I-A)^{-1}d\lambda\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint\left[(\lambda I-A)^{-1}+\frac{1}{\lambda_0-\lambda}\right]d\lambda,\\&\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{1}{\lambda_0-\lambda}(\lambda I-A)^{-1}d\lambda(\lambda_0 I-A)x\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint\left[(\lambda I-A)^{-1}+\frac{1}{\lambda_0-\lambda}\right]x d\lambda,\ x\in\mathscr{D}(A).\end{aligned} \tag{4.68}$$

再利用 A 的闭性，对 (4.68) 取强极限，就得到

$$\begin{aligned}&(\lambda_0 I-A)g(A)=E_{(\alpha,\beta]},\\&g(A)(\lambda_0 I-A)x=E_{(\alpha,\beta]}x,\ x\in\mathscr{D}(A).\end{aligned} \tag{4.69}$$

由 (4.67)，(4.69) 可知，$\lambda_0\in\rho(A|_{E_{(\alpha,\beta]}\Pi})$，即 $\sigma(A_\Delta)\subset\Delta$.

(iii) 当 $(\alpha,\beta]$ 中不含 S，A_N 的特征值时，由 (4.58) 得到

$$E_{(\alpha,\beta]}\Pi_K=\{E^{A_P}_{(\alpha,\beta]}p+P_{(\alpha,\beta]}(G,A_P)p\mid p\in P\}. \tag{4.70}$$

事实上，对任何 $z^*+n+p+z\in\Pi_K$，由 (4.58)，有

$$\begin{aligned}E_{(\alpha,\beta]}(z^*+n+p+z)&=E^{A_P}_{(\alpha,\beta]}p+P_{(\alpha,\beta]}(G,A_P)p\\&+P_{(\alpha,\beta]}(G,A_P)^*z^*+P_{(\alpha,\beta]}(G,A_P)P_{(\alpha,\beta]}(G,A_P)^*z^*.\end{aligned} \tag{4.71}$$

如令 $p'=P_{(\alpha,\beta]}(G,A_P)^*z^*$，由 (4.54) 可知，$p'\in E^{A_P}_{(\alpha,\beta]}$，从而

$$\begin{aligned}E_{(\alpha,\beta]}(z^*+n+p+z)&=E^{A_P}_{(\alpha,\beta]}(p+p')\\&+P_{(\alpha,\beta]}(G,A_P)(p+p'),\end{aligned}$$

即 (4.70) 成立．显然，当 $E^{A_P}_{(\alpha,\beta]}p=0$ 时，必有 $P_{(\alpha,\beta]}(G,A_P)p=0$，从而由 (4.70) 可知，$(E_{(\alpha,\beta]}\Pi_K(\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间．

根据定理 4.6，在 (iii) 的假设下，$(\alpha,\beta]$ 中就不含 S，A_N 的特征值，所以 $E_{(\alpha,\beta]}\Pi_K$ 是正的完备子空间．

(iv) 对每个 $t_0 \neq \lambda_1, \cdots, \lambda_l$，由于 $E^{A(\cdot)}_{t_0-0}$ 存在，易知 $E_{t_0-0} = \lim_{\substack{t' \to t_0 \\ t' < t_0}} E_{t'}$ 存在。

(v) 当 $[\alpha, \beta] \in \rho(A)$ 时，不难从 (4.37) 的 $(\lambda I - A)^{-1}$ 的表达式中的每一项的解析性看出，$E_{(\alpha,\beta]}\Pi_K = \{0\}$，从而 (v) 成立。

(vi) 由于在 $\mathscr{D}(A)$ 上成立 $BA = AB$，从而对任何 $\lambda \in \rho(A)$，

$$(\lambda I - A)^{-1}B = B(\lambda I - A)^{-1}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint (\lambda I - A)^{-1} d\lambda B = B\frac{1}{2\pi i}\oint (\lambda I - A)^{-1} d\lambda$$

取强极限，就得到 $E_{(\alpha,\beta]}B = BE_{(\alpha,\beta]}$。再令 $\alpha \to -\infty$，就得到所要求的结论。证毕。

下面定理是定理 4.8 和定理 4.14 的重要推论。

定理 4.15 设 A 是 Π_K 上自共轭算子，$\sigma(A) \subset (-\infty, \infty)$。在标准分解 $\Pi_K = N \oplus \{Z + Z^*\} \oplus P$ 之下，$A = \{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$，$\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ 是 S 的特征值全体，又设 $\{E_t\}$ 是按定理 4.8 所产生的 A 的谱系。那末下列命题成立。

(i) 如果 $(\alpha, \beta]$ 中不含 S 的特征值，则

$$E_{(\alpha,\beta]} = \{0, E^{A_N}_{(\alpha,\beta]}, E^{A_P}_{(\alpha,\beta]}, P_{(\alpha,\beta]}(F, A_N), P_{(\alpha,\beta]}(G, A_P),$$
$$-Q_{(\alpha,\beta]}(F, A_N) + Q_{(\alpha,\beta]}(G, A_P)\}; \qquad (4.72)$$

如果 $(\alpha, \beta]$ 中不含 S，A_N 的特征值，则

$$E_{(\alpha,\beta]} = \{0, 0, E^{A_P}_{(\alpha,\beta]}, 0, P_{(\alpha,\beta]}(G, A_P), Q_{(\alpha,\beta]}(G, A_P)\}, \quad (4.73)$$

$$P_{(\alpha,\beta]}(G, A_P) = \sum_{m=1}^{l} H_{(\alpha,\beta]}(\lambda_m, G, A_P), \qquad (4.74)$$
$$Q_{(\alpha,\beta]}(G, A_P) = P_{(\alpha,\beta]}(G, A_P)P_{(\alpha,\beta]}(G, A_P)^*,$$

$$H_{(\alpha,\beta]}(\lambda_m, G, A_P) = \sum_j P_m(\lambda_m I - S)^{j-1}$$
$$\cdot G(\lambda_m I - A_P)^{-j}E^{A_P}_{(\alpha,\beta]}. \qquad (4.75)$$

(ii) 对任何 $t \neq \lambda_1, \cdots, \lambda_l$, 如果 $E_{t_0} - E_{t_0-0} \neq 0$, 那末 $(E_{t_0} - E_{t_0-0})\Pi_K$ 是 A 的约化子空间, 并且 $\sigma(A|_{(E_{t_0}-E_{t_0-0})\Pi_K}) = \{t_0\}$. 进一步, 如果 $t_0 \bar{\in} \sigma(A_N)$, 那末 $(E_{t_0} - E_{t_0-0})\Pi_K$ 是 Hilbert 的空间, 并且

$$A|_{(E_{t_0}-E_{t_0-0})\Pi_K} = t_0 I. \tag{4.76}$$

(iii) 如果$\Delta = (\alpha, \beta]$ 中不含 S, A_N 的特征值, 则在 $E_{(\alpha,\beta]}\Pi_K$ 上,

$$A_\Delta = \int \lambda d E_\lambda. \tag{4.77}$$

证 (i) 由(4.44), (4.55), (4.57) 可知, 当 $(\alpha, \beta]$ 中不含 S 的特征值时, $E_{(\alpha,\beta]}$ 必为 (4.72) 形式.

如果 $(\alpha, \beta]$ 中也不含 A_N 的特征值时, 由 (4.44), (4.45) 以及 (4.52)—(4.57) 可知, $E_{(\alpha,\beta]}$ 必为 (4.73) 形式, 并且 (4.74), (4.75) 成立.

(ii) 根据定理 4.8 的 (iv), E_{t_0-0} 存在. 又根据第二章 §4 定理 4.2 的 (vi), E_{t_0-0} 也是 Π_K 上投影算子, 并且

$$(E_{t_0} - E_{t_0-0}) = \lim_{\alpha \to t_0-0} E_{(\alpha,t_0]}. \tag{4.78}$$

由于 $E_{(\alpha,t_0]}A = AE_{(\alpha,t_0]}$, $E_{(\alpha,t_0]}\Pi_K \subset \mathscr{D}(A)$, 由此易知

$$\begin{aligned} &(E_{t_0} - E_{t_0-0})\Pi_K \subset \mathscr{D}(A), \\ &(E_{t_0} - E_{t_0-0})A = A(E_{t_0} - E_{t_0-0}). \end{aligned} \tag{4.79}$$

根据第二章 §4 定理 4.3 的 (ii), $(E_{t_0} - E_{t_0-0})\Pi_K$ 约化 A. 利用定理 4.8 的 (ii), 立即可知 $\sigma(A|_{(E_{t_0}-E_{t_0-0})\Pi_K}) \neq \varnothing$, 并且是单点集 $\{t_0\}$.

进一步, 如果 $t_0 \bar{\in} \sigma(A_N)$, 则存在 $\eta > 0$, 使得 $(t_0 - \eta, t_0]$ 中不含 S, A_N 的特征值. 由 (i) 或定理 4.8 的 (iii), $E_{(t_0-\eta,t_0]}\Pi_K$ 是正的完备子空间, 即是 Hilbert 空间, 而 A 限制在 $E_{(t_0-\eta,t_0]}\Pi_K$ 上是自共轭算子. 利用 Hilbert 空间上自共轭算子如果只有单点谱, 那末必为倍单位算子的结论, 立即得到 (4.76).

(iii) 由于 $(\alpha, \beta]$ 中不含 S, A_N 的特征值, 且在定理 4.8 的

(iii) 的证明中已得到

$$E_{(\alpha,\beta]}\Pi_K = \{E^{A_p}_{(\alpha,\beta]}p + P_{(\alpha,\beta]}(G, A_p)p \mid p \in P\}, \tag{4.70}$$

所以只要证明

$$AE_{(\alpha,\beta]}p = \int \lambda dE_\lambda E_{(\alpha,\beta]}p, \quad p \in P \tag{4.80}$$

成立就可以了

因为 $\Pi_K = N \oplus \{Z + Z^*\} \oplus P$ 是标准分解，所以存在正则分解 $\Pi_K = H_- \oplus H_+$，$P \subset H_+$，而由这个正则分解导出的范数为 $\|\cdot\|$. 又因为 $E_{(\alpha,\beta]}\Pi_K$ 是正的完备子空间，所以又有正则分解 $\Pi_K = H'_- \oplus H'_+$，$E_{(\alpha,\beta]}\Pi_K \subset H'_+$，而由这个正则分解导出的范数为 $\|\cdot\|'$.

令 d 是 $\sigma(S)$ 与 $(\alpha, \beta]$ 的距离，显然 $d > 0$. 作 $(\alpha, \beta]$ 的剖分；$(\alpha, \beta] = \bigcup_{i=0}^{n-1} (\alpha_i, \alpha_{i+1}]$，$\alpha_0 = \alpha < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = \beta$. 显然 $E_{(\alpha,\beta]} = \bigcup_{i=0}^{n-1} E_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]}$，由 (4.74)，(4.75)，有

$$E^{A_p}_{(\alpha,\beta]} = \sum_{i=0}^{n-1} E^{A_p}_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]}, \tag{4.81}$$

$$P_{(\alpha,\beta]}(G, A_p) = \sum_{i=0}^{n-1} P_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]}(G, A_p). \tag{4.82}$$

如令 $\eta = \max_i(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$，那末由 (4.74)，(4.75) 可知，必存在仅依赖 A 和 d 的常数 $M > 0$，使得对任何 $p \in P$，

$$\Big\|\sum_{m,j} P_m(\lambda_m I - S)^{j-1} G \sum_{i=0}^{n-1} [(\lambda_m I - A_p)^{-j} - (\lambda_m I - \alpha_i)^{-j}] E^{A_p}_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]}p\Big\| \leqslant \eta M \Big\| E^{A_p}_{(\alpha,\beta]}p \Big\|, \tag{4.83}$$

$$\Big\|\sum_{m,j} P_m(\lambda_m I - S)^{j-1} G \sum_{i=0}^{n-1} [(\lambda_m I - A_p)^{-j} - (\lambda_m I - \alpha_i)^{-j}]\alpha_i E^{A_p}_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]}p\Big\| \leqslant \eta M \Big\| E^{A_p}_{(\alpha,\beta]}p \Big\|. \tag{4.84}$$

由 (4.38) 可知，$\sum_{m,i} P_m(\lambda_m I - S)^{-i} G(\lambda_m I - \alpha_i)^{-i} E^{A_p}_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]} p = (\alpha_i - S)^{-1} G E^{A_p}_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]} p$，所以从 (4.83)，(4.84) 就得到

$$\left\| P_{(\alpha,\beta]}(G, A_p)p - \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_i I - S)^{-1} G E^{A_p}_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]} p \right\| \leqslant \eta M \left\| E^{A_p}_{(\alpha,\beta]} p \right\|, \tag{4.85}$$

$$\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i P_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]}(G, A_p)p - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (\alpha_i I - S)^{-1} G E^{A_p}_{(\alpha,\alpha_{i+1}]} p \right\| \leqslant \eta M \left\| E^{A_p}_{(\alpha,\beta]} p \right\|, \tag{4.86}$$

从而

$$\begin{aligned} AE_{(\alpha,\beta]}p &= \sum_{i=0}^{n} A_p E^{A_p}_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]} p + \sum_{i=0}^{n} G E^{A_p}_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]} p \\ &\quad + SP_{(\alpha,\beta]}(G, A_p)p \\ &= \sum_{i=0}^{n} A_p E^{A_p}_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]} p + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (\alpha_i I - S)^{-1} G E^{A_p}_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]} p \\ &\quad + SP_{(\alpha,\beta]}(G, A_p)p \\ &\quad - \sum_{i=0}^{n-1} S(\alpha_i I - S)^{-1} G E^{A_p}_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]} p. \end{aligned} \tag{4.87}$$

由于显然的关系式

$$\sum_{i=0}^{n} A_p E^{A_p}_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]} p = \lim_{\eta\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i E^{A_p}_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]} p,$$

$$E_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]} p = E^{A_p}_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]} p + P_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]}(G, A_p)p,$$

并注意到 (4.85)，(4.86)，从 (4.87) 立即得到

$$AE_{(\alpha,\beta]}p = \lim_{\eta\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i E_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]} p. \tag{4.88}$$

另一方面，在正则分解 $\Pi_K = H'_- \oplus H'_+$ 之下，投影算子 $E_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]}$，$E_{(\alpha_j,\alpha_{j+1}]}$ $(i \neq j)$ 按$(\cdot,\cdot)$相互直交，也就是按 $\|\cdot\|'$（是内积产生的）直交，从而

$$\left\|\int \lambda dE_\lambda E_{(\alpha,\beta]}p - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i E_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]}p\right\|'^2$$

$$= \left\|\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]} \lambda dE_\lambda - \alpha_i E_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]}\right) E_{(\alpha,\beta]}p\right\|'^2$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left\|\left(\int_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]} \lambda_i d\, E_\lambda - \alpha_i\, E_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]}\right) E_{(\alpha,\beta]}p\right\|'^2$$

$$\leqslant \eta^2 \sum_{i=0}^{n-1} \|E_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]}p\|'^2. \tag{4.89}$$

由于 $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ 是等价的，所以存在常数 C，使得

$$\|E_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]}p\|' \leqslant C\|E_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]}p\|,\ i=0,1,\cdots,n-1, \tag{4.90}$$

再由于

$$\|E_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]}p\|^2 = \|E^{A_p}_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]}\,p + P_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]}(G,A_p)E^{A_p}_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]}\,p\|^2$$

$$\leqslant (\|P_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]}(G,A_p)\|+1)^2\|E^{A_p}_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]}\,p\|^2, \tag{4.91}$$

则从 (4.89)—(4.91)，立即又得到

$$\int \lambda dE_\lambda E_{(\alpha,\beta]}p = \lim_{\eta\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i E_{(\alpha_i,\alpha_{i+1}]}p, \tag{4.92}$$

结合 (4.88)，(4.92) 就得到 (4.80)，即 (4.77) 成立。证毕。

4. 谱系的唯一性

定义 4.6 设 $\{E_t\}$ 是在 $(-\infty,\infty)$ 上除去 $\lambda_1,\cdots,\lambda_l$ 外有定义的取值于 Π_K 上投影算子的谱系，如果对某个 λ_i，$\lim\limits_{t\to\lambda_i+0} E_t$ 存在，则称 λ_i 是 $\{E_t\}$ 的可定义点。

显然，对于谱系 $\{E_t\}$ 的某可定义点 λ_i 如果定义 $E_{\lambda_i}=\lim\limits_{t\to\lambda_i+0}E_t$，那末原来 $\{E_t\}$ 就可扩充成在 $(-\infty,\infty)$ 上除去 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},\cdots,\lambda_l$ 外有定义的谱系．以后，谱系在可定义点上都作如此的补充规定．

定理 4.16 设 A 是 Π_K 上自共轭算子 $\sigma(A)\subset(-\infty,\infty)$，$\{E_t\}$ 是在 $(-\infty,\infty)$ 上除 $\lambda_1,\cdots,\lambda_l$ 之外有定义的谱系，那末满足下列条件 (i)，(ii) 的谱系是唯一的。

(i) $AE_t = E_tA$, $t \neq \lambda_1, \cdots, \lambda_l$.

(ii) 对任何 $\Delta = (\alpha, \beta]$ $(\alpha, \beta \neq \lambda_1, \cdots, \lambda_l)$, A在 $E_\Delta\Pi_K$ 上限制 A_Δ 的谱 $\sigma(A_\Delta) \subset \bar{\Delta}$.

证 根据定理 4.8，对给定的自共轭算子 A，存在谱系 $\{E'_{t'} | t' \neq \lambda'_1, \cdots, \lambda'_{l'}\}$，满足 (i), (ii). 因此，只要证明任何满足 (i) 和 (ii) 的 $\{E_t\}$，必有 $\{\lambda'_1, \cdots, \lambda'_{l'}\} = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_l\}$，并且 $E_t = E'_t$ $(t \neq \lambda_1, \cdots, \lambda_l)$.

任取 $\Delta = (\alpha, \beta]$，根据假设 (i), (ii) 和 §2 定理 2.12，A 分别作为 $E_\Delta\Pi_K$, $E'_\Delta\Pi_K$ 上算子都是有界自共轭算子，对任何 $\lambda \in \rho(A)$，由 (i),

$$(\lambda I - A)^{-1}E_t = E_t(\lambda I - A)^{-1},\ t \neq \lambda_1, \cdots, \lambda_l.$$

对上式取围道积分，立即可知，对任何 $\Delta' = (\alpha', \beta']$ $(\alpha', \beta' \neq \lambda'_1, \cdots, \lambda'_{l'})$,

$$E'_{\Delta'}E_t = E_tE'_{\Delta'}, \tag{4.93}$$

从而对任何 $\Delta = (\alpha, \beta]$, $\Delta' = (\alpha', \beta']$, $E'_{\Delta'}E_\Delta = E_\Delta E'_{\Delta'}$.

下面证明当 $[\alpha', \beta'] \cap [\alpha, \beta] = \varnothing$ 时，$E'_{\Delta'}E_\Delta = E_\Delta E'_{\Delta'} = 0$. 事实上，如果 $E'_{\Delta'}E_\Delta\Pi_K$ 不是仅含零的线性子空间，由于A与 $E'_{\Delta'}E_\Delta$ 可交换，所以 $E'_{\Delta'}E_\Delta\Pi_K$ 是A的约化子空间，但

$$E'_{\Delta'}E_\Delta\Pi_K \subset E'_{\Delta'}\Pi_K,\quad E'_{\Delta'}E_\Delta\Pi_K \subset E_\Delta\Pi_K,$$

根据 (ii)，则

$$\sigma(A|_{E'_{\Delta'}E_\Delta\Pi_K}) \subset [\alpha', \beta'],\quad \sigma(A|_{E'_{\Delta'}E_\Delta\Pi_K}) \subset [\alpha, \beta].$$

显然，这与假设 $[\alpha', \beta'] \cap [\alpha, \beta] = \varnothing$ 相冲突，从而 $E'_{\Delta'}E_\Delta = E_\Delta E'_{\Delta'} = 0$.

$E'_{\Delta'}E_\Delta = 0$ 表示，$E'_{\Delta'}\Pi_K \perp E_\Delta\Pi_K$，特别是取 $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \neq \lambda_1, \cdots, \lambda_l, \lambda'_1, \cdots, \lambda'_{l'}$，并令 $\alpha' > \beta$, $\alpha' \to \beta$, $\beta' \to \infty$ 时，立即得到

$$E_\Delta(I - E'_\beta) = E_\Delta \lim_{\substack{\alpha' \to \beta \\ \beta' \to \infty}} E'_{\Delta'} = \lim_{\substack{\alpha' \to \beta \\ \beta' \to \infty}} E_\Delta E'_{\Delta'} = 0. \tag{4.94}$$

类似地可证明对任何自然数 n，记 $\Delta_n = \left(\alpha + \dfrac{\beta - \alpha}{n}, \beta\right)$ 时，有

$$E_{\Delta_n}E'_\alpha = 0,\ n = 1, 2, \cdots;$$

再令 $n \to \infty$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} E_{\Delta_n} = E_\Delta$，所以有

$$E_\Delta E'_\alpha = 0. \tag{4.95}$$

由 (4.94)，(4.95) 可知，$E_\Delta \Pi_K \subset E'_\Delta \Pi_K$，

同样可证，$E_\Delta \Pi_K \supset E'_\Delta \Pi_K$，即 $E_\Delta \Pi_K = E'_\Delta \Pi_K$（等价于 $E_\Delta = E'_\Delta$），对任何 $\Delta = (\alpha, \beta]$ $(\alpha, \beta \neq \lambda_1, \cdots, \lambda_l, \lambda'_1, \cdots, \lambda'_{l'})$ 成立。

利用 $E_\Delta = E'_\Delta$ $(\Delta = (\alpha, \beta],\ \alpha, \beta \neq \lambda_1, \cdots, \lambda_l, \lambda'_1, \cdots, \lambda'_{l'})$ 和 $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} E_\alpha = \lim\limits_{\alpha'\to-\infty} E'_\alpha = 0$，容易证明[1] $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_l\} = \{\lambda'_1, \cdots, \lambda'_l\}$，并且对一切 $t \neq \lambda_1, \cdots, \lambda_l$，$E_t = E'_t$. 证毕.

必须注意，Π_K 上不同的两个自共轭算子 A，A' 的确可以有同一个谱系 $\{E_t\}$，它对 A，A' 都满足定理 4.16 的 (i)，(ii)。

例 4.1 设 $\Pi_K = \{Z + Z^*\} \oplus P$ 是标准分解，$\dim Z = K$，并且不妨认为 $P = L^2[0, 1]$. 作 Π_K 上两个自共轭标子如下：

$$A = \begin{cases} 0, & \text{在 } \{Z + Z^*\} \text{ 上} \\ A_0, & \text{在 } P \text{ 上} \end{cases}$$

$$A' = \begin{cases} A'_0, & \text{在 } \{Z + Z^*\} \text{ 上} \\ A_0, & \text{在 } P \text{ 上} \end{cases}$$

其中 A'_0 是 Π_K 型空间上仅具有单点谱 $\{0\}$ 的非零自共轭标子. 而 A_0: $f(t) \longmapsto tf(t)$，$f(t) \in L^2[0, 1]$. 作

$$E_t\Pi_K = \begin{cases} \{0\}, & t < 0 \\ \{Z + Z^*\}, & t = 0 \\ E_t^{A_0}P \oplus \{Z + Z^*\}, & t \in (0, \infty) \end{cases} \tag{4.96}$$

其中 $E_t^{A_0}$: $f(t') \longmapsto \chi_{(0,t]}(t')f(t')$，$f(t') \in L^2[0, 1]$. 显然，$\{E_t\}$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上的谱系，并且 A，A' 均满足定理 4.16 的条件 (i)，(ii). 但 $A \neq A'$.

定义 4.7 设 A 是 Π_K 上自共轭算子，$\sigma(A) \subset (-\infty, \infty)$，

---

1) 当然，假定谱系 $\{E_t\}$ 在可定义的点上都被补充定义.

$\{E_t\}$ 是 $(-\infty,\infty)$，上谱系，如果 A，$\{E_t\}$ 满足定理 4.16 的条件 (i)，(ii)，那末称 $\{E_t\}$ 是 A 的谱系.

定理 4.17 设 A 是 Π_K 上自共轭算子 $\sigma(A)\subset(-\infty,\infty)$，$\{E_t\}$ 是 A 的谱系，那末 λ_0 为 A 的临界点的充要条件是 $\{E_t\}$ 在 $t=\lambda_0$ 点没有定义，并且 λ_0 是 $\{E_t\}$ 的临界点(即 $\Delta=(t,t']$ 包含 λ_0，并且 $\overline{\lim\limits_{\Delta\to\lambda_0}}\{\|E_\Delta\|\}=\infty$. 见定义 4.3).

证 如果 $\lambda_0\in\sigma_p(A)$，并且 $\Phi_{\lambda_0}(A)$ 是含有零性向量的非退化子空间，那末 $\Phi_{\lambda_0}(A)$ 便是 Π_K 的完备子空间(见 § 2 推论 2.10 以及第一章 § 5 定理 5.4)，令 Π_K 在 $\Phi_{\lambda_0}(A)$ 上的投影为 P_{λ_0}，如果 A 在 $\Phi_{\lambda_0}(A)^\perp$ 的谱系为 $\{E_t^\perp\}$，显然，

$$E_t=\begin{cases}\hat{E}_t^\perp, & t<\lambda_0;\\ \hat{E}_t^\perp+P_{\lambda_0}, & t\geqslant\lambda_0.\end{cases}\quad \hat{E}_t^\perp=\begin{cases}E_t^\perp, & 在\ \Phi_{\lambda_0}(A)^\perp\ 上;\\ 0, & 在\ \Phi_{\lambda_0}(A)\ 上.\end{cases}\tag{4.97}$$

便是 A 的谱系（如果 $\{E_t^\perp\}$ 在 λ_0 点没有定义，那末 E_t 也不作定义).

由于 Π_K 上自共轭算子的具有上述 λ_0 性质的特征值只有有限个，我们就可先将上述 $\Phi_{\lambda_0}(A)$ 从 Π_K 全部扣除，即不妨假设 Π_K 上自共轭算子 A 已没有相应根子空间是非退化的并且含有零性向量的特征值.

设 A 在某个标准分解 $\Pi_K=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$ 之下，$A=\{S,A_N,A_P,F,G,Q\}$. 根据引理 4.6，$\sigma(S)(\supset\sigma(A_N)$ 是 A 的临界点全体. 令 $\sigma(S)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_l\}$，并令 $\{E_t\}$ 是 A 按定理 4.8 所产生的谱系. 显然，$\{E_t\}$ 除去 $t=\lambda_1,\cdots,\lambda_l$ 外的实数 t 均有定义，所以剩下的只要证明每个 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,l)$ 均是 $\{E_t\}$ 的临界点就可以了.

今考察 A 的临界点 λ_c，首先证明 λ_c 不是 $\sigma(A)$ 的孤立点. 事实上，如果 λ_c 是 $\sigma(A)$ 的孤立点，那末由定理 4.8 所产生的谱系 $\{E_t\}$ 易知必满足下列条件：存在 $\eta>0$，E_t 在 $(\lambda_c-\eta,\lambda_c)$，$(\lambda_c,\lambda_c+\eta)$ 上分别为常值（即 $E_t=E_{t'}$，$t,t'\in(\lambda_c-\eta,\lambda_c)$；$E_\tau=E_{\tau'}$，$\tau,\tau'\in(\lambda_c,\lambda_c+\eta)$)，这样，$\lambda_c$ 必是 $\{E_t\}$ 的可定义

点，补充定义后，$(E_{\lambda_c}-E_{\lambda_c-0})\Pi_K$ 成为约化A的子空间，并且A在 $(E_{\lambda_c}-E_{\lambda_c-0})\Pi_K$ 上只有单点谱 $\{\lambda_c\}$.

由于$(E_{\lambda_c}-E_{\lambda_c-0})\Pi_K$是完备子空间，$\Phi_{\lambda_c}(A)\subset(E_{\lambda_c}-E_{\lambda_c-0})\cdot\Pi_K$，所以 $(E_{\lambda_c}-E_{\lambda_c-0})\Pi_K$ 是 Π_K 型空间，并且它的极大负子空间间维数 $K'>0$. 又根据A在 $(E_{\lambda_c}-E_{\lambda_c-0})\Pi_K$ 上只有单点谱 $\{\lambda_c\}$ 的性质，易知(可利用A在 $(E_{\lambda_c}-E_{\lambda_c-0})\Pi_K$ 上的三角模型，并仿§2推论2.10的方法证明) $(E_{\lambda_c}-E_{\lambda_c-0})\Pi_K\subset\Phi_{\lambda_c}(A)$. 另一方面，由于$\lambda_c$是$A$在 $[(E_{\lambda_c}-E_{\lambda_c-0})\Pi_K]^\perp$ 上限制的正则点，所以又有 $\Phi_{\lambda_c}(A)\subset(E_{\lambda_c}-E_{\lambda_c-0})\Pi_K$. 这样，我们便得到：当$\lambda_c$是 $\sigma(A)$ 的孤立点时，$(E_{\lambda_c}-E_{\lambda_c-0})\Pi_K=\Phi_{\lambda_c}(A)$. 显然，这与$\lambda_c$是$A$的临界点假设相矛盾，所以$\lambda_c$不是 $\sigma(A)$ 的孤立点.

由于λ_c不是 $\sigma(A)$ 的孤立点，即λ_c的任何环境中必含 $\sigma(A)$ 中点，从A的三角模型中谱的等式易知，λ_c必是 $(P,(\cdot,\cdot))$ 上自共轭算子A_P的谱 $\sigma(A_P)$ 的极限点.

设 (α,β) 是包含λ_c的区间，今证 $\overline{\lim\limits_{(\alpha,\beta]\to\lambda_c}}\|E_{(\alpha,\beta]}\|=\infty$. 根据(4.52)—(4.56)，从(4.57)易知，$\overline{\lim\limits_{(\alpha,\beta]\to\lambda_c}}\|E_{(\alpha,\beta]}\|=\infty$. 等价于

$$\overline{\lim_{(\alpha,\beta]\to\lambda_c}}\|P_{(\alpha,\beta]}(G,A_P)\|=\infty,\tag{4.98}$$

而(4.98)又等价于

$$\overline{\lim_{(\alpha,\beta]\to\lambda_c}}\|H_{(\alpha,\beta]}(\lambda_c,G,A_P)\|=\infty.\tag{4.99}$$

根据(4.52)，(4.53)，

$$H_{(\alpha,\beta]}(\lambda_c,G,A_P)=\sum_j P_c(\lambda_cI-S)^{j-1}$$

$$\cdot G(\lambda_cI-A_P)^{-j}(I-E^{A_P}_{(\alpha,\beta]}).\tag{4.100}$$

在 $\Phi_{\lambda_i}(S)$ 中取线性基 $z_1^{(i)},\cdots,z_{n_i}^{(i)}$，由于$G$是$(P,(\cdot,\cdot))$到$(Z,\langle\cdot,\cdot\rangle)$的连续线性算子，所以存在 $y_1^{(i)},\cdots,y_{n_i}^{(i)}\in P$，使得

$$Gp=\sum_{i=1}^{l}\sum_{n=1}^{n_i}(p,y_n^{(i)})z_n^{(i)},\quad p\in P.\tag{4.101}$$

(同样的事实在§3例3.2的证明中已用过，见(3.24))，由此可

知，P 到 Z 的算子 $H_{(\alpha,\beta)}(\lambda_c, G, A_P)$ 可表成下列形式：对任何 $p \in P$,

$$H_{(\alpha,\beta)}(\lambda_c, G, A_P)p = \sum_{j=1}^{K} \sum_{n=1}^{n_c} ((I - E^{A_P}_{(\alpha,\beta)})p,$$

$$(\lambda_c I - A_P)^{-j}(I - E^{A_P}_{(\alpha,\beta)})y_n^{(c)})$$

$$\cdot (\lambda_c I - S)^{j-1}_{z_n^{(c)}}. \tag{4.102}$$

为了下面叙述方便，我们不妨假设相应于 λ_c 的算子 S 的 Jordan 块只有一块（多块情况可同样证明）。在这个假设下，可以选取一组基 $z_1^{(c)}, \cdots, z_{n_c}^{(c)}$ 满足下列条件，

$$(\lambda_c I - S)z_1^{(c)} = 0, \ (\lambda_c I - S)z_i^{(c)} = z_{i-1}^{(c)}, \ i = 2, 3, \cdots, n_c. \tag{4.103}$$

这样，(4.102) 就变成为（注意，$(\lambda_c I - S)^{j-1}z_n^{(c)} = 0$, $(j-1 \geqslant n)$）：对任何 $p \in P$,

$$H_{(\alpha,\beta)}(\lambda_c, G, A_P)p = \sum_{n=1}^{n_c} \sum_{j=1}^{K} ((I - E^{A_P}_{(\alpha,\beta)})p,$$

$$(\lambda_c I - A_P)^{-j}(I - E^{A_P}_{(\alpha,\beta)})y_n^{(c)})z_{n-j+1}^{(c)}$$

$$= \sum_{n=1}^{n_c} \sum_{k=1}^{n} ((I - E^{A_P}_{(\alpha,\beta)})p,$$

$$(\lambda_c I - A_P)^{k-n-1}(I - E^{A_P}_{(\alpha,\beta)})y_n^{(c)})z_k^{(c)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n_c} \sum_{n=k}^{n_c} ((I - E^{A_P}_{(\alpha,\beta)})p,$$

$$(\lambda_c I - A_P)^{k-n-1}(I - E^{A_P}_{(\alpha,\beta)})y_n^{(c)})z_k^{(c)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n_c} \sum_{n'=0}^{n_c-k} ((I - E^{A_P}_{(\alpha,\beta)})p,$$

$$(\lambda_c I - A_P)^{-n'-1}(I - E^{A_P}_{(\alpha,\beta)})y_{n'+k}^{(c)})z_k^{(c)}.$$

$z_{n_c}^{(c)}, z_{n_c-1}^{(c)}, \cdots, z_1^{(c)}$ 的系数分别为

$$((I - E^{A_P}_{(\alpha,\beta)})p, (\lambda_c I - A_P)^{-1}(I - E^{A_P}_{(\alpha,\beta)})y_{n_c}^{(c)}),$$

$$((I-E^{A_P}_{(\alpha,\beta]})p,\ (\lambda_e I-A_P)^{-1}[(\lambda_e I-A_P)^{-1}$$
$$\cdot(I-E^{A_P}_{(\alpha,\beta]})y^{(e)}_{n_e}+(I-E^{A_P}_{(\alpha,\beta]})y^{(e)}_{n_e-1}]),\cdots,$$
$$((I-E^{A_P}_{(\alpha,\beta]})p,\ (\lambda_e I-A_P)^{-1}\{(I-E^{A_P}_{(\alpha,\beta]})y^{(e)}_1$$
$$+(\lambda_e I-A_P)^{-1}[(I-E^{A_P}_{(\alpha,\beta]})y^{(e)}_2+\cdots$$
$$+(\lambda_e I-A_P)^{-1}(I-E^{A_P}_{(\alpha,\beta]})y^{(e)}_{n_e}]\cdots\}). \tag{4.104}$$

由此可知，如果下式不分别依次地成立（令 $\breve{E}^{A_P}_{(\alpha,\beta]}=E^{A_P}_{(\alpha,\beta]}-(E^{A_P}_{\lambda_e}-E^{A_P}_{\lambda_e-0})$）

$$\breve{E}^{A_P}_{(\alpha,\beta]}y^{(e)}_{n_e}\in\mathscr{D}((\lambda_e I-A_P)^{-1}),\ \breve{E}^{A_P}_{(\alpha,\beta]}y^{(e)}_{n_e-1}+(\lambda_e I-A_P)^{-1}$$
$$\cdot\breve{E}^{A_P}_{(\alpha,\beta]}y^{(e)}_{n_e}\in\mathscr{D}((\lambda_e I-A_P)^{-1}),\cdots,\breve{E}^{A_P}_{(\alpha,\beta]}y^{(e)}_1$$
$$+(\lambda_e I-A_P)^{-1}\{\breve{E}^{A_P}_{(\alpha,\beta]}y^{(e)}_2+(\lambda_e I-A_P)^{-1}[\cdots$$
$$+(\lambda_e I-A_P)^{-1}\breve{E}^{A_P}_{(\alpha,\beta]}y^{(e)}_{n_e}]\cdots\}\in\mathscr{D}(\lambda_e I-A_P)^{-1}, \tag{4.105}$$

则必将存在 P 中一列向量 $\{p_n\}$，$(p_n,p_n)=1$，$n=1,2,\cdots$，使得 $\{H_{(\alpha,\beta]}(\lambda_e,G,A_P)p_n\}$ 关于 $z^{(e)}_1,\cdots,z^{(e)}_{n_e}$ 的某些系数将趋向无限大，即 (4.99) 成立。

由此可知，要完成定理的证明，只要证明 (4.105) 不能成立即可。

事实上，如果 (4.105) 成立，那末当 $\beta\to\lambda_e$ 或 $\alpha\to\lambda_e$ 时，易知 $H_{(\alpha,\beta]}(\lambda_e,G,A_P)p$ 均将收敛，从而 $H_{(\alpha,\beta]}(\lambda_e,G,A_P)$，$H_{(\alpha,\beta]}\cdot(\lambda_e,G,A_P)^*$ 也均强收敛。根据 (4.52)—(4.57)，易知下列极限存在，且

$$E_{\lambda_e}=\lim_{\beta\to\lambda_e+0}E_t,\quad E_{\lambda_e-0}=\lim_{\alpha\to\lambda_e-0}E_t.$$

因为 $(E_{\lambda_e}-E_{\lambda_e-0})\Pi_K\subset E_{(\alpha,\beta]}\Pi_K$，并且 $(E_{\lambda_e}-E_{\lambda_e-0})\Pi_K$ 约化 A，利用定理 4.8 的 (ii)，立即可知 A 在 $(E_{\lambda_e}-E_{\lambda_e-0})\Pi_K$ 的限制只有单点谱 $\{\lambda_e\}$，从而 $(E_{\lambda_e}-E_{\lambda_e-0})\Pi_K\subset\Phi_{\lambda_e}(A)$。显然，$(I-(E_{\lambda_e}-E_{\lambda_e-0}))\Pi_K$ 中任何非零向量都不在 $\Phi_{\lambda_e}(A)$ 中，所以 $(E_{\lambda_e}-E_{\lambda_e-0})\Pi_K=\Phi_{\lambda_e}(A)$。但 $(E_{\lambda_e}-E_{\lambda_e-0})\Pi_K$ 是非退化

的，这与假设 λ_c 是 A 的临界点相矛盾. 证毕.

§5 临界点的结构和谱映射

本节将建立 Π_K 空间上自共轭算子和酉算子的算子演算和谱映射理论. 显然，它要比 Hilbert 空间上自共轭算子和酉算子的相应的理论复杂多了. 我们要用三角模型来解决这一课题，并且只讨论自共轭算子的情况，而对酉算子，只列出相应的结果.

1. 临界点的结构 为建立算子演算和谱映射，必须研究临界点附近的谱系的性质.

下面将本节中的基本假设和必要的记号作一扼要交待.

设 A 是 Π_K 上自共轭算子，$\sigma(A)\subset(-\infty,\infty)$（通过事先去掉非实谱所相应的根子空间就可做到这一点），在标准分解 $\Pi_K=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$ 之下，$A=\{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$.

在 Z 中取线性基 $z_1,\cdots,z_n$，使得 S 在这个基之下具有 Jordan 标准形式. 由于 G 是 $(P,(\cdot,\cdot))$ 到 $(Z,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的连续线性算子，所以存在唯一的一组向量 $y_1,\cdots,y_n\in P$，使得

$$Gp=\sum_{i=1}^{n}(p,y_i)z_i,\quad p\in P \tag{5.1}$$

设实数 $\lambda_c\in\sigma(S)$，不妨设相应于 λ_c 的 S 的 Jordan 块是前 k_0 块，而各块的阶数分别为 $n_1,\cdots,n_{k_0}$，最高阶 $\max\limits_i(n_1,\cdots,n_{k_0})$ 记为 n_s. 作向量组

$$\begin{aligned}x_i&=\sum_{j=1}^{n_i}(\lambda_c I-A_P)^{n_i-j}y_{i'},\\ i'&=\sum_{k=1}^{i-1}n_k+j,\quad i=1,2,\cdots,k_0.\end{aligned} \tag{5.2}$$

再设 $\{E_t\}$ 是 A 的谱系，则对任何区间 $\Delta=(\alpha,\beta]$，用 E_Δ 或 $E_{(\alpha,\beta]}$ 表示 $E_\beta-E_\alpha$，$E_\Delta^\perp$ 表示 $I-E_\Delta$. 同样，对于 $E_t^{A_N}$，$E_t^{A_P}$ 可引入记号 $E_\Delta^{A(\cdot)}$，$E_{(\alpha,\beta]}^{A(\cdot)}$、$E_\Delta^{A(\cdot)\perp}$，$E_{(\alpha,\beta]}^{A(\cdot)\perp}$ 等. 在标准分解

$\Pi_K = N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$ 之下，当 $\lambda_c\in(\alpha,\beta]$ 时，按 §4 的(4.57)，

$$E_{(\alpha,\beta]} = \{P_c,\ E^{A_N}_{(\alpha,\beta]},\ E^{A_P}_{(\alpha,\beta]},\ P_{(\alpha,\beta]}(F,A_N),\ P_{(\alpha,\beta]}(G,A_P),\ -Q_{(\alpha,\beta]}(F,A_N)+Q_{(\alpha,\beta]}(G,A_P)+Q_l\}. \tag{5.3}$$

因为我们考虑临界点（下面引理 5.1 将证明临界点必是 S 的谱点）近旁的性质，所以不妨假设 A 最多只有一个临界点，即 $\sigma(S)$ 只含有一个点 $\{\lambda_c\}$ 的情况. 这样，由§4的(4.52)—(4.56)，就有

$$\begin{cases} E^{A_N}_{(\alpha,\beta]} = I,\ E^{A_N\perp}_{(\alpha,\beta]} = 0,\ P_c = I, \\ P_{(\alpha,\beta]}(F,A_N) = 0,\ Q_{(\alpha,\beta]}(F,A_N) = 0,\ Q_l = 0, \end{cases} \tag{5.4}$$

$$\begin{cases} P_{(\alpha,\beta]}(G,A_P) = -\sum_{j=1}^{n_c}(\lambda_c I - S)^{j-1}G(\lambda_c I - A_P)^{-j}E^{A_P\perp}_{(\alpha,\beta]}, \\ Q_{(\alpha,\beta]}(G,A_P) = -P_{(\alpha,\beta]}(G,A_P)P_{(\alpha,\beta]}(G,A_P)^*. \end{cases} \tag{5.5}$$

利用向量组 (5.2) 以及谱系 $\{E^{A_P}_t\}$ 作直线上一组 σ 有限的 Borel 测度：

$$\mu^{(i)}(\Delta) = \int_{\Delta-\{\lambda_c\}}\frac{1}{(\lambda_c - t)^{n_i}}\,d(E^{A_P}_t x_i, x_i),\quad i = 1,2,\cdots,k_0. \tag{5.6}$$

设 $\Pi_K = H_-\oplus H_+$ 是正则分解，并且 $H_-\supset N$，$H_+\supset P$. 由这个正则分解产生的内积、范数分别为 $[\cdot,\cdot]$，$\|\cdot\|$. 无特别申明时，向量、算子的范数都是相对于它们的.

引理 5.1 设 A 在标准分解 $\Pi_K = N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$ 之下，$A = \{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$，$\sigma(A)\subset(-\infty,\infty)$，$\lambda_c$ 是 A 的临界点，那末 $\lambda_c\in\sigma(S)$.

证 因为 $\Phi_{\lambda_c}(A)$ 是退化的，所以，λ_c 如果不在 $\sigma(S)$ 中，则必在 $\sigma(A_N)$ 中，今证明这种情况下会发生就可以了.

事实上，因为 $\lambda_c\bar{\in}\sigma(S)$，所以 $\lambda_c\bar{\in}\sigma(S^*)$. 由此易知，$\Phi_{\lambda_c}(A)$ 中向量必是 $n+p+z$ 的形式.

如果 $\lambda_c\bar{\in}\sigma_p(A_P)$，那末 $\Phi_{\lambda_c}(A)$ 中向量 $n+p+z$ 的 p 显然必是零. 因为 $\lambda_c\bar{\in}\sigma(S)$，所以 $\Phi_{\lambda_c}(A)$ 中向量必是形如 $n+z_n$. 当 $n=0$ 时，$z_n=0$. 这样，$\Phi_{\lambda_c}(A)$ 就是负的子空间，这与 λ_c 是临界点的假设相冲突.

如果 $\lambda_e \in \sigma_p(A_P)$，那末 $\Phi_{\lambda_e}(A)$ 中向量 $n+p+z$ 必满足 $n \in \mathcal{N}(A_N - \lambda_e I)$，$p \in \mathcal{N}(A_P - \lambda_e I)$. 由于 $n+p+z=[n-(S-\lambda_e I)^{-1}Fn]+[p-(S-\lambda_e I)^{-1}Gp]+z+(S-\lambda_e I)^{-1}(Fn+Gp)$，而 $(A-\lambda_e I)[n-(S-\lambda_e I)^{-1}Fn]=0$，$(A-\lambda_e I)[p-(S-\lambda_e I)^{-1}Gp]=0$，所以 $\Phi_{\lambda_e}(A)$ 中向量 $n+p+z$ 必满足 $z+(S-\lambda_e I)^{-1}(Fn+Gp)=0$，即 $n+p+z$ 总能表示成 $\mathcal{N}(A-\lambda_e I)$ 的两个向量的和. 显然，

$$\Phi_N=\{n-(S-\lambda_e I)^{-1}Fn \mid n \in \mathcal{N}(A_N-\lambda_e I)\},$$
$$\Phi_p=\{p-(S-\lambda_e I)^{-1}Gp \mid p \in \mathcal{N}(A_P-\lambda_e I)\}$$

是 Π_K 的两个完备子空间，从而 $\Phi_{\lambda_e}(A)=\Phi_N \oplus \Phi_P$ 也是完备子空间，这与 $\Phi_{\lambda_e}(A)$ 的退化性假设相矛盾.

从而，$\lambda_e \bar{\in} \sigma_p(A_P)$，$\lambda_e \in \sigma_p(A_P)$ 都不可能，则只有 λ_e 是在 $\sigma(S)$ 中. 证毕.

定理 5.2 设 A 是 Π_K 上自共轭算子，$\sigma(A) \subset (-\infty, \infty)$. 在标准分解 $\Pi_K=N \oplus \{Z+Z^*\} \oplus P$ 之下，$A=\{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$，$\lambda_e \in \sigma(S)$. 又设 $\{E_t\}$ 是 A 的谱系 $\Delta_1=(\alpha_1, \beta_1]$，$\Delta=(\alpha, \beta]$，并且 $\lambda_e \in (\alpha, \beta) \cap (\alpha_1, \beta_1)$，那末下列六个命题是等价的.

(i) $\sup\limits_{\Delta}\{\|E_\Delta\| \mid \Delta \subset \Delta_1\} < \infty$.

(ii) $\mu^{(1)}, \cdots, \mu^{(k_0)}$ 都是全有限的测度.

(iii) (强) $\lim\limits_{\alpha \to \lambda_e} E_\Delta$ 存在，(强) $\lim\limits_{\beta \to \lambda_e} E_\Delta$ 存在.

(iv) $\Phi_{\lambda_e}(A)$ 是非退化的.

(v) (弱) $\lim\limits_{\alpha \to \lambda_e} E_\Delta$ 存在，(弱) $\lim\limits_{\beta \to \lambda_e} E_\Delta$ 存在.

(vi) $\sup\limits_{\Delta} |(E_\Delta x, y)| < \infty$，$x, y \in \Pi_K$.

上述命题有一个成立时，必有

$$\lim_{\Delta \to \lambda_e} E_\Delta \Pi_K = \Phi_{\lambda_0}(A). \tag{5.7}$$

证 显然 $E_{\Delta_1} E_\Delta = E_\Delta$，$E_\Delta \Pi_K$ 是完备子空间. 因此，不失一般性，不妨设 $\sigma(S)=\{\lambda_e\}$，A 是有界算子，而且 A_N 在 (α, β)

中除可能有谱点 λ_e 外不再有其它的谱(否则,适当取 Δ_1,在 $E_{\Delta_1}H_K$ 上考察 A 就可以了)。这样,$E_\Delta^{A_N}=I$,$E_\Delta^{A_N\perp}=0$。由(5.3)—(5.5)得到,

$$E_\Delta=\{I, I, E_\Delta^{A_P}, 0, -\sum_{j=1}^{n_e}(\lambda_e I-S)^{j-1}\cdot G(\lambda_e I-A_P)^{-j}E_\Delta^{A_P\perp},$$

$$-\sum_{j,k=1}^{n_e}(\lambda_e I-S)^{j-1}G(\lambda_e I-A_P)^{-(j+k)}\cdot E_\Delta^{A_P\perp}G^*(\lambda_e I-S^*)^{k-1}\}. \tag{5.8}$$

证 (i)$\Longleftrightarrow$(ii)[1] 对任何 $p\in P$,

$$-P_\Delta(G, A_P)^{2)}p=\sum_{j=1}^{n_e}\sum_{j=1}^{n_e}(p, (\lambda_e I-A_P)^{-j}y_j)(\lambda_e I-S)^{j-1}z_j,$$

选取 $z_1, \cdots, z_{n_e}$ 如 §4 定理 4.17 的 $z_1^{(e)}, \cdots, z_{n_e}^{(e)}$,它们满足(4.103)条件. 由此可知

$$-P_\Delta(G, A_P)p=\sum_{i=1}^{n_e}\left(p, \sum_{j=1}^{n_e-i+1}(\lambda_e I-A_P)^{-j}\cdot E_\Delta^{A_P\perp}y_{j+i+1}\right)z_i^{(e)}, \quad p\in P. \tag{5.9}$$

因为 $Q_\Delta(G, A_P)^{2)}=-P_\Delta(G, A_P)P_\Delta(G, A_P)^*$,所以从(5.8)式可知 $\sup\limits_\Delta\{\|E_\Delta\| \mid \Delta\subset\Delta_1\}<\infty$ 等价于 $\sup\limits_\Delta\{\|P_\Delta(G, A_P)\| \mid \Delta\subset\Delta_1\}<\infty$;由(5.9)式,又等价于

$$\max_i\sup_\Delta\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n_e-i+1}(\lambda_e I-A_P)^{-j}E_\Delta^{A_P\perp}y_{i+j-1}\right\| \,\Big|\, \Delta\subset\Delta_1\right\}<\infty. \tag{5.10}$$

下面证明(5.10)实际上等价于

$$\sup_\Delta\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n_e}(\lambda_e I-A_P)^{-j}E_\Delta^{A_P\perp}y_j\right\| \,\Big|\, \Delta\subset\Delta_1\right\}<\infty. \tag{5.11}$$

事实上(5.11)是(5.10)的特例. 所以,只要证明由(5.11)

1) $\Longleftrightarrow$ 表示等价.

2) $P_\Delta(G, A_P)$, $Q_\Delta(G, A_P)$ 分别表示 $P_{(\alpha,\beta)}(G, A_P)$, $Q_{(\alpha,\beta)}(G, A_P)$.

可以推出 (5.10) 即可. 利用恒等式

$$\sum_{j=1}^{n_c-i}(\lambda_c I-A_P)^{-j}E_{\Delta}^{A_P\perp}y_{i+1}=(\lambda_c I-A_P)$$

$$\cdot\sum_{j=1}^{n_c}(\lambda_c I-A_P)^{-j}E_{\Delta}^{A_P\perp}y_j-E_{\Delta}^{A_P\perp}y_1,$$

由 (5.11) 立即可知 $\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n_c-1}(\lambda_c I-A_P)^{-j}E_{\Delta}^{A_P\perp}y_j\right\|\ \Delta\subset\Delta_1\right\}$是有界的，依次递推就知道 (5.10) 成立.

但是，(5.11) 等价于

$$\sup_{\Delta}\left\{\int_{\Delta^C}d\mu_t\,|\,\Delta^C=(-\infty,\infty)-\Delta,\ \Delta\subset\Delta_1\right\}<\infty, \quad (5.12)$$

这里

$$d\mu_t=\frac{d(E_t^{A_P}x,x)}{(\lambda_c-t)^{2n_c}},\quad x=\sum_{j=1}^{n_c}(\lambda_c I-A)^{n_c-j}y_j.$$

所以，(i)$\Longleftrightarrow$(ii).

再证 (ii) $\Rightarrow$ (iii) 由 (5.3), (5.5) 以及 (5.8) 可知，只要证明强极限 $\lim\limits_{\Delta\to\lambda_c}P_{\Delta}(G,A_P)$ 存在就可以了. 因此，记

$$a_{\Delta}^{(i)}=\sum_{j=1}^{n_c-i+1}(\lambda_c I-A_P)^{-j}E_{\Delta}^{A_P\perp}y_{i+j-1},\ i=1,2,\cdots,n_c.$$

由 (5.9) 可知，(强) $\lim\limits_{\Delta\to\lambda_c}P_{\Delta}(G,A_P)$ 存在等价于(强) $\lim\limits_{\Delta\to\lambda_c}a_{\Delta}^{(i)}(i=1,2,\cdots,n_c)$ 存在. 由于

$$\|a_{\Delta}^{(i)}\|^2-\|a_{\Delta_1}^{(i)}\|^2=\left\|\sum_{j=1}^{n_c-i+1}(\lambda_c I-A_P)^{-j}E_{\Delta}^{A_P\perp}y_{i+j-1}\right\|^2$$

$$-\left\|\sum_{j=1}^{n_c-i+1}(\lambda_c I-A_P)^{-j}E_{\Delta_1}^{A_P\perp}y_{i+j-1}\right\|^2$$

$$=\left\|\sum_{j=1}^{n_c-i+1}(\lambda_c I-A_P)^{-j}(E_{\Delta}^{A_P\perp}-E_{\Delta_1}^{A_P\perp})y_{i+j-1}\right\|^2$$

$$=\|a_{\Delta}^{(i)}-a_{\Delta_1}^{(i)}\|^2, \quad (5.13)$$

即 $\{\|a_{\Delta}^{(i)}\|^2\}$ 随Δ的缩小而单调增加. 根据 (ii), (5.10) 成立，即 $\max\limits_i\sup\limits_{\Delta}\{\|a_{\Delta}^{(i)}\|^2\,|\,\Delta\subset\Delta_1\}<\infty$. 利用这个事实，立即知道 $\lim\limits_{\Delta\to\lambda_c}\|a_{\Delta}^{(i)}\|$

存在．再利用 (5.13)，就得到 $\lim\limits_{\Delta\to\lambda_c} a_\Delta^{(i)}$ 存在，从而 $\lim\limits_{\Delta\to\lambda_c} E_\Delta$ 存在．

反之，由共鸣定理立即从 (iii) 推出 (i)．

现在证 (iv) $\Rightarrow$ (i)　由于 $\Phi_{\lambda_c}(A)$ 是非退化的，并且约化 A，再根据§4 定理 4.16（谱系的唯一性）A 的谱系

$$E_t = E_t^{(1)} + E_t^{(2)},\quad t \neq \lambda_c, \tag{5.14}$$

其中 $E_t^{(1)} = 0$，$t < \lambda_c$；$E_t^{(1)} = E_{\lambda_c}^{(1)}$，$t > \lambda_c$（$E_{\lambda_c}^{(1)}$ 是 Π_K 在 $\Phi_{\lambda_c}(A)$ 上投影算子），而 $E_t^{(2)}$ 是 $A|_{\Phi_{\lambda_c}(A)^\perp}$ 的谱系（在 $\Phi_{\lambda_c}(A)$ 上补充定义作零），又由于 A_N 除了可能的谱点 λ_c 外没有其它谱，易知 $\Phi_{\lambda_c}(A)^\perp$ 是正的，即 $(\Phi_{\lambda_c}(A)^\perp, (\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间．

令 $\Phi_{\lambda_c}(A) = H'_-\oplus H'_+$ 是正则分解，从而 $\Pi_K = H'_-\oplus(H'_+\oplus\Phi_{\lambda_c}(A))$ 也是正则分解．由这个分解产生的内积和范数分别为 $[\cdot,\cdot]_1$，$\|\cdot\|_1$．从 (5.14) 可知，只要证明

$$\sup_\Delta\{\|E_\Delta^{(2)}\|_1 \mid \Delta\subset\Delta_1\} < \infty$$

就能得到 $\sup\limits_\Delta\{\|E_\Delta\|_1 \mid \Delta\subset\Delta_1\} < \infty$，从而 (i) 成立．注意到$\{E_t^{(2)}\}$ 是 Hilbert 空间 $(\Phi_{\lambda_c}(A), (\cdot,\cdot))$ 上投影算子，根据范数 $\|\cdot\|_1$的取法，立即有 $\|E_\Delta^2\|_1 \leqslant 1$．这样就得到 (i)．

显然，当 $\lim\limits_{\Delta\to\lambda_c} E_\Delta$ 存在时，$\Phi_{\lambda_c}(A)$ 必是非退化的．这就是说，由 (iii) 可以得到 (iv)，从而 (iv) 与 (i) 也等价．

(vi) $\Longleftrightarrow$ (i) 是显然的．

根据§4 定理 4.4，(v) $\Longleftrightarrow$ (iii) 等价也是显然的．

当 (i)—(vi) 命题有一个成立，必然 (iii) 成立．在 (iii) 成立时，不难证明 (5.7) 成立（证明可参见§4 定理 4.17 的证明中的最后部分）．证毕．

由定理 5.2 就得到 Π_K 上自共轭算子临界点的等价条件．

定理 5.3　设 A 是 Π_K 上自共轭算子，$\sigma(A)\subset(-\infty,\infty)$．在标准分解 $\Pi_K = N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$ 之下 $A = \{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$．又设 $\{E_t\}$ 是 A 的谱系，$\Delta_1 = (\alpha_1, \beta_1]$，$\Delta = (\alpha,\beta]$，且并 $\lambda_c \in (\alpha,\beta)\cap(\alpha_1,\beta_1)$，那末下列诸命题等价．

(i) λ_c 是 A 的临界点。

(ii) $\sup\limits_{\Delta}\{\|E_\Delta\| \mid \Delta\subset\Delta_1\}=\infty$。

(iii) 存在 $x, y\in\Pi_K$, $\sup\limits_{\Delta}\{|(E_\Delta x, y)| \mid \Delta\subset\Delta_1\}=\infty$。

(iv) (强) $\lim\limits_{\Delta\to\lambda_c}E_\Delta$ 不存在。

(v) (弱) $\lim\limits_{\Delta\to\lambda_c}E_\Delta$ 不存在。

(vi) $\mu^{(1)}, \cdots, \mu^{(k_0)}$ 至少有一个不是全有限的测度。

当 λ_c 是 A 的临界点时，如果相应于 λ_c 的根向量最高阶是 n_c，那末对任何不含其它临界点的 $\Delta=(\alpha, \beta]$，下列极限存在：

$$(\text{强})\ \lim_{\varepsilon\to0+}\int_{(\alpha,\lambda_c-\varepsilon]}(t-\lambda_c)^{2n_c}dE_t,\ (\text{强})\ \lim_{\varepsilon\to0+}\int_{(\lambda_c+\varepsilon,\beta]}(t-\lambda_c)^{2n_c}dE_t \tag{5.15}$$

证 (i)—(vi) 的等价性是显然的，所以只要证明 (5.15) 即可。

不妨设 A 只有一个临界点，S 是单块，并且 $[\alpha, \beta]$ 中也不含除 λ_c 外 A_N 的谱点。又设 $A_P=\int t dE_t^{A_P}$ 是谱分解。

对于某个区间 Δ，当 $\lambda_c\bar{\in}\Delta$ 时，有(见 § 4 的 (4.58), (4.53), (4.54))

$$E_\Delta=\Big\{0, 0, E_\Delta^{A_P}, 0, \sum_{j=1}^{n_c}(\lambda_cI-S)^{j-1}G(\lambda_cI-A_P)^{-j}E_\Delta^{A_P},$$
$$\sum_{j,k=1}^{n_c}(\lambda_cI-S)^{j-1}G(\lambda_cI-A_P)^{-(j+k)}$$
$$\cdot E_\Delta^{A_P}G^*(\lambda_cI-S^*)^{k-1}\Big\}. \tag{5.16}$$

因为下列极限存在

$$\begin{cases}(\text{强})\ \lim\limits_{\varepsilon\to0+}\int_{(\alpha,\lambda_c-\varepsilon]}(t-\lambda_c)^{2n_c}(\lambda_cI-A_P)^{-i}dE_t^{A_P}\\(\text{强})\ \lim\limits_{\varepsilon\to0+}\int_{(\lambda_c+\varepsilon,\beta]}(t-\lambda_c)^{2n_c}(\lambda_cI-A_P^{-i}dE_t^{A_P}\end{cases}\quad 1\leqslant i\leqslant2n_c, \tag{5.17}$$

所以 (5.15) 成立。证毕。

由此我们引入如下定义。

定义 5.1 设 A 是 Π_K 空间上自共轭算子，$\sigma(A)\subset(-\infty,\infty)$，$\lambda_c$ 是 A 的临界点，相应于 λ_c 的根向量最高阶数为 n_c。规定

$$\int_{(\alpha,\beta]}(t-\lambda_c)^{2n_c}dE_t=\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to0^+}\left(\int_{(\alpha,\lambda_c-\varepsilon_1]}+\int_{(\lambda_c+\varepsilon_2,\beta]}\right)(t-\lambda_c)^{2n_c}dE_t,\tag{5.18}$$

其中 (α,β) 仅只含 A 的一个临界点 λ_c。而对任何自然数 h，规定

$$\int_{(\alpha,\beta]}(t-\lambda_c)^{2n_c+h}dE_t=\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to0^+}\left(\int_{(\alpha,\lambda_c-\varepsilon_1]}+\int_{(\lambda_c+\varepsilon_2,\beta]}\right)(t-\lambda_c)^{2n_c+h}dE_t$$[1]。

同样，对于连续函数 $f(t)$，只要它是以 λ_c 为 $2n_c$ 阶零点，那末就可定义

$$\int_{(\alpha,\beta]}f(t)dE_t=\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to0^+}\left(\int_{(\alpha,\lambda_c-\varepsilon_1]}+\int_{(\lambda_c+\varepsilon_2,\beta]}\right)f(t)dE_t.\tag{5.19}$$

对于 A 有多个临界点情况，不难用分段定义的方式，引入一般形式的积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dE_t.$$

对于积分 (5.19) 的推广，以及更一般的算子演算和谱映射讨论将放在第三小节进行。

2. 预解式的谱表示 利用 Π_K 上自共轭算子的谱系 (5.3)，可将预解式明确地表示出来。

定义 5.2 设 A 是 Π_K 上自共轭算子，$\lambda_0\in\sigma_p(A)$。如果相应于 λ_0 的根子空间 $\Phi_{\lambda_0}(A)$ 中含有零性向量，那末称 λ_0 是 A 的广义临界点。A 的广义临界点全体记为 $C(A)$。

引理 5.3 设 A 是 Π_K 上自共轭算子。下列命题成立。

(i) A 的临界点必是广义临界点。

---

1) 由于 (5.15) 成立，易知这里强极限（其实按算子范数极限）存在；当然也可利用（Riemann 和的）（强）$\lim\limits_{|\Delta_\nu|\to0}\sum\limits_{\nu}(t_\nu-\lambda_c)^{2n_c+h}E(\Delta_\nu)$ 存在性直接定义。两者是一致的。

(ii) 如果 $\lambda\in\sigma(A)$，并且 $I_m\lambda\neq 0$，那末 λ，$\bar{\lambda}$ 均是 A 的广义临界点。

(iii) 如果 $\lambda_0\in C(A)\cap(-\infty,\infty)$，但 λ_0 不是 A 的临界点，那末 $\Phi_{\lambda_0}(A)$ 是非退化的

本引理是显然的

定义 5.3 设 A 是 Π_K 上自共轭算子 $C(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_l;\lambda_{l+1},\bar{\lambda}_{l+1},\cdots,\lambda_{l+l_0},\bar{\lambda}_{l+l_0}\}$ $(I_m\lambda_i=0,1\leqslant i\leqslant l;I_m\lambda_i\neq 0,l+1\leqslant i\leqslant l+l_0)$。$\{E_t\}$ 是 A 在约化子空间 $[(\Phi_{\lambda_{l+1}}(A)+\Phi_{\bar{\lambda}_{l+1}}(A))\oplus\cdots\oplus(\Phi_{\lambda_{l+l_0}}(A)+\Phi_{\bar{\lambda}_{l+l_0}}(A))]^\perp$ 的限制的谱系，则称

$$\check{E}_t=\begin{cases}E_t,\ 在\left[\bigoplus\limits_{i=1}^{l}(\Phi_{\lambda_{l+i}}(A)+\Phi_{\bar{\lambda}_{l+i}}(A))\right]^\perp 上;\\ 0,\ 在\ \bigoplus\limits_{i=1}^{l_0}(\Phi_{\lambda_{l+i}}(A)+\Phi_{\bar{\lambda}_{l+i}}(A)),\ 上.\end{cases}$$

为 A 的谱系。

根据§4 定理 4.16，A 的谱系 $\{\check{E}_t\}$ 是唯一满足定理 4.16 条件 (i)，(ii) 的谱系。今后如无特别申明，仍将 $\{\check{E}_t\}$ 写成 $\{E_t\}$。注意，对于 $\lambda_0\in C(A)\cap(-\infty,\infty)$，但 λ_0 不是 A 的临界点，

$$E_{\lambda_0}=\lim_{\lambda\to\lambda_0+0}E_\lambda,\quad E_{\lambda_0-0}=\lim_{\lambda\to\lambda_0-0}E_\lambda \tag{5.20}$$

是存在的(见定理 5.2)，自然，λ_0 必是谱系的可定义点。

定理 5.4 设 A 是 Π_K 上自共轭算子，在标准分解 $\Pi_K=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$ 之下，$A=\{S,A_N,A_P,F,G,Q\}$，$C(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_l,\lambda_{l+1},\bar{\lambda}_{l+1},\cdots,\lambda_{l+l_0},\bar{\lambda}_{l+l_0}\}$ $(I_m\lambda_i=0,\ 1\leqslant i\leqslant l;I_m\lambda_i\neq 0,\ l+1\leqslant i\leqslant l+l_0)$，相应于 λ_i 的根向量的最高阶数为 n_i。又设 $\{E_t\}$ 是 A 的谱系，那末当 $\lambda\in\rho(A)$ 时，

$$(\lambda I-A)^{-1}=\int_{-\infty}^{\infty}K(\lambda,t)dE_t+\sum_{\nu=1}^{l}\sum_{i=1}^{2n_\nu+1}\frac{B_{\nu i}}{(\lambda-\lambda_\nu)^i}$$

$$+\sum_{\nu=l+1}^{l+l_0}\sum_{i=1}^{n_\nu}\left(\frac{B_{\nu i}}{(\lambda-\lambda_\nu)^i}+\frac{B_{\nu i}^\dagger}{(\lambda-\bar{\lambda}_\nu)^i}\right), \tag{5.21}$$

这里

$$K(\lambda, t) = \frac{1}{\lambda - t} - \sum_{\nu=1}^{l} \delta(t - \lambda_\nu) \sum_{i=1}^{n_\nu} \frac{(t - \lambda_\nu)^{i-1}}{(\lambda - \lambda_\nu)^i},$$

$$\delta(\lambda) = \begin{cases} 1, & |\lambda| < \delta \\ 0, & |\lambda| \geqslant \delta \end{cases}$$

而 δ 是满足 $0 < \delta < \min\limits_{\substack{1 \leqslant \mu, \nu \leqslant l \\ \lambda_\mu \neq \lambda_\nu}} |\lambda_\mu - \lambda_\nu|$。又当 $1 \leqslant i \leqslant l$ 时，$B_{\nu i}$ 是 Π_K 上有界自共轭算子；当 $l+1 \leqslant i \leqslant l+l_0$ 时，$B_{\nu i} = (\lambda_\nu I - S)^{i-1} P_{\lambda_\nu}$，$P_{\lambda_\nu}$ 是 Z 按分解 $Z = \Phi_{\lambda_1}(S) \dotplus \cdots \dotplus \Phi_{\lambda_l}(S) \dotplus (\Phi_{\lambda_{l+1}}(S) \dotplus \Phi_{\bar\lambda_{l+1}}(S)) \dotplus \cdots \dotplus (\Phi_{\lambda_{l+l_0}}(S) \dotplus \Phi_{\bar\lambda_{l+l_0}}(S))$ 在 $\Phi_{\lambda_\nu}(S)$ 上的平行投影。

证　我们将分五步来证明，不失一般性，假定 $C(A) = \sigma(S)$。

(1) 对于 $l + 1 \leqslant \nu \leqslant l + l_0$，显然，$\Pi^{(\nu)} = \Phi_{\lambda_\nu}(A) + \Phi_{\bar\lambda_\nu}(A)$ 是非退化的有限维空间，并且约化 A。令 Π_K 在 $\Pi^{(\nu)}$ 上的投影是 $P_{\Pi^{(\nu)}}$，易知

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)^{-1} P_{\Pi^{(\nu)}} &= [(\lambda I - S)^{-1} P_{\lambda_\nu} + (\lambda I - S^*)^{-1} P_{\bar\lambda_\nu}] \cdot P_{\Pi^{(\nu)}} \\ &= \Big[\sum_{i=1}^{n_\nu} \frac{(S - \lambda_\nu I)^{i-1}}{(\lambda - \lambda_\nu)^i} P_{\lambda_\nu} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n_\nu} \frac{(S^* - \bar\lambda_\nu I)^{i-1}}{(\lambda - \bar\lambda_\nu)^i} P_{\bar\lambda_\nu}\Big] P_{\Pi^{(\nu)}}.\end{aligned}$$

再注意到 $\Phi_{\lambda_\nu}(A)$，$\Phi_{\bar\lambda_\nu}(A)$ $(l + 1 \leqslant \nu \leqslant l + l_0)$ 都是零性子空间，并且 $P^*_{\lambda_\nu} = P_{\bar\lambda_\nu}$，因此，如令 $(S - \lambda_\nu I)^{i-1} P_{\lambda_\nu} = B_{\nu i}$，那末

$$B_{\nu i}^+ = (S^* - \bar\lambda_\nu I)^{i-1} P_{\bar\lambda_\nu}, \quad l + 1 \leqslant \nu \leqslant l + l_0,$$
$$i = 1, 2, \cdots, n_\nu.$$

这样我们就得到 (5.21) 右边最后的一项。

下面不妨认为 $\sigma(A) \subset (-\infty, \infty)$。

(2) 取 $\Delta_0 = (-M, M)$，使得 $(-M, M) \supset \{\lambda_1, \cdots, \lambda_l\}$。作分解：$\Pi_K = E_{\Delta_0}\Pi_K \oplus (E_{\Delta_0}\Pi_K)^\perp$。显然 $A|_{(E_{\Delta_0}\Pi_K)^\perp}$ 是 Hilbert 空间 $((E_{\Delta_0}\Pi_K)^\perp, (\cdot, \cdot))$ 上自共轭算子。由于 $E_{\Delta_0}\Pi_K$ 约化 A，

所以 $\rho(A)\subset\rho(A|_{(E_{\Delta_0}\Pi_K)^\perp})$，并且

$$(\lambda I - A)^{-1}|_{(E_{\Delta_0}\Pi_K)^\perp} = \int_{(-\infty,\infty)-\Delta_0}\frac{1}{\lambda - t}dE_t|_{(E_{\Delta_0}\Pi_K)^\perp},\quad \lambda\in\rho(A)$$

即

$$(\lambda I - A)^{-1}(I - E_{\Delta_0}) = \int_{(-\infty,\infty)-\Delta_0}\frac{1}{\lambda - t}dE_t,\ \ \lambda\in\rho(A).\tag{5.22}$$

因此，只要在 $E_\Delta\Pi_K$ 上证明定理即可。

由于 $A|_{E_{\Delta_0}\Pi_K}\subset[-M, M]$，所以 A 在 $E_{\Delta_0}\Pi_K$ 上是有界自共轭算子。同样，可将 $(-M, M]$ 进一步剖分成有限个区间的和，使其中每个最多仅含一个广义临界点。所以，下面不妨认为 A 是有界自共轭算子，并且仅有一个广义临界点 λ_0。又为叙述简单起见，假设 S 相应于 λ_0 只有一个 Jordan 块，相应根向量最高阶数为 n。

(3) 令

$$K(\lambda, t) = \frac{1}{\lambda - t} - \sum_{i=1}^{2n}\frac{(t-\lambda_0)^{i-1}}{(\lambda - \lambda_0)^i},$$

并定义复平面上算子值函数 $f(\lambda)$：对任何 λ，$Re\lambda \neq \lambda_0$，规定

$$f(\lambda) = \int_{\Delta_\lambda}\sum_{i=1}^{2n}\frac{(t-\lambda_0)^{i-1}}{(\lambda-\lambda_0)^i}dE_t + (\lambda I - A)^{-1}E_{\Delta_\lambda^c}$$
$$-\int_{\Delta_\lambda^c}K(\lambda, t)dE_t,\tag{5.23}$$

其中 Δ_λ 是随 λ 给定后所取的区间 $(\mu, \nu]$，满足 $Re\lambda\in\Delta_\lambda$，但 $\lambda_0\bar{\in}\Delta_\lambda$，而 $\Delta_\lambda^c = (-\infty, \infty)-\Delta_\lambda$，$E_{\Delta_\lambda^c} = I - E_{\Delta_\lambda}$。显然，(5.23) 对每个满足 $Re\lambda \neq \lambda_0$ 的 λ 都有意义。

现在说明 $f(\lambda)$ 的值并不依赖于 Δ_λ 的选取。事实上，如果有 $\Delta_\lambda^{(1)}$ 和 $\Delta_\lambda^{(2)}$，并且 $\Delta_\lambda^{(1)}\supset\Delta_\lambda^{(2)}$，那末对 $\Delta_\lambda^{(i)}$ $(i = 1, 2)$，按 (5.23) 有相应的 $f_i(\lambda)$。只要经简单的计算，即得

$$f_2(\lambda) - f_1(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}(E_{\Delta_\lambda^{(1)}} - E_{\Delta_\lambda^{(2)}})$$
$$-\int_{\Delta_\lambda^{(1)}-\Delta_\lambda^{(2)}}\frac{1}{\lambda - t}dE_t = 0.$$

上式最后等号成立是由于 $((E_{\Delta_\lambda^{(1)}} - E_{\Delta_\lambda^{(2)}})\Pi_K, (\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间，A 在这个空间上是自共轭算子，并且 λ 是 $A|_{(E_{\Delta_\lambda^{(1)}}-E_{\Delta_\lambda^{(2)}})\Pi_K}$ 的正则点，而 $\{E_t(E_{\Delta_\lambda^{(1)}} - E_{\Delta_\lambda^{(2)}})\}$ 是 $A|_{(E_{\Delta_\lambda^{(1)}}-E_{\Delta_\lambda^{(2)}})\Pi_K}$ 的谱系的缘故.

再说明 $f(\lambda)$ 是解析的. 事实上，对任何 λ_1，$Re\lambda_1 \neq \lambda_0$. 显然，必可找到 λ_1 的邻域 U 以及区间 Δ_{λ_1}，使得 U 中的一切 λ'，都可以做到取 $\Delta_{\lambda'} = \Delta_{\lambda_1}$，也就是说，对于 U 中的任何 λ'，值 $f(\lambda')$ 可以用同一个 Δ_{λ_1} 来定义. 从(5.23)可知，当取定 $\Delta_\lambda = \Delta_{\lambda_1}$ 时，$f(\lambda)$ 是 U 上解析函数. 从而 $f(\lambda)$ 在除去直线 $Re\lambda = \lambda_0$ 外的点上都解析.

证明 $f(\lambda)$ 可以解析延拓成全平面除点 λ_0 外的解析函数 $F(\lambda)$. 事实上，取 $\lambda \in \rho(A) \cap (-\infty, \infty)$，并且取 $\Delta_\lambda \in \rho(A)$，这样由 (5.23) 就得到

$$f(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1} - \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda, t)dE_t, \qquad (5.24)$$

然而，因 (5.24) 式右边函数在除实轴外的点(其实是除 $\sigma(A)$ 外的点)都解析，则下面的函数 $F(\lambda)$ 除 λ_0 外也都解析，

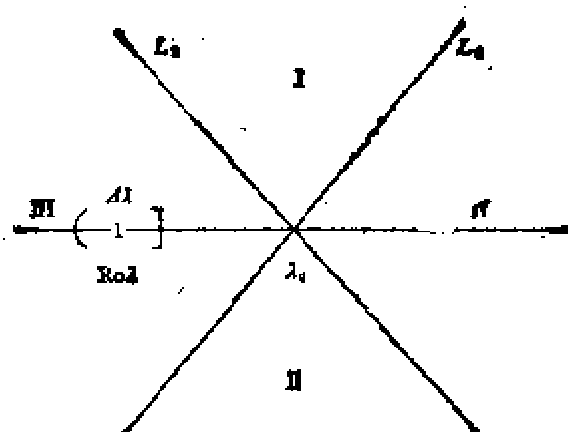
$$F(\lambda) = \begin{cases} (\lambda I - A)^{-1} - \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda, t)dE_t, & \lambda \in \rho(A) \\ f(\lambda), & \lambda \in \sigma(A) - \{\lambda_0\} \end{cases} \qquad (5.25)$$

显然，$\lim\limits_{\lambda \to \infty} F(\lambda) = 0$.

(4) 现在来确定点 λ_0 处 $F(\lambda)$ 的奇性的阶数. 过 λ_0 作两直线 L_1 和 L_2，将全平面分为 I—IV 四个部分. 设 L_1，L_2 的斜率分别是 1，-1.

(a) $\lambda \in \mathrm{I} \cup \mathrm{II}$ 的情况

为了估计 $\left\| \int K(\lambda, t)dE_t \right\| \left(= \left\| \int (\lambda - \lambda_0)^{-2n}(\lambda - t)^{-1}(t - \lambda_0)^{2n}dE_t \right\| \right)$，由此积分的定义，即当 $I_m\lambda \neq 0$ 时，



$$\int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda, t) dE_t = \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0+} \left(\int_{(-\infty, \lambda_0 - \varepsilon_1]} + \int_{(\lambda_0 + \varepsilon_2, \infty]} \right) K(\lambda, t) dE_t, \tag{5.26}$$

以及当 $\lambda_0 \bar{\in} \Delta$ 时，

$$E_\Delta = \Big\{ 0, 0, E_\Delta^{A_P}, 0, \sum_{j=1}^{n} (\lambda_0 I - S)^{j-1} G (\lambda_0 I - A_P)^{-j} E_\Delta^{A_P},$$
$$\sum_{j,k=1}^{n} (\lambda_0 I - S)^{j-1} G (\lambda_0 I - A_P)^{-(j+k)} E_\Delta^{A_P} G^* (\lambda_0 I - S^*)^{k-1} \Big\}, \tag{5.27}$$

再利用 $(\lambda_0 I - A_P)^{-j}$ $(1 \leqslant j \leqslant 2n)$ 的闭性，易知当 $I_m \lambda \neq 0$ 时，只需估计

$$\left\| \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^{2n}} (\lambda_0 I - A_P)^{-j} \int_{(\lambda_0, \infty]} \frac{(t - \lambda_0)^{2n}}{\lambda - t} dE_t^{A_P} \right\|,$$
$$\left\| \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^{2n}} (\lambda_0 I - A_P)^{-j} \int_{(-\infty, \lambda_0)} \frac{(t - \lambda_0)^{2n}}{\lambda - t} dE_t^{A_P} \right\|,$$
$$1 \leqslant j \leqslant 2n. \tag{5.28}$$

注意 由于极限 (5.26) 保证了 (5.28) 中出现的两组算子是有意义的。

因为 $t \in (-\infty, \infty)$，而当 $\lambda \in \mathrm{I} \cup \mathrm{II}$ 时，$\sqrt{2}\ |\lambda - t| \geqslant |\lambda - \lambda_0|$，所以有下列估计：对任何 $p \in P$，

$$\left\| \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^{2n}} (\lambda_0 I - A_P)^{-j} \int_{(\lambda_0, \infty]} \frac{(t - \lambda_0)^{2n}}{\lambda - t} dE_t^{A_P} p \right\|^2$$

$$\leqslant \left|\frac{1}{(\lambda-\lambda_0)^{4n}}\right|\int_{(\lambda_0,\infty)}\frac{|t-\lambda_0|^{4n-2j}}{|\lambda-t|^2}\,d\|E_t^{A_P}p\|^2$$

$$\leqslant \frac{2}{|\lambda-\lambda_0|^{4n+2}}\int_{(\lambda_0,\infty)}|t-\lambda_0|^{4n-2j}d\|E_t^{A_P}p\|^2;$$

同样可得,对任何 $p\in P$,

$$\left\|\frac{1}{(\lambda-\lambda_0)^{2n}}(\lambda_0 I-A_P)^{-j}\int_{(-\infty,\lambda_0)}\frac{(t-\lambda_0)^{2n}}{\lambda-t}\,dE_t^{A_P}p\right\|$$

$$\leqslant \frac{2}{|\lambda-\lambda_0|^{4n-2}}\int_{(-\infty,\lambda_0)}|t-\lambda_0|^{4n-2j}d\|E_t^{A_P}p\|.$$

由此可知,存在常数 M' 有

$$\left\|\frac{1}{(\lambda-\lambda_0)^{2n}}(\lambda_0 I-A_P)^{-j}\int_{(\lambda_0,\infty)}\frac{(t-\lambda_0)^{n}}{\lambda-t}\,dE_t^{A_P}\right\|$$

$$\leqslant \frac{M'}{|(\lambda-\lambda_0)^{2n+1}|},$$

$$\left\|\frac{1}{(\lambda-\lambda_0)^{2n}}(\lambda_0 I-A_P)^{-j}\int_{(-\infty,\lambda_0)}\frac{(t-\lambda_0)^{n}}{\lambda-t}\,dE_t^{A_P}\right\|$$

$$\leqslant \frac{M'}{|(\lambda-\lambda_0)^{2n+1}|}\quad (j=1,2,\cdots,2n). \tag{5.29}$$

也就是说,存在常数 M_1,

$$\left\|\int K(\lambda,t)dE_t\right\|\leqslant\frac{M_1}{|\lambda-\lambda_0|^{2n+1}},\quad I_m\lambda\neq 0,\ \lambda\in \mathrm{I}\cup\mathrm{II}. \tag{5.30}$$

另一方面,由 $(\lambda I-A)^{-1}$ 的 § 4 的表达式 (4.37) 可知,为了估计 $(\lambda I-A)^{-1}$ 在 λ_0 的增长阶数,只要分别估计 $(\lambda I-S)^{-1}$, $(\lambda I-A_N)^{-1}$ 和 $(\lambda I-A_P)^{-1}$ 在 λ_0 的增长阶数即可.

从§4的 (4.38) 可知,有常数 M_2 使

$$\|(\lambda I-S)^{-1}\|\leqslant\frac{M_2}{|\lambda-\lambda_0|^{n}},\quad \lambda\neq\lambda_0. \tag{5.31}$$

而当 $\lambda\in\mathrm{I}\cup\mathrm{II}$ 时, $\sqrt{2}\,|I_m\lambda|\geqslant|\lambda-\lambda_0|$, 所以

$$\|(A_P-\lambda I)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{|I_m\lambda|}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{|\lambda-\lambda_0|},\quad \lambda\in\mathrm{I}\cup\mathrm{II}. \tag{5.32}$$

同样，$\|(A_N-\lambda I)^{-1}\| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{|\lambda-\lambda_0|}$。由此可知，当 $\lambda \in \mathrm{I} \cup \mathrm{II}$ 时，$(\lambda I-A)^{-1}$ 的三角模型（即 § 4 的 (4.37)）中每一项在 λ_0 的近旁增长阶数不超过 $2n+1$，从而 $(\lambda I-A)^{-1}$ 在 λ_0 的增长阶数不超过 $2n+1$。

(b) $\lambda \in \mathrm{III} \cup \mathrm{IV}$ 情况。

当 $Re\lambda<\lambda_0$ 时，取 $\Delta_\lambda=\left[\frac{3Re\lambda-\lambda_0}{2}, \frac{Re\lambda+\lambda_0}{2}\right]$；当 $Re\lambda>\lambda_0$ 时，取 $\Delta_\lambda=\left[\frac{Re\lambda+\lambda_0}{2}, \frac{3Re\lambda-\lambda_0}{2}\right]$。今用 (5.23) 来估计 $F(\lambda)$ 在 λ_0 附近的增长阶数。

为了估计 $\left\|\int_{\Delta_\lambda}\sum_{i=1}^{2n}\frac{(t-\lambda_0)^{i-1}}{(\lambda-\lambda_0)^i}dE_t\right\|$，由 (5.27) 可知，只要估计

$$\int_{\Delta_\lambda}\frac{(t-\lambda_0)^{i-1}}{(\lambda-\lambda_0)^i}(A_p-\lambda_0 I)^{-k}dE_t^{A_p},\quad 1\leqslant k\leqslant 2n$$

的范数。因为当 $t\in\Delta_\lambda$ 时，$\frac{1}{2\sqrt{2}}|\lambda-\lambda_0|\leqslant|t-\lambda_0|\leqslant\frac{3}{2}|\lambda-\lambda_0|$，所以

$$\left\|\int_{\Delta_\lambda}\frac{(t-\lambda_0)^{i-1}}{(\lambda-\lambda_0)^i}(A_p-\lambda_0 I)^{-k}dE_t^{A_p}p\right\|^2$$

$$\leqslant\frac{1}{|\lambda-\lambda_0|^{2i}}\int_{\Delta_\lambda}|t-\lambda_0|^{2i-2-2k}d\|E_t^{A_p}p\|^2$$

$$\leqslant\frac{M_3}{|\lambda-\lambda_0|^{2k+2}}\|p\|^2, \tag{5.33}$$

其中 M_3 是常数。

又因为 $t\in\Delta_\lambda^c$ 时，$|t-\lambda|>\frac{1}{2}|\lambda-\lambda_0|$，仿 $\lambda\in\mathrm{I}\cup\mathrm{II}$ 的情况的证明方法，可知有常数 M_4，使得

$$\left\|\int_{\Delta_\lambda^c}K(\lambda,t)dE_t\right\|\leqslant\frac{M_4}{|\lambda-\lambda_0|^{2n+2}}. \tag{5.34}$$

剩下的是要估计 $(\lambda I-A)^{-1}E(\Delta_\lambda^c)$ 的增长阶数。对 λ_0 的

固定的实轴上的邻域Δ(假设 $\Delta^C=(-\infty,\infty)-\Delta$ 是有限个闭区间——这些区间可以是无限的)，当 $\lambda\in\{\lambda|Re\lambda\in\Delta^C\}$ 时，$(\lambda I-A)^{-1}E_\Delta$ 是算子值解析函数，而当 $\lambda\in(\{\lambda|Re\lambda\in\Delta^C\}-\Delta^C)$ 时，$(\lambda I-A)^{-1}E_\Delta$ 可以由 $(\lambda I-A)^{-1}$ 的§4的三角模型(4.37)以及在同一标准分解下的 E_Δ 的三角模型(5.8)的乘积得到，从而在同一标准分解下，$(\lambda I-A)^{-1}E_\Delta$ 的三角模型是

$$
\begin{aligned}
(\lambda I-A)^{-1}E_\Delta=\Big\{&(\lambda I-S)^{-1},(\lambda I-A_N)^{-1}E_\Delta^{A_N},\\
&(\lambda I-A_P)^{-1}E_\Delta^{A_P},(\lambda I-S)^{-1}\\
&\cdot F(\lambda I-A_N)^{-1}E_\Delta^{A_N},\\
&\sum_{j=1}^{n}(\lambda I-S)^{-1}(\lambda_0 I-S)^{j-1}G(\lambda_0 I-A_P)^{-j}E_\Delta^{A_P\perp}\\
&+(\lambda I-S)^{-1}G(\lambda I-A_P)^{-1}E_\Delta^{A_P},\\
&-\sum_{j,k=1}^{n}(\lambda I-S)^{-1}(\lambda_0 I-S)^{j-1}\\
&\cdot G(\lambda_0 I-A_P)^{-(j+k)}E_\Delta^{A_P\perp}G^*(\lambda_0 I-S^*)^{k-1}\\
&+(\lambda I-S)^{-1}[Q-F(\lambda I-A_N)^{-1}F^*]\\
&\cdot(\lambda I-S^*)^{-1}+Q'\Big\},
\end{aligned}
$$

其中 $E_\Delta^{A_N}=I$,

$$
\begin{aligned}
Q'=-\sum_{j=1}^{n}&(\lambda I-S)^{-1}G(\lambda I-A_P)^{-1}(\lambda_0 I-A_P)^{-j}\\
&\cdot E_\Delta^{A_P\perp}G^*(\lambda_0 I-S^*)^{j-1}+(\lambda I-S)^{-1}\\
&\cdot G(\lambda I-A_P)^{-1}G^*(\lambda I-S^*)^{-1}.
\end{aligned}
$$

显然，$(\lambda I-A)^{-1}E_\Delta$ 中含有 $(\lambda I-A_P)^{-1}$ 项的只有 Q'. 为估计 Q'，首先不难对 j 用归纳法，有

$$
(\lambda I-A_P)^{-1}(\lambda_0 I-A)^{-j}=\frac{1}{(\lambda_0-\lambda)^j}(\lambda I-A_P)^{-1}
$$

$$
-\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{(\lambda_0-\lambda)^i}(\lambda_0 I-A_P)^{i-j-1},
$$

因此

$$
\begin{aligned}
Q' = & -(\lambda I - S)^{-1} G (\lambda I - A_P)^{-1} E_{\Delta}^{A_P\perp} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^j} \\
& \cdot (\lambda_0 I - S^*)^{j-1} - (\lambda I - S)^{-1} G \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{(\lambda_0 - \lambda)^i} \\
& \cdot (\lambda_0 I - A_P)^{-(j+1)+i} E_{\Delta}^{A_P\perp} G^* (\lambda_0 I - S^*)^{j-1} \\
& + (\lambda I - S)^{-1} G (\lambda I - A_P)^{-1} G^* (\lambda I - S^*)^{-1} \\
= & (\lambda I - S)^{-1} G (\lambda I - A_P)^{-1} E_{\Delta}^{A_P} G^* (\lambda I - S^*)^{-1} \\
& - (\lambda I - S)^{-1} G \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{(\lambda_0 - \lambda)^i} (\lambda_0 I - A_P)^{-(j+1)+i} \\
& \cdot E_{\Delta}^{A_P\perp} G^* (\lambda_0 I - S^*)^{j-1},
\end{aligned}
$$

其中 $-n \leqslant -(j+1)+i \leqslant -1$.

特别,取 $\Delta = \Delta_\lambda^C$, 估计 $(\lambda I - A)^{-1} E_{\Delta_\lambda^C}$ 的各分量. 显然,存在常数 M_5,

$$
\|(\lambda I - S)^{-1} (\lambda_0 I - S)^j\| \leqslant \frac{M_5}{|\lambda - \lambda_0|^{n-j}}, \quad \lambda \neq \lambda_0. \tag{5.35}
$$

利用 $t \in \Delta_\lambda^C$ 时, $|\lambda - t| \geqslant \frac{1}{2} |\lambda - \lambda_0|$, 则对任何 $p \in P$ 有

$$
\begin{aligned}
\|(\lambda I - A_P)^{-1} E_{\Delta_\lambda^C}^{A_P} p\|^2 &= \left\| \int_{\Delta_\lambda^C} \frac{1}{\lambda - t} \, dE_t^{A_P} p \right\|^2 \\
&\leqslant \frac{4}{|\lambda - \lambda_0|^2} \|p\|^2;
\end{aligned} \tag{5.36}
$$

同样可得,对任何 $n \in N$,

$$
\|(\lambda I - A_N)^{-1} E_{\Delta_\lambda^C}^{A_N} n\|^2 \leqslant \frac{4}{|\lambda - \lambda_0|^2} \|n\|^2. \tag{5.37}
$$

因为 $t \in \Delta_\lambda$ 时, $|\lambda_0 - t| \geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}} |\lambda - \lambda_0|$, 因此

$$
\begin{aligned}
\|(\lambda_0 I - A_P)^{-1} E_{\Delta_\lambda^C}^{A_P\perp}\| &= \|(\lambda_0 I - A_P)^{-1} E_{\Delta_\lambda}^{A_P}\| \\
&= \left\| \int_{\Delta_\lambda} \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \, dE_t^{A_P} \right\| \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{|\lambda - \lambda_0|}.
\end{aligned} \tag{5.38}
$$

由 (5.35)—(5.38) 以及 F, G 和 S 是有界算子,不难知道存在常数

M_6，使得

$$\|(\lambda I - A)^{-1}E_{\Delta_\lambda^C}\| \leqslant \frac{M_6}{|\lambda - \lambda_0|^{2n+1}},$$

$$\lambda \in (\mathrm{III} \cup \mathrm{IV}) \cap (\{\lambda | \mathrm{Re}\lambda \neq 0\}).$$

当 $\lambda \in (\mathrm{III} \cup \mathrm{IV}) - \{\lambda_0\})$ 时，因为 $(\lambda I - A)^{-1}$ 已经解析，由上式立即可知，上式对 $\lambda \in ((\mathrm{III} \cup \mathrm{IV}) - \{\lambda_0\})$ 时也成立。

(5) 因为 $F(\lambda)$ 除点 λ_0 外是解析的，并且 $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \|F(\lambda)\| = 0$，而在点 λ_0 处是不超过 $n+1$ 阶的极点，从而

$$F(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{2n+1} \frac{B_\nu}{(\lambda - \lambda_0)^\nu};$$

而当 $\lambda \in \rho(A)$ 时，

$$(\lambda I - A)^{-1} = \int K(\lambda, t) dE_t + \sum_{\nu=1}^{2n+1} \frac{B_\nu}{(\lambda - \lambda_0)^\nu}.$$

显然，当 $\lambda \in (-\infty, \infty)$ 时，$F(\lambda)$ 是 Π_K 上自共轭算子，所以对任何 $x, y \in \Pi_K$，

$$\sum_{\nu=1}^{2n+1} \frac{(B_\nu x, y)}{(\lambda - \lambda_0)^\nu} = \sum_{\nu=1}^{2n+1} \frac{(x, B_\nu y)}{(\lambda - \lambda_0)^\nu}, \quad \lambda \in (-\infty, \infty) - \{\lambda_0\},$$

因此 $B_\nu^\dagger = B_\nu$，即 $B_\nu (\nu = 1, 2, \cdots, 2n+1)$ 是 Π_K 上自共轭算子。

对于多个广义临界点情况，不难得到表达式 (5.21)。证毕。

注意 在定理 5.4 的证明的一开始，我们假定了 $C(A) = \sigma(S)$，但是，一般说来，对于 Π_K 上自共轭算子 A，在某个标准分解 $\Pi_K = N \oplus \{Z + Z^*\} \oplus P$ 之下，$A = \{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$；当 $\lambda_0 \in C(A)$ 时，完全可以发生 $\lambda_0 \bar{\in} \sigma(S)$，而 $\lambda_0 \in \sigma(A_N)$ 的情况。对于这种情况，由 §4 定理 4.6 的 (i) 的证明过程可知，必有

$$\Phi_{\lambda_0}(A) = \mathrm{span}\{n - (S - \lambda_0 I)^{-1} F n \,|\, n \in \mathcal{N}(A_N - \lambda_0 I)\}$$

$$\oplus \mathrm{span}\{p - (S - \lambda_0)^{-1} G p \,|\, p \in \mathcal{N}(A_p - \lambda_0 I)\}.$$

显然，$\Phi_{\lambda_0}(A) = \Phi_{\lambda_0 1}(A)$，从而 A 在约化子空间 $\Phi_{\lambda_0}(A)$ 上是单位算子的 λ_0 倍，并且 λ_0 是实数。A 限制在 $\Phi_{\lambda_0}(A)^\perp$ 上时，定理 5.4 成立；而 A 限制在 $\Phi_{\lambda_0}(A)$ 上的谱系是

$$E_t = \begin{cases} I, & t \geq \lambda_0 \\ 0, & t < \lambda_0 \end{cases}$$

而相应于 λ_0 的根向量最高阶是 1. 所以，只要取 $B_{01} = I$, $B_{02} = B_{03} = 0$，易知在 $\Phi_{\lambda_0}(A)$ 上下式成立.

$$(\lambda I - A)^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda, t) dE_t + \sum_{i=1}^{3} \frac{B_{0i}}{(\lambda - \lambda_0)^i}.$$

换句话说，对于 $\lambda_0 \bar{\in} \sigma(S)$ 而 $\lambda_0 \in \sigma(A_N)$ 的情况，(5.21) 仍成立. 实际上，它比 $\lambda_0 \in \sigma(S)$ 情况要简单得多.

3. 算子演算和谱映射 有了预解式的谱表示，就可以进一步讨论算子演算. 先讨论解析演算. 设 A 是 Π_K 上有界自共轭算子，函数 $f(\lambda)$ 在包含 $\sigma(A)$ 的领域 Ω 上解析，Γ 是 Jordan 闭曲线，并且 $\Gamma \subset (\Omega \cap \rho(A))$，$\sigma(A)$ 在 Γ 的内部. 按通常办法，定义

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint f(\lambda)(\lambda I - A)^{-1} d\lambda.$$

定理 5.5 设 A 是 Π_K 上有界自共轭算子，$C(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_l, \lambda_{l+1}, \bar{\lambda}_{l+1}, \cdots, \lambda_{l+l_0}, \bar{\lambda}_{l+l_0}\}$ ($I_m \lambda_i = 0, 1 \leq i \leq l$; $I_m \lambda_i \neq 0$, $l + 1 \leq i \leq l + l_0$)，相应于 λ_i 的根向量的最高阶数为 n_i. 又设 $\{E_t\}$ 是 A 的谱系. 函数 $f(\lambda)$ 是在包含 $\sigma(A)$ 的某个区域 Ω 上解析. 那末

$$f(A) = \int \left[f(\lambda) - \sum_{\nu=1}^{l} \delta(t - \lambda_\nu) \sum_{i=0}^{2n_\nu - 1} \frac{f^{(i)}(\lambda_\nu)}{i!} (t - \lambda_\nu)^i \right] dE_t$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{l} \sum_{i=0}^{2n_\nu} \frac{f^{(i)}(\lambda_\nu)}{i!} B_{\nu i} +$$
$$\sum_{\nu=l+1}^{l+l_0} \sum_{i=0}^{n_\nu - 1} \left[\frac{f^{(i)}(\lambda_\nu)}{i!} B_{\nu i} + \frac{f^{(i)}(\bar{\lambda}_\nu)}{i!} B_{\nu i}^{\dagger} \right]. \tag{5.39}$$

证 不妨设 $C(A) = \{\lambda_1\}$. 对任何 $x, y \in \Pi_K$，利用 (5.21) 以及 Fubini 交换积分顺序定理，立即得到

$$(f(A)x, y) = \frac{1}{2\pi i} \oint f(\lambda) \int \left[\frac{1}{\lambda - t} - \right.$$

$$\sum_{i=0}^{2n_1-1} \frac{(t-\lambda_1)^i}{(\lambda-\lambda_1)^{i+1}}\Big] d(E_t x, y) d\lambda$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=0}^{2n_1+1} \oint \frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^{i+1}}\, d\lambda (B_{1i} x, y)$$

$$= \int \frac{1}{2\pi i} \oint \Big[\frac{f(\lambda)}{\lambda - t} - \sum_{i=0}^{2n_1-1}$$

$$\cdot f(\lambda) \frac{(t-\lambda_1)^i}{(\lambda-\lambda_1)^{i+1}} \Big] d\lambda d(E_t x, y)$$

$$+ \sum_{i=0}^{2n_1} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^{i+1}}\, d\lambda (B_{1i} x, y)$$

$$= \int \Big[f(t) - \sum_{i=0}^{2n_1-1} \frac{f^{(i)}(\lambda_1)}{i!} (t-\lambda_1)^i \Big] d(E_t x, y)$$

$$+ \sum_{i=0}^{2n_1} \frac{f^{(i)}(\lambda_1)}{i!} (B_{1i} x, y),$$

由此得到

$$f(A) = \int \Big[f(t) - \sum_{i=0}^{2n_1-1} \frac{f^{(i)}(\lambda_1)}{i!} (t-\lambda_1)^i \Big] dE_t$$

$$+ \sum_{i=0}^{2n_1} \frac{f^{(i)}(\lambda_1)}{i!} B_{1i}.$$

证毕。

推论 5.6 在定理 5.5 的假设下，如果 $C(A) = \{\lambda_1\}$，那末

$$(\lambda I - A)^{-1} = \int \Big[\frac{1}{t-\lambda} - \sum_{i=0}^{2n_1} \frac{(t-\lambda_1)^i}{(\lambda-\lambda_1)^{i+1}} \Big] dE_t$$

$$+ \sum_{i=0}^{2n_1} \frac{(A-\lambda_1 I)^i}{(\lambda-\lambda_1)^{i+1}}, \tag{5.40}$$

$$f(A) = \int \Big[f(t) - \sum_{i=0}^{2n_1} \frac{f^{(i)}(\lambda_1)}{i!} (t-\lambda_1)^i \Big] dE_t$$

$$+ \sum_{i=0}^{2n_1} \frac{f^{(i)}(\lambda_1)}{i!} (A - \lambda_1 I)^i. \tag{5.41}$$

证 在 (5.39) 中取 $f(t)=(t-\lambda_1)^k(k=0,1,2,\cdots,2n_1)$，便有

$$B_{1k}=\begin{cases}(A-\lambda_1 I)^k, & 0\leqslant k\leqslant 2n_1-1\\ (A-\lambda_1 I)^{2n_1}-\int(t-\lambda_1)^{2n_1}dE_t, & k=2n_1\end{cases}$$

证毕。

注 在三角模型下，$B_{1\,2n_1}$ 具有较简单的形式。实际上，任取 $\Delta=(\alpha,\beta]$，$\lambda_1\in(\alpha,\beta)$，利用 (5.3)—(5.5) 以及

$$A^n=\Big\{S^n,\ A_N^n,\ A_P^n,\ \sum_{i=0}^{n-1}S^iFA_N^{n-1-i},\ \sum_{i=0}^{n-1}S^iGA_P^{n-1-i},$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}S^iQS^{*n-1-i}-\sum_{i+j+k=n-2}S^i(FA_N^jF^*$$

$$+GA_P^jG^*)S^{*k}\Big\},\quad n=1,2,\cdots,\tag{5.42}$$

经计算可得

$$(A-\lambda_1 I)^{2n_1}E_\Delta=\Big\{0,\ 0,\ (A_P-\lambda_1 I)^{2n_1}E_\Delta^{A_P},\ 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n_1}(S-\lambda_1 I)^{i-1}G(A_P-\lambda_1 I)^{2n_1-i}E_\Delta^{A_P},$$

$$-(S-\lambda_1 I)^{n_1-1}FF^*(S^*-\lambda_1 I)^{n_1-1}$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n_1}(S-\lambda_0 I)^{i-1}G(A_P-\lambda_1 I)^{2n-(i+j)}$$

$$\cdot E_\Delta^{A_P}G^*(S^*-\lambda_1 I)^{j-1}\Big\}.$$

由于

$$B_{1\,2n_1}=(A-\lambda_1 I)^{2n_1}-\int(t-\lambda_1)^{2n_1}dE_t$$

$$=(A-\lambda_1 I)^{2n_1}E_\Delta-\int_\Delta(t-\lambda_1)^{2n_1}dE_t,$$

令 $|\Delta|\to 0$，由定义，有 $\lim\limits_{|\Delta|\to 0}\int_\Delta(t-\lambda_0)^{2n_1}dE_t=0$，因此

$$B_{1\,2n_1}=\lim_{|\Delta|\to 0}(A-\lambda_1 I)^{2n_1}E_\Delta$$

$$= \{0, 0, 0, 0, 0, -(S-\lambda_1 I)^{n_1-1} \cdot [FF^* + GG^*](S^* - \lambda_1 I)^{n_1-1}\}.$$

如果在 Z 中选一组线性基 $z_1, \cdots, z_n$，使 S 成为 Jordan 标准形，为简单起见设只有一块，因而 $n = n_1$. 设 F, G 有表示

$$Fn = \sum_{i=1}^{n_1} (n, x_i) z_i, \quad Gp = \sum_{i=1}^{n_1} (p, y_i) z_i, \quad n \in N, \ p \in P,$$

这里的 $x_i \in N$, $y_i \in P$ $(i = 1, 2, \cdots, n_1)$, 那末对任何 $x = n + z + z^* + p$,

$$B_{1\,2n_1} x = -[(x_{n_1}, x_{n_1}) + ((E_{\lambda_1}^{\hat{P}} - E_{\lambda_1 - 0}^{\hat{P}}) y_{n_1}, y_{n_1})](z^*, z_{n_1}) z_{n_1}.$$

推论 5.7 在定理 5.5 的假设下，再设 $C(A) \subset (-\infty, \infty)$. 那末对任何一组自然数 $k_1, \cdots, k_l$,

$$\prod_{\nu=1}^{l} (A - \lambda_\nu I)^{2n_\nu + k_\nu} = \int \prod_{\nu=1}^{l} (t - \lambda_\nu)^{2n_\nu + k_\nu} dE_t.$$

证 取 $f(t) = \prod_{\nu=1}^{l} (t - \lambda_\nu)^{2n_1 + k_\nu}$ 代入 (5.39) 即得. 证毕.

为将算子演算推广到更一般情况，我们引入两个代数.

定义 5.4 令 $\Omega_n = \{(f, (a_0, \cdots, a_{2n})) | f$ 是直线上 Borel 可测函数，$(a_0, \cdots, a_{2n})$ 是一数组$\}$. 对于 Ω_n 中两个元 $F = (f, (a_0, \cdots, a_{2n}))$, $G = (g, (b_0, \cdots, b_{2n}))$, 规定“加”、“乘”如下：$\alpha, \beta$ 是复数，

$$\alpha F + \beta G = (\alpha f + \beta g, (\alpha a_0 + \beta b_0, \cdots, \alpha a_{2n} + \beta b_{2n})),$$

$$FG = \left(fg, \left(a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, \cdots, \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}, \cdots, \sum_{j=0}^{2n} a_j b_{2n-j}\right)\right);$$

“共轭”运算规定如下：

$$\bar{F} = (\bar{f}, (\bar{a}_0, \cdots, \bar{a}_{2n})).$$

显然，Ω_n 是具有对合(共轭运算)的线性代数，$(1, (1, 0, \cdots, 0))$ 是 Ω_n 的单位元，而 $(0, (0, 0, \cdots, 0))$ 是 Ω_n 的零元，且 Ω_n 还是交换代数.

令

$$\omega_n = \Big\{(f, (a_0, \cdots, a_{2n}))\,|\,\text{存在一个 0 的邻域} U \text{和常数} M^{1)},$$

$$\text{使得} \left| f(t) - \sum_{i=0}^{2n} a_i t^i \right| \leqslant M t^{2n+1} \text{ 在} U \text{上成立} \Big\},$$

则 ω_n 是 Ω_n 的子代数。

显然，如果函数 $f(t)$ 在 0 的某邻域中具有连续的 $2n+1$ 阶导数，那末当取 $a_i = \dfrac{f^{(i)}(0)}{i!}$ $(0 \leqslant i \leqslant 2n)$ 时，$(f, (a_0, \cdots, a_{2n})) \in \Omega_n$.

为方便起见，下面只限于叙述一个临界点 0 的情况。

定义 5.5 设 A 是 Π_K 上自共轭算子，$C(A) = \{0\}$，相应于 0 的根向量最高阶数为 n. 又设 $\{E_t\}$ 是 A 的谱系. 对任何 ω_n 中的 $F = (f, (a_0, \cdots, a_{2n}))$，定义

$$F(A) = \int \Big[f(t) - \sum_{i=0}^{2n} a_i t^i \Big] dE_t + \sum_{i=0}^{2n} a_i A^i,$$

$F(A)$ 的定义域是

$$\mathscr{D}(F(A)) = \mathscr{D}(A^{2n}) \cap \left\{ x \,\middle|\, \int \left| f(t) - \sum_{i=0}^{2n} a_i t^i \right|^2 d\|E_t x\|^2 < \infty \right\}.$$

显然，当 f 是解析函数时，取 $F = \left(f, \left(f(0), \cdots, \dfrac{f^{(i)}(0)}{i!}, \cdots, \dfrac{f^{(2n)}(0)}{2n!}\right)\right)$，那末 $F(A) = f(A)$，此时 $f(A)$ 就是通常用围道积分所定义的。

任取 $\Delta = (-M, M]$ $(M > 0)$，由于相应于 $\Delta^C = (-\infty, \infty) - \Delta$ 的 $(E_{\Delta^C}\Pi_K, (\cdot, \cdot))$ 是 Hilbert 空间，所以在研究由定义 5.5 所决定的 $F(A)$ 时，可不妨设 A 是有界算子（因为 $F(A)$ 在 $E_{\Delta^C}\Pi_K$ 上情况是属于熟知的 Hilbert 空间上算子演算理论）。

定理 5.8 设 A 是 Π_K 上有界自共轭算子，$C(A) = \{0\}$，相

---

1) 这里 U，M 仅依赖于 $(f, (a_0, \cdots, a_n))$.

应于 0 的根向量的最高阶数是 n。对任何 $F, G \in \omega_n$，有

$$\begin{cases} \bar{F}(A) = F(A)^{+} \\ (\alpha F + \beta G)(A) = \alpha F(A) + \beta G(A) \\ (FG)(A) = F(A)G(A) \\ F_t(A) = A, \end{cases} \tag{5.43}$$

其中 $F_t = (t, (0, 1, 0, \cdots, 0))$.

证 (5.43) 中第一，二，四式是显然的. 下面证第三式.

对给定 ω_n 中的 $F = (f, (a_0, \cdots, a_{2n}))$, $G = (g, (b_0, \cdots, b_{2n}))$. 任取 $\Delta = (-\mu, \mu](\mu > 0)$, 使得当 $t \in [-\mu, \mu]$ 时,

$$\begin{aligned} &\left| f(t) - \sum_{i=0}^{2n} a_i t^i \right| \leqslant M_1 t^{2n+1}, \\ &\left| g(t) - \sum_{i=0}^{2n} b_i t^i \right| \leqslant M_1 t^{2n+1}, \\ &\left| f(t)g(t) - \sum_{i=0}^{2n} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \right) t^i \right| \leqslant M_1 t^{2n+1}. \end{aligned} \tag{5.44}$$

今证必有常数 M_4, 使得

$$\left\| \int_{\Delta} \left[f(t) - \sum_{i=0}^{2n} a_i t^i \right] dE_t \right\| \leqslant M_4 \mu. \tag{5.45}$$

事实上，对任何 $p \in P$, $0 < \varepsilon < \mu$,

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{(\varepsilon, \mu]} \left[f(t) - \sum_{i=0}^{2n} a_i t^i \right] A_P^{-j} dE_t^{A_P} p \right\|^2 \\ &= \left\| \int_{(\varepsilon, \mu]} \left[f(t) - \sum_{i=0}^{2n} a_i t^i \right] t^{-j} dE_t^{A_P} p \right\|^2 \\ &\leqslant \int_{(\varepsilon, \mu]} M_1 t^{4n+2-2j} d\|E_t^{A_P} p\|^2 \leqslant M_2^2 \mu^2 \|p\|^2, \\ &\qquad 1 \leqslant j \leqslant 2n; \end{aligned} \tag{5.46}$$

同样，存在常数 $M_3 > 0$,

$$\left\| \int_{(-\mu, -\varepsilon]} \left[f(t) - \sum_{i=0}^{2n} a_i t^i \right] A_P^{-j} dE_t^{A_P} p \right\| \leqslant M_3 \mu \|p\|, \quad 1 \leqslant j \leqslant 2n. \tag{5.46'}$$

注意到 (5.16)[1],由 (5.46) 和 (5.46') 不难得到:存在常数 M_4,使得

$$\left\|\int_{(\varepsilon,\mu]}\left[f(t)-\sum_{i=0}^{2n}a_it^i\right]dE_t\right\| + \left\|\int_{(-\mu,-\varepsilon]}\left[f(t)-\sum_{i=0}^{2n}a_it^i\right]dE_t\right\| \leqslant M_4\mu. \tag{5.47}$$

根据积分的定义:

$$\int_\Delta\left[f(t)-\sum_{i=0}^{2n}a_it^i\right]dE_t=\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0}\left(\int_{(-\mu,-\varepsilon_1]}+\int_{(\varepsilon_2,\mu]}\right)\cdot\left[f(t)-\sum_{i=0}^{2n}a_it^i\right]dE_t,$$

由 (5.47) 立即得到 (5.45)。

同样,存在常数,不妨设为 M_4, 使得

$$\left\|\int_\Delta\left[g(t)-\sum_{i=0}^{2n}b_it^i\right]dE_t\right\|\leqslant M_4\mu,$$

$$\left\|\int_\Delta\left[f(t)g(t)-\sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{i}a_jb_{i-j}t^i\right]dE_t\right\|\leqslant M_4\mu. \tag{5.48}$$

记 $A_\Delta=AE_\Delta$, $A_{\Delta^C}=AE_{\Delta^C}(\Delta^C=(-\infty,\infty)-\Delta)$, $\xi(t)=f(t)-\sum_{i=0}^{2n}a_it^i$, $\zeta(t)=g(t)-\sum_{i=0}^{2n}b_it^i$, $\eta(t)=f(t)g(t)-\sum_{i=0}^{2n}\cdot\sum_{j=0}^{i}a_jb_{i-j}t^i$. 由 (5.45), (5.48) 可知, $E_\Delta\Pi_K$ 不仅约化 $F(A)$, $G(A)$, $(FG)(A)$, 并且

$$\|F(A)E_\Delta\|\leqslant M_4\mu,$$
$$\|G(A)E_\Delta\|\leqslant M_4\mu,$$
$$\|(FG)(A)E_\Delta\|\leqslant M_4\mu. \tag{5.49}$$

显然,

---

1) (5.16) 式中△是区间形式,其实当 $[\alpha,\beta]\cap C(A)=\varnothing$ 时,因为 $(E_{(\alpha,\beta]}\Pi_K,(\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间,易知当△是 $(\alpha,\beta]$ 中任何 Borel 集时,(5.16)也成立.在证明 (5.47) 时需要用这个事实.

$$\begin{cases} F(A) = \int_\Delta \xi(t)dE_t + \sum_{i=0}^{2n} a_i A_\Delta^i + F(A)E_{\Delta^C} \\ G(A) = \int_\Delta \zeta(t)dE_t + \sum_{i=0}^{2n} b_i A_\Delta^i + G(A)E_{\Delta^C} \\ (FG)(A) = \int_\Delta \eta(t)dE_t + \sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} A_\Delta^i + (FG)(A)E_{\Delta^C}. \end{cases}$$

由于 $(E_{\Delta^C}\Pi_K, (\cdot, \cdot))$ 是 Hilbert 空间，按 Hilbert 空间上熟知的算子演算理论，易知

$$F(A)E_{\Delta^C}G(A)E_{\Delta^C} = (FG)(A)E_{\Delta^C}.$$

注意到 $E_\Delta\Pi_K$ 的约化性，因而只要证明当$\Delta\to 0$时，

$$D_\Delta = \left(\int_\Delta \xi(t)dE_t + \sum_{i=0}^{2n} a_i A_\Delta^i\right)\left(\int_\Delta \zeta(t)dE_t + \sum_{i=0}^{2n} b_i A_\Delta^i\right) - \left(\int_\Delta \eta(t)dE_t + \sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} A_\Delta^i\right)$$

弱收敛于 0 即可。

由推论 5.7，当 $h\geqslant 1$ 时，仿 (5.49) 的证明，有常数 $M_5>0$，使

$$\|A_\Delta^{2n+h}\| = \left\|\int_\Delta t^{2n+h}dE_t\right\| \leqslant M_5\mu. \tag{5.50}$$

对给定的 $F, G\in\omega_n$，由 (5.49)，(5.50) 易知，存在常数 M_6，使得

$$\|D_\Delta\| \leqslant M_6\mu.$$

由此可知，当$\Delta\to 0$时，D_Δ 按算子范数收敛于 0. 证毕。

定义 5.6 设A是Π_K上自共轭算子，$\{E_t\}$ 是A的谱系. 又设 $f_1(t)$，$f_2(t)$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上两个 Borel 可测函数（可以在 $C(A)$ 上没有定义）. 如果对任何 $x\in\Pi_K$，$f_1(t)$，$f_2(t)$ 关于定义在$(-\infty,\infty)-C(A)$ 的 Borel 子集上测度 $d(E_tx, x)$ 几乎处处相等，那末称 $f_1(t)$，$f_2(t)$ 关于 $\{E_t\}$ 几乎处处相等[1]，记为 $f_1 \stackrel{\cdot}{\underset{E_t}{=}}$

1）这里不拟再引入相应于 $\{E_t\}$ 的谱测度概念.

f_2.

显然，如果在标准分解 $\Pi_K = N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$ 下，$A=\{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$，那末由(5.16)可知 $f_1 \underset{E_t}{\doteq} f_2$ 等价于 $f_1 \underset{E_t^{A_P}}{\doteq} f_2$.

定理 5.9 设 A 是 Π_K 上自共轭算子，$C(A)=\{0\}$，并且相应于 0 的根向量最高阶数为 n. 又设 $F_1=(f_1, (a_0, \cdots, a_{2n}))$，$F_2=(f_2, (a_0, \cdots, a_{2n}))$ 是 ω_n 中两个元，那末 $F_1(A)=F_2(A)$ 的充要条件是 $f_1 \underset{E_t}{\doteq} f_2$，其中 $\{E_t\}$ 是 A 的谱系.

证 类似于定理 5.8 的证明，易知对任何 $\mu>0$，$\Delta=(-\mu, \mu]$，$F_1(A)=F_2(A)$ 的充要条件是

$$F_1(A)E_\Delta = F_2(A)E_\Delta,\ F_1(A)E_{\Delta^C} = F_2(A)E_{\Delta^C}. \tag{5.51}$$

而 $(E_{\Delta^C}\Pi_K, (\cdot, \cdot))$ 是 Hilbert 空间，利用 Hilbert 空间中熟知的事实，$F_1(A)E_{\Delta^C}=F_2(A)E_{\Delta^C}$ 的充要条件是

$$f_1(t) \underset{E_tE_{\Delta^C}}{\doteq} f_2(t).$$

再注意到 $\lim\limits_{|\Delta|\to 0}\|F_1(A)E_\Delta\| = \lim\limits_{|\Delta|\to 0}\|F_2(A)E_\Delta\| = 0$，则易知本定理成立. 证毕.

为了建立一般的谱映射定理，需要下列引理.

引理 5.10 设 A 是 Π_K 上有界自共轭算子，$C(A)=\{0\}$，相应于 0 的根向量的最高阶数为 n. 又设 ω_n 中 $F=(f, (a_0, \cdots, a_{2n}))$ 的 f 是有界 Borel 可测函数，那末 $F(A)$ 是有界的.

这个引理是显然的.

定理 5.11 设 A 是 Π_K 上有界自共轭算子，$C(A)=\{0\}$，相应于 0 的根向量的最高阶数为 n. 又设 $f(t)$ 是直线上连续函数，并且 $F=(f, (a_0, \cdots, a_{2n}))$ 是 ω_n 中元，那末

$$\sigma(F(A)) = \{f(t) \mid t\in\sigma(A)\}. \tag{5.52}$$

证 任取 $\Delta=(-\mu, \mu]$ $(\mu>0)$，因为 $E_\Delta\Pi_K$ 约化 A，$F(A)$，所以

$$\sigma(A) = \sigma(A|_{E_\Delta\Pi_K}) \cup \sigma(A|_{E_{\Delta^C}\Pi_K}), \tag{5.53}$$

$$\sigma(F(A)) = \sigma(F(A)|_{E_\Delta \Pi_K}) \cup \sigma(F(A)|_{E_{\Delta^C}\Pi_K}). \quad (5.54)$$

记 $A_\Delta = A|_{E_\Delta \Pi_K}$, $A_{\Delta^C} = A|_{E_{\Delta^C}\Pi_K}$, 显然

$$F(A)|_{E_{\Delta^C}\Pi_K} = \int_{\Delta^C}\left[f(t) - \sum_{i=0}^{2n} a_i t^i\right]dE_t\Big|_{E_{\Delta^C}\Pi_K} + \sum_{i=0}^{2n} a_i A^i_{\Delta^C}$$

$$= \int_{\Delta^C} f(t) dE_t|_{E_{\Delta^C}\Pi_K}. \quad (5.55)$$

由于 $(E_{\Delta^C}\Pi_K, (\cdot, \cdot))$ 是 Hilbert 空间，由 Hilbert 空间上谱映射理论，从(5.55)以及 $\sigma(A_{\Delta^C}) \subset \bar{\Delta}^C$ (见 § 4 定理 4.8 的 (ii)) 立即得到

$$\sigma(F(A)|_{E_{\Delta^C}\Pi_K}) = \sigma(f(A_{\Delta^C}))$$
$$= \{f(t) | t \in \sigma(A) \cap \bar{\Delta}^C\}; \quad (5.56)$$

由 (5.54), (5.56) 就得到

$$\sigma(F(A)) \supset \bigcup_{\mu>0} \sigma(F(A)|_{E_{\Delta^C}\Pi_K})$$
$$\supset \bigcup_{\mu>0} \{f(t) | t \in \sigma(A) \cap \bar{\Delta}^C\}$$
$$= \{f(t) | t \in \sigma(A) - \{0\}\}. \quad (5.57)$$

如果 0 不是 $\sigma(A)$ 的孤立点，那末利用 $\sigma(F(A))$ 是闭集，$f(t)$ 是连续函数，立即由 (5.57) 又得到

$$\sigma(F(A)) \supset \{f(t) | t \in \sigma(A)\}. \quad (5.58)$$

如果 0 是 $\sigma(A)$ 的孤立点，那末相应于 0 的根子空间就是 $(E_0 - E_{0-0})\Pi_K$，并且由积分定义还可得到

$$\int\left(f(t) - \sum_{i=0}^{2n} a_i t^i\right) dE_t|_{(E_0 - E_{0-0})\Pi_K} = 0,$$

从而对任何相应于 0 的特征向量 x，必有

$$F(A)x = \sum_{i=0}^{2n} a_i A^i x = a_0 x,$$

即 $a_0 \in \sigma_p(F(A))$，由于 $(f, (a_0, \cdots, a_{2n})) \in \omega_n$，所以 $a_0 = f(0)$。从而仍得到 (5.58)。

为了证明 $\sigma(F(A)) \subset \{f(t) | t \in \sigma(A)\}$，只须证明对任何 $\lambda \bar{\in}$

$\{f(t)|t\in\sigma(A)\}$，必有 $\lambda\in\rho(F(A))$ 即可。

事实上，因为 $\lambda\bar{\in}\{f(t)|t\in\sigma(A)\}$，而 $\{f(t)|t\in\sigma(A)\}$ 是闭集，所以存在 $d>0$，使得 $|\lambda-f(t)|\geqslant d(t\in\sigma(A))$。根据等式(5.56)，对任何 $\mu>0$，λ 是 $F(A)|_{E_\Delta c\Pi_K}$ 的正则点。另一方面，根据定理 5.8 的证明过程得到：存在某个正则分解所导出的范数 $\|\cdot\|$ 以及常数 $M>0$，使得

$$\|F(A)E_\Delta\|\leqslant M\mu$$

(见(5.49)式)。由此可见，当 $\lambda\neq 0$ 时，只要取 $\mu<\frac{|\lambda|}{2M}$，就有 $\lambda\in\rho(F(A)|_{E_\Delta\Pi_K})$，从而 $\lambda\in\rho(F(A))$。

当 $\lambda=0$ 时，任取非零数 $a\bar{\in}\{f(t)|t\in\sigma(A)\}$，考虑 ω_n 中的 $F_a=(f+a,(a_0+a,a_1,\cdots,a_{2n}))$，由定义可知

$$F_a(A)=F(A)+aI$$

由于 $0\bar{\in}\{f(t)|t\in\sigma(A)\}$，所以 $a\bar{\in}\{f(t)+a|t\in\sigma(A)\}$。根据上面的证明，$a\in\rho(F_a(A))$，即 $0\in\rho(F(A))$。证毕。

定理 5.12 在定理 5.11 的假设下，又假设在标准分解 $\Pi_K=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$ 之下，$A=\{S,A_N,A_P,F,G,Q\}$。那末，对任何 $(f,(a_0,\cdots,a_{2n}))\in\omega_n$，有

$$F(A)=\left\{\sum_{i=0}^{n-1}a_iS^i,\ a_0I,\ f(A_P),\ \mathscr{F},\ \mathscr{G},\ \mathscr{Q}\right\},\qquad(5.59)$$

其中

$$\mathscr{F}=\sum_{i=1}^{n}a_iS^{i-1}F,$$

$$\mathscr{G}=\sum_{i=1}^{n}S^{i-1}G\int\left[f(t)-\sum_{j=0}^{i-1}a_jt^j\right]t^{-i}dE_t^{A_P},$$

$$\mathscr{Q}=\sum_{i=0}^{2n}a_i\sum_{j=1}^{i}S^{j-1}QS^{*i-j}-\sum_{i=2}^{2n}a_i\sum_{j=0}^{i-2}S^jFF^*S^{*i-2-j}$$
$$+\sum_{i,k=1}^{n}S^{i-1}G\int\left[f(t)-\sum_{j=0}^{i+k-1}a_jt^j\right]t^{-(i+k)}dE_t^{A_P}G^*S^{*k}.$$

证 利用 $F(A)$ 的定义，$0\bar{\in}\Delta$ 时的 E_Δ 表达式(5.16)以及

A^n 的表达式 (5.42),经直接计算不难证得. 证毕.

推论 5.13 在定理 5.12 假设下, 又假设 ω_n 中的 $F=(f,(a_0,\cdots,a_{2n}))$ 满足下列条件: f 是实函数, $I_m a_i=0$ $(0\leqslant i\leqslant 2n)$, 那末

$$C(F(A))=\{f(t)\mid t\in C(A)\}.$$

证 因为 f 是实函数, $a_0,\cdots,a_{2n}$ 都是实数, 根据定理 5.8, $F(A)$ 是自共轭算子. 因而, 从 (5.59) 可得

$$C(F(A))=\sigma(F(S))\cup\sigma(a_0 I),$$

又因为 $F\in\omega_n$, 所以 $a_0=f(0)$, 即推论成立. 证毕.

4. 酉算子的临界点结构和谱映射 这一小节中将不加证明地列出酉算子与自共轭算子相应的临界点结构和谱映射方面结果.

定义 5.7 设 U 是 Π_K 上酉算子, $\lambda_0\in\sigma_p(U)$. 如果相应于 λ_0 的根子空间含有零性向量, 那末称 λ_0 是 U 的广义临界点. U 的广义临界点全体记为 $C(U)$.

用 C_1 表示复平面上单位圆周,以下不再重复说明.

引理 5.14 下列命题成立,

(i) U 的临界点必是广义临界点.

(ii) 如果 $\lambda\in\sigma(U)$, 并且 $|\lambda|\neq 1$, 那末 λ, $\dfrac{1}{\bar{\lambda}}\in C(U)$.

(iii) 如果 $\lambda_0\in C(A)$, 并且 $|\lambda_0|=1$, 但 λ_0 不是 U 的临界点,那末 $\Phi_{\lambda_0}(U)$ 必是非退化

(iv) 如果在标准分解 $\Pi_K=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$ 之下, $U=\{S,U_N,U_P,C,D,T\}$. 那末 $(C_1\cap C(A))\subset\sigma(S)$.

定义 5.8 设 U 是 Π_K 上酉算子, $C(U)=\left\{\lambda_1,\cdots,\lambda_l,\lambda_{l+1},\dfrac{1}{\bar{\lambda}_{l+1}},\cdots,\lambda_{l+l_0},\dfrac{1}{\bar{\lambda}_{l+l_0}}\right\}$, 其中 $|\lambda_i|=1$ $(1\leqslant i\leqslant l)$; $|\lambda_i|<1$ $(l+1\leqslant i\leqslant l+l_0)$. 令 $L=(\Phi_{\lambda_{l+1}}(U)+\Phi_{\frac{1}{\bar{\lambda}_{l+1}}}(U))\oplus\cdots\oplus(\Phi_{\lambda_{l+l_0}}(U)+\Phi_{\frac{1}{\bar{\lambda}_{l+l_0}}}(U))$, $\{E_t\}$ 是 $U|_{L^\perp}$ 上的谱系. 称

$$\check{E}_t=\begin{cases}E_t & \text{在 } L^\perp \text{ 上}\\ 0 & \text{在 } L \text{ 上}\end{cases}$$

是U的谱系．今后仍简记 $\{\tilde{E}_t\}$ 为 $\{E_t\}$.

定理 5.15 设U是 Π_K 上酉算子，$\{E_t\}$ 是U的谱系，并且在标准分解 $\Pi_K = N \oplus \{Z + Z^*\} \oplus P$ 之下，$U = \{S, U_N, U_P, C, D, T\}$．又设 $\lambda_e \in \sigma(S)$，$|\lambda_e| = 1$，Δ，Δ_1 都是包含 λ_e 的开弧，那末下列命题等价

(i) $\sup\limits_{\Delta}\{\|E_\Delta\| \mid \Delta \subset \Delta_1\} < \infty$.

(ii) $\mu^{(1)}, \cdots, \mu^{(k_0)}$ 都是全有限的测度。

(iii) (强) $\lim\limits_{\Delta \to \lambda_e} E_\Delta$ 存在。

(iv) $\Phi_{\lambda_e}(U)$ 非退化。

(v) (弱) $\lim\limits_{\Delta \to \lambda_e} E_\Delta$ 存在.

(vi) $\sup\limits_{\Delta}\{|(E_\Delta x, y)| \mid_{x,y}\} < \infty$.

注意 (ii) 中 $\mu^{(i)}$ 定义类似于 (5.6)，只是将 (5.6) 中 $E_t^{A_P}$ 换成现在的 $E_t^{U_P}$；而 x_i 的表达式类似于 (5.1)，(5.2)，将 (5.1)，(5.2) 中 G，A_P 换成现在的 $-SD^*U_P$，U_P.

定理 5.16 设U是 Π_K 上酉算子，在标准分解 $\Pi_K = N \oplus \{Z + Z^*\} \oplus P$ 之下，$U = \{S, U_N, U_P, C, D, T\}$，$C(U) = \left\{\lambda_1, \cdots, \lambda_l, \lambda_{l+1}, \frac{1}{\bar{\lambda}_{l+1}}, \cdots, \lambda_{l+l_0}, \frac{1}{\bar{\lambda}_{l+l_0}}\right\}$ ($|\lambda_i| = 1$, $1 \leqslant i \leqslant l$; $|\lambda_i| < 1$, $l + 1 \leqslant i \leqslant l + l_0$)，相应于 λ_i 的根向量的最高阶数为 n_i．又设 $\{E_t\}$ 是U的谱系．那末，当 $\lambda \in \rho(U)$ 时，

$$(\lambda I - U)^{-1} = \int K(\lambda, t) dE_t + \sum_{\nu=1}^{l} \sum_{i=1}^{2n_\nu+1} \frac{B_{\nu i}}{(\lambda - \lambda_\nu)^i}$$

$$+ \sum_{\nu=l+1}^{l+l_0} \sum_{i=1}^{n_\nu} \frac{B_{\nu i}}{(\lambda - \lambda_\nu)^i} + \frac{B'_{\nu i}}{\left(\lambda - \frac{1}{\bar{\lambda}_\nu}\right)^i},$$

这里

$$K(\lambda, t) = \frac{1}{\lambda - \nu} - \sum_{\nu=1}^{l} \delta(t - \lambda_\nu) \sum_{i=1}^{2n_\nu} \frac{(t - \lambda_\nu)^i}{(\lambda - \lambda_\nu)^{i+1}},$$

$$\delta(\lambda) = \begin{cases} 1, & |\lambda| < \delta; \\ 0, & |\lambda| > \delta, \end{cases}$$

而 δ 满足：$0 < \delta < \min\limits_{\substack{1 \leqslant \mu, \nu \leqslant l \\ \lambda_\mu \neq \lambda_\nu}} |\lambda_\mu - \lambda_\nu|$. 又当 $1 \leqslant i \leqslant l$ 时，$B_{\nu i}$ 是 Π_K 上有界线性算子；当 $l+1 \leqslant i \leqslant l+l_0$ 时，$B_{\nu i} = (\lambda_\nu I - S)^{i-1} P_{\lambda_\nu}$, $B'_{\nu i} = \left(\frac{1}{\bar{\lambda}_\nu} - S^{*-1}\right)^{i-1} P^*_{\bar{\lambda}_\nu}$. P_ν 是 Z 按 S 相应于 $\lambda_{l+1}, \cdots, \lambda_{l+l_0}$ 的根子空间分解在 $\Phi_{\lambda_\nu}(S)$ 上投影，$P^*_{\bar{\lambda}_\nu}$ 是 Z^* 按 S^* 的根子空间 $\{\Phi_{\frac{1}{\bar{\lambda}}}(S^*)\}$ 分解在 $\Phi_{1/\bar{\lambda}_\nu}(S^*)$ 上的投影.

定义 5.9 设 U 是 Π_K 上自共轭算子，$C(U) = \{1\}$. 相应于 1 的根向量最高阶数为 n，又设 $\{E_t\}$ 是 U 的谱系. 对任何 ω_n 中 $F = (f, (a_0, \cdots, a_{2n}))$ $\Big($这里 f 都是单位圆周上 Borel 可测函数，并且存在常数 M，使 $\left| f(t) - \sum\limits_{i=0}^{2n} a_i (t-1)^i \right| < M(t-1)^{2n+1}\Big)$，规定

$$F(U) = \int \left[f(t) - \sum_{i=0}^{2n} a(t-1)^i \right] dE_t + \sum_{i=0}^{2n} a_i (U - I)^i,$$

而

$$\mathscr{D}(F(U)) = \left\{ x \,\middle|\, \int \left| f(t) - \sum_{i=0}^{2n} a_i (t-1)^i \right|^2 d\,\|E_t x\|^2 < \infty \right\}.$$

定理 5.17 设 U 是 Π_K 上酉算子，$C(U) = \{1\}$，相应于 1 的根向量最高阶数为 n. 下列命题成立

(i) $\begin{cases} \bar{F}(U) = F(U)^\dagger \\ (\alpha F + \beta G)(U) = \alpha F(U) + \beta G(U) \\ (FG)(U) = F(U)G(U) \\ \text{当 } F_t = (t, (1, 0, 0, \cdots, 0)) \text{ 时，} F_t(U) = U. \end{cases}$

(ii) 当 f 是连续函数时，$\sigma(F(U)) = \{f(t) \mid t \in \sigma(U)\}$.

(iii) 如果在标准分解 $\Pi_K = N \oplus \{Z + Z^*\} \oplus P$ 之下，$U = \{S, U_N, U_P, C, D, T\}$，那末 $F(U)$ 也具有在同一标准分解下

的三角模型. 当 $F=(f,(a_0,\cdots,a_{2n}))$, $a_0=1$, 而 $|f(t)|=1(t\in C_1)$ 时, $F(U)$ 是酉算子, 并且

$$F(U)=\left\{\sum_{i=0}^{n-1}a_i(S-I)^i,\ I,\ f(U_p),\ \mathscr{F},\ \mathscr{G},\ \mathscr{Q}\right\}$$

($\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{Q}$ 的形式略), 并且 $C(F(U))=\{1\}$.

最后我们指出, 有些定理, 特别如谱映射定理中有关 $f(t)$ 的连续性假设并非必要, 一般只须在临界点附近有足够的可微性即可, 其余的地方只要 Borel 可测即可, 由于对可测函数的谱映射问题在 Hilbert 空间已有讨论, 而除去临界点附近外的地方是和通常 Hilbert 空间同样处理的, 所以这里就不再讨论了.

§6 对称算子代数

本节中我们将给出 Π_K 空间上算子代数方面的初步结果.

1. Π_K 上 J.V.N. 代数

我们用 $B(\Pi_K)$ 表示 Π_K 上有界算子全体. 显然, $B(\Pi_K)$ 是 Π_K 上(由有界算子构成的)代数. 如果以"†"运算作为这个代数的对合运算, 它就成为具有对合的代数, 即成一个对称代数. 如果再以 Π_K 的任何正则分解 $\Pi_K=H_-\oplus H_+$ 所产生的范数 $\|\cdot\|$ 以及相应的算子范数作为代数 $B(\Pi_K)$ 的范数, 那末 $B(\Pi_K)$ 就成为 Banach 代数. 显然, 不同的正则分解所相应的 Banach 代数 $B(\Pi_K)$ 是拓扑同构的.

定义 6.1 设 Ω 是 $B(\Pi_K)$ 的子代数. 如果对任何 $A\in\Omega$, 必然有 $A^\dagger\in\Omega$, 那末称 Ω 是 Π_K 上对称算子代数. 如果 Ω 是 Π_K 上含单位元的对称算子代数, 并且按弱拓扑[1]是闭的, 那末称 Ω 是 Π_K 上 J.V.N. 代数.

---

1) 这里的"弱拓扑"是和通常 Hilbert 空间上情况完全类似的, 即 $\mathscr{U}(0;x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_n;\varepsilon)=\{A\,|\,|(Ax_i,y_i)|<\varepsilon,\ x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n\in\Pi_K,\ A\in\Omega\}$ 是 Ω 的零元的邻域基.

定义 6.2 设 Ω 是 Π_K 上一族有界线性算子，L 是 Π_K 的闭线性子空间。如果 L，$L^{\perp}$ 都是 Ω 中所有算子的不变子空间，那末称 L 是 Ω 的广义约化子空间。特别，当 L 是 Ω 的广义约化子空间，并且 $\Pi_K = L \oplus L^{\perp}$ 时，就称 L 是 Ω 的约化子空间。如果 Ω 除去平凡的约化子空间 $\{0\}$，$\{\Pi_K\}$ 外，再没有广义约化子空间或约化子空间，那末相应地称 Ω 是广义不可约的或不可约的。

显然，当 Ω 的广义约化子空间 L 是非退化时，L 必是 Ω 的约化子空间。又显然，当 Ω 是广义不可约时，Ω 必是不可约的。容易举出例子说明 Ω 是不可约的，但 Ω 并不是广义不可约的。

如果由单个算子 A 所构成的 Ω 是广义不可约或不可约的，那末称 A 是广义不可约的或不可约的算子。显然，A 为广义不可约（或不可约）的充要条件是，A 和 $A^{\dagger}$ 没有公共的非平凡不变子空间 L（或公共的非退化的非平凡不变子空间）。

定理 6.1 假设 Π_K 空间是可析的，那末广义不可约算子全体在 $B(\Pi_K)$ 中按算子范数稠密，即在正则分解 $\Pi_K = H_- \oplus H_+$（由它产生的范数为 $\|\cdot\|$）下，对任何 $C \in B(\Pi_K)$，$\varepsilon > 0$，必存在广义不可约算子 C_1，使得 $\|C - C_1\| < \varepsilon$。

证 证明将分成三步。

(I) 选适当的 $C_1 \in B(\Pi_K)$，使得 $\|C - C_1\| < \varepsilon$（在 (II)，(III) 中将证明 C_1 是广义不可约的）。

令 $C = A + iB$，其中 $A = \frac{1}{2}(C + C^{\dagger})$，$B = \frac{1}{2i}(C - C^{\dagger})$。

a）对于 Π_K 上自共轭算子 A，存在空间的标准分解 $\Pi_K = N \oplus \{Z + Z^*\} \oplus P$，在此分解下，$A = \{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$（见§2 定理 2.8）。令 $\{Z + Z^*\} = H_-^0 \oplus H_+^0$ 是正则分解，并取 $H'_- = N \oplus H_-^0$，$H'_+ = P \oplus H_+^0$。显然，$\Pi = H'_- \oplus H'_+$ 是正则分解，由它导出的内积、范数分别为 $[\cdot, \cdot]'$，$\|\cdot\|'$。由于 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|'$ 是等价的，所以存在 $m, M > 0$，使得

$$m\|x\|' \leqslant \|x\| \leqslant M\|x\|', \quad x \in \Pi_K. \tag{6.1}$$

取 $(P, (\cdot, \cdot))$ 上自共轭算子 $\bar{A}_0$，使得 $\sigma(A_P + \bar{A}_0) \cap (\sigma(S) \cup \sigma(A_N)) = \varnothing$，且作为 $(P, (\cdot, \cdot))$ 上算子时，$\|\bar{A}_0\|' < \frac{\varepsilon}{3}\frac{m}{M}$. 因为 $\sigma(S) \cup \sigma(A_N)$ 是有限集，上述要求是容易办到的.

显然，$\Pi_K = P^\perp \oplus P$. 按此直交分解作 Π_K 上算子

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{A}_0 \end{pmatrix},$$

则它是 Π_K 上自共轭算子(即 $A_0^+ = A_0$)，而且，对任何 $x \in \Pi_K$，假如有表示 $x = n + z + z^* + p$ $(n \in N, p \in P, z \in Z, z^* \in Z^*)$，则有

$$\begin{aligned}\|A_0 x\| &= \|A_0(n + z + z^* + p)\| \\ &\leqslant M\|A_0(n + z + z^* + p)\|' = M\|\bar{A}_0 p\|' \\ &\leqslant M\frac{\varepsilon m}{3M}\|p\|' \leqslant \frac{\varepsilon m}{3}\|x\|' \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\|x\|,\end{aligned} \tag{6.2}$$

即 $\|A_0\| < \frac{\varepsilon}{3}$.

由于 $\sigma(A_P + \bar{A}_0) \cap (\sigma(S) \cup \sigma(A_N)) = \varnothing$，所以 $A + A_0$ 的广义临界点集 $C(A + A_0)$ 是 $\sigma(A + A_0)$ 的某些孤立点所成的集. 设 $C(A + A_0) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_l, \lambda_{l+1}, \bar{\lambda}_{l+1}, \cdots, \lambda_{l+l_0}, \bar{\lambda}_{l+l_0}\}$，当 $1 \leqslant i \leqslant l$ 时，相应于(实) λ_i 的根子空间记作 $\mathfrak{P}_i$；当 $l + 1 \leqslant i \leqslant l + l_0$ 时，相应于 λ_i，$\bar{\lambda}_i$ 的根子空间的直接和记作 $\mathfrak{P}_i$. 这样，$\mathfrak{P}_i (1 \leqslant i \leqslant l + l_0)$ 均非退化. 在 $\mathfrak{P}_i$ 中任取极大负子空间 $N_i (\subset \mathfrak{P}_i)$，作

$$H_C = \{(A + A_0)^j x \mid x \in N_i, i = 1, 2, \cdots, l + l_0, \\ j = 0, 1, 2, \cdots\}.$$

因为 $\sigma(A_P + \bar{A}_0) \cap (\sigma(S) \cup \sigma(A_N)) = \varnothing$，易知 H_C 是闭线性子空间，并且是有限维的. 又因为 H_C 中已含有K维负子空间，所以 H_C 是非退化的，并且 $H_C^\perp$ 是 $A + A_0$ 的不变的正子空间. 取 $(H_C^\perp, (\cdot, \cdot))$ 上自共轭算子 $\bar{A}_1$，使得 $\|\bar{A}_1\| < \frac{\varepsilon}{3}$，并且 $(A + A_0)|_{H_C^\perp} + \bar{A}_1$ 是对角元互不相同的自共轭对角算子，且 $\sigma((A +$

$A_0)|_{H_C^\perp} + \overline{A}_1) \cap (\sigma(S) \cup \sigma(A_N)) = \varnothing$(因为 $H_C^\perp$ 上由$(\cdot,\cdot)$产生的范数与原来正则分解 $\Pi_K = H_- \oplus H_+$ 所产生的范数等价，所以上述要求也是易于办到的)。作 $\Pi_K = H_C \oplus H_C^\perp$ 的算子 $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{A}_1 \end{pmatrix}$。于是 $A + A_0 + A_1$ 便是 Π_K 上自共轭算子。

在 $(H_C^\perp, (\cdot, \cdot))$ 上取完备就范直交系 $\{e_i\}$，使在这个基下，

$$(A + A_0)|_{H_C^\perp} + \overline{A}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \lambda_2 & \\ O & & \ddots \end{pmatrix},$$

从而相应于分解 $\Pi_K = H_C \oplus H_C^\perp$，$A + A_0 + A_1$ 的矩阵表示是

$$A + A_0 + A_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} * & & 0 & \\ \hline & \lambda_1 & & O \\ 0 & & \lambda_2 & \\ & O & & \ddots \end{array}\right), \tag{6.3}$$

b) 在 H_C 上取一组向量 $\{f_i | i = 1, 2, \cdots, m\}$ $(m = \dim H_C)$，使得

$$H_C = \text{span}\{f_i | i = 1, 2, \cdots, m\}, \tag{6.4}$$

$$(f_i, f_j) = \begin{cases} -\delta_{ij}, & 1 \leqslant i \leqslant k, \ 1 \leqslant j \leqslant m \\ \delta_{ij}, & k+1 \leqslant i \leqslant m, \ 1 \leqslant j \leqslant m \end{cases} \tag{6.5}$$

取 Π_K 上自共轭算子 $B_1 \in B(\Pi_K)$，使它在分解 $\Pi_K = H_C \oplus H_C^\perp$ 下，

$$B + B_1 = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

其中的 B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22} 满足下列条件：

(i) $\|B_1\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$;

(ii) $(B_{22}e_i, e_j) \neq 0$, $i, j = 1, 2, \cdots$;

(iii) 记 $m \times m$ 矩阵 $B'_{12} = ((B_{12}e_i, f_j))$，$B'_{21} = ((B_{21}f_i, e_j))$ $(1 \leqslant i, j \leqslant m)$ 有行列式

$$\det B'_{12} \neq 0, \ \det B'_{21} \neq 0.$$

(iv) 记 $\mathscr{F} = \{(i_1, \cdots, i_m) | i_1 < i_2 < \cdots < i_m, i_1, \cdots, i_m$ 均为自然数$\}$，$\mathscr{F}$ 显然是可列集. 令 $\mathscr{F}$ 中元全体为 $F'_1, \cdots, F'_n, \cdots$，作另一可列集 $F_1, \cdots, F_n, \cdots$，使每个 F'_i 在其中重复出现无限多次. 设 $F_k = (i_1, \cdots, i_m)$，记 $2m \times 2m$ 矩阵

$$B^{(k)} = \begin{pmatrix} (B_{21}f_i, e_j)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 2(k-1)m+1 \leq j \leq 2km}} & (B_{22}e_i, e_j)_{\substack{i=i_1,\cdots,i_m \\ 2(k-1)m+1 \leq j \leq 2km}} \end{pmatrix}$$

时，$\det B^{(k)} \neq 0$ ($k = 2, 3, \cdots$).

易知满足条件 (i)—(iv) 的 B_1 是存在的.

作算子 $C_1 = (A + A_0 + A_1) + i(B + B_1)$，显然 $\|C - C_1\| < \varepsilon$.

(II) 证明 C_1 是不可约化算子. 为此，只要证明 $A + A_0 + A_1$ 与 $B + B_1$ 没有公共的非平凡的非退化不变子空间.

a) 设 L 是 $A + A_0 + A_1$ 的不变子空间，并且是非退化的. 记 Π_K 到 H_C 上的投影算子为 P_C，又记

$$L_f = \{P_C x | x \in L\}, \quad L_e = \overline{\{(I - P_C)x | x \in L\}},$$

易知 L_f，L_e 是 $A + A_0 + A_1$ 的不变子空间. 又显然 L_e 是 $A + A_0 + A_1|_{H_C^{\perp}}$ 的不变子空间，从形式 (6.3) 以及 $\lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)$ 并且相应于每个 λ_i 的特征子空间是由 e_i 张成的一维子空间的事实，立即可知必存在自然数的某个子集 N_0，使得 $L_e = \overline{\text{span}}\{e_{n_i} | n_i \in N_0\}$.

设 $e_i \in L_e$，e_i 有唯一分解 $e_i = e_i^L + e_i^{L^\perp}$ ($e_i^L \in L$, $e_i^{L^\perp} \in L^\perp$)，于是

$$\lambda_i(e_i^L + e_i^{L^\perp}) = \lambda_i e_i = (A + A_0 + A_1)e_i$$
$$= (A + A_0 + A_1)(e_i^L + e_i^{L^\perp}),$$

从而

$$\lambda_i e_i^L - (A + A_0 + A_1)e_i^L = (A + A_0 + A_1)e_i^{L^\perp}$$
$$- \lambda_i e_i^{L^\perp} \in L \cap L^\perp = \{0\}.$$

因为 $e_i^L \neq 0$，所以 $e_i^L = e_i$，从而 $L_c \subset L$。

b) 设 L 又是 $B + B_1$ 的不变子空间。

如果 $L_c = \{0\}$，那末 $L = L_f$。适当取一组不全为零的复数 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$，就有 $0 \neq \sum \alpha_i f_i \in L$。因为 B_1 满足 (iii)，所以 $B_{21} f_i\ (i = 1, 2, \cdots, m)$ 线性无关，于是 $\sum \alpha_i B_{21} f_i \neq 0$，但是 $\sum \alpha_i B_{21} f_i = (I - P_C)(B + B_1) \sum \alpha_i f_i \in L_c$。这是矛盾。

设 $e_i \in L_c$，由 a) 可知 $e_i \in L$，所以 $(B + B_1) e_i \in L$。因为

$$(B + B_1) e_i = B_{12} e_i + B_{22} e_i = B_{12} e_i + \sum_j (B_{22} e_i, e_j) e_j,$$

从而

$$(I - P_C)(B_1 + B_2) e_i = \sum_j (B_{22} e_i, e_j) e_j \in L_c. \qquad (6.6)$$

由 (ii) 及 (6.6) 易知，$L_c = \overline{\text{span}}\{e_{n_i} | n_i \in N_0\}$ 中 $N_0 = \{1, 2, \cdots\}$，即 $H_C^\perp \subset L$。但是，B_1 满足 (iii)，所以 $B_{12} e_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 是线性无关，从而 $\text{span}\{B_{12} e_i | i = 1, 2, \cdots, m\} = H_C$。又因为 $H_C^\perp \subset L$，由此可得 $B_{12} e_i \in L (i = 1, 2, \cdots, m)$，于是又有 $H_C \subset L$。这样就有 $L = H_K$。

由 a), b) 可知，$C_1 = (A + A_0 + A_1) + i(B + B_1)$ 没有非平凡的约化子空间。

(III) 最后证明 C_1 没有非平凡的广义约化子空间。

如果退化子空间 L 是 C 的广义约化子空间，那末 L，$L^\perp$ 对 C_1，C_1^* 均不变。于是 $L \cap L^\perp$ 对 $A + A_0 + A_1$，$B + B_1$ 都是不变的。但是 $\dim L \cap L^\perp \leqslant K$，所以只要证明 $A + A_0 + A_1$ 与 $B + B_1$ 没有维数不超过 K 的公共不变子空间即可。

设 L 是 $A + A_0 + A_1$ 的有限维不变子空间，和 (II) 一样，可知 L_c 必是 $(A + A_0 + A_1)|_{H_C^\perp}$ 的不变子空间，所以有 $L_c = \text{span}\{e_{n_i} | i = 1, 2, \cdots, k_0\}$（这里 k_0 是有限数）。为说明方便起见，先讨论简单的情况。

a) 设 $\{n_1, \cdots, n_{k_0}\} \subset \{1, 2, \cdots, m\}$。如果 L 对 $B + B_1$ 也

不变，设有元素 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i+\sum_{i=1}^{m}\beta_i e_i\in L$，那末有 $(B+B_1)\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i+\sum_{i=1}^{m}\beta_i e_i\right)\in L$，从而

$$(I-P_C)(B+B_1)\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i+\sum_{i=1}^{m}\beta_i e_i\right)\in L_e,$$

即 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i B_{21}f_i+\sum_{i=1}^{m}\beta_i B_{22}e_i\in L_e$. 但是

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}\alpha_i B_{21}f_i+\sum_{i=1}^{m}\beta_i B_{22}e_i\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i(B_{21}f_i,e_j)+\beta_i(B_{22}e_i,e_j))e_j,\end{aligned}$$

记 $r_j=\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i(B_{21}f_i,e_j)+\beta_i(B_{22}e_i,e_j))$，又记

$$B_0^{(k)}=\begin{pmatrix}(B_{21}f_i,e_j)_{\substack{1\le i\le m\\2(k-1)m+1\le j\le 2km}} & (B_{22}e_i,e_j)_{\substack{1\le i\le m\\(2k-1)m+1\le j\le 2km}}\end{pmatrix},$$

由于 B_1 满足 (iv)，所以必有无限多个 k，使得 $\det B_0^{(k)}\neq 0$. 对这些 k，当 j 在 $2(k-1)m+1$ 和 $2km$ 之间变化时，必有一个 $r_j\neq 0$，即在 $\sum_{j=1}^{\infty}r_je_j$ 中必含有可列无限多项不是零，此与 $L_e=\operatorname{span}\{e_{n_i}|i=1,2,\cdots,k_0\}$ 中 k_0 是有限数相矛盾。

b) 一般地，由于 $N_0=\{n_i|i=1,2,\cdots,k_0\}$ 是有限集，其中元素个数至多是 m，取 F'_n，使 $N_0\subset F'_n$. 设 $F_{k_i}=F'_n, i=1,2,\cdots$，如果 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i+\sum_{i\in F'_n}\beta_i e_i\in L$，那末同上理，有 $\sum_{j=1}^{\infty}r_je_j\in L_e$，其中

$$r_j=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(B_{21}f_i,e_j)+\sum_{i\in F'_n}\beta_i(B_{22}e_i,e_j).$$

由于 $\det B^{(k_i)}\neq 0\ (i=1,2,\cdots)$，所以 j 在 $2(k_i-1)m+1$ 与 $2k_im$ 之间变化时，必有某个 $r_j\neq 0$，即 $\sum_j r_je_j$ 中有无限多

项不是零．显然，这是不可能的．

由 (II)，(III) 可知，C_1 是 Π_K 上广义不可约化的算子．证毕．

定理 6.2 Π_K 空间的广义不可约 J. V. N. 代数必是 $B(\Pi_K)$．

证 首先证明对于 Π_K 上任何广义不可约的对称代数 Ω，$B\in\Omega'$[1]，必有常数 λ，使得 $B=\lambda I$．

事实上，因为 Ω 是对称的，所以不妨设 $B=B^{\dagger}$，于是 B 必有半负的特征向量；设相应的特征值为 λ，记 $H_\lambda=\{x\mid Bx=\lambda x\}$，显然 $H_\lambda\neq\{0\}$．由于 $B\in\Omega'$，所以 H_λ 是 Ω 中所有算子的公共的不变子空间，但 Ω 是广义不可约的，所以 $H_\lambda=\Pi_K$，即 $B=\lambda I$．

现在证明定理 6.2．显然，只要证明任意取定的 $B\in B(\Pi_K)$ 以及 n 个线性无关的向量 $x_1,\cdots,x_n$ 后，对任何 $\varepsilon>0$，必存在 $A\in\Omega$，使得 $\|Ax_i-Bx_i\|<\varepsilon$ $(i=1,2,\cdots,n)$．

作 Π_{nK} 空间 $\Pi_K^{(n)}=\overbrace{\Pi_K\oplus\cdots\oplus\Pi_K}^{n}$ 以及 $\Pi_K^{(n)}$ 上算子代数

$$\Omega^{(n)}=\{A\oplus\cdots\oplus A\mid A\in\Omega\},\tag{6.7}$$

显然，$\Omega^{(n)}$ 为 $\Pi_K^{(n)}$ 上对称的算子代数．令 $L=\overline{\{Ax_1\oplus\cdots\oplus Ax_n\mid A\in\Omega\}}$，则 L 显然是 $\Pi_K^{(n)}$ 的闭线性子空间，并且 $\Omega^{(n)}L\subset L$．从 Ω 的广义不可约性易知，L 是非退化的（否则 Ω 将有有限维的广义约化子空间，这是不可能的）．令 P 是 $\Pi_K^{(n)}$ 在 L 上的投影．在分解 $\Pi_K^{(n)}=\Pi_K\oplus\cdots\oplus\Pi_K$ 之下，

$$P=(P_{ij})(i,j=1,2,\cdots,n),$$

其中 $P_{ij}\in B(\Pi_K)$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$．从 $\Omega^{(n)}L\subset L$，$\Omega^{(n)}L^{\perp}\subset L^{\perp}$，立即得出 P 与 $\Omega^{(n)}$ 中所有算子可交换，从而 $P_{ij}A=AP_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,n,A\in\Omega)$．根据前面已证明的事实，$P_{ij}=\lambda_{ij}I$ (λ_{ij} 是复数)．但 $P(x_1\oplus\cdots\oplus x_n)=x_1\oplus\cdots\oplus x_n$，所以 $\lambda_{ij}=$

1) Ω' 表示 $B(\Pi_K)$ 中与 Ω 中每个算子可交换的算子全体．

δ_{ij}，即 $P=I$，也就是说，$L=\Pi_K^{(n)}$. 证毕。

定理 6.3 生成 J.V.N. 代数 $B(\Pi_K)$ 的算子全体在 $B(\Pi_K)$ 中按算子范数稠密。

证 对任何 $C\in B(\Pi_K)$ 以及任何 $\varepsilon>0$，由定理 6.1，存在算子 $C_1\in B(\Pi_K)$，使得 $\|C-C_1\|<\varepsilon$，并且 C_1 是广义不可约的算子。因此，由 C_1 生成的 J.V.N. 代数 $\mathfrak{Q}_{C_1}$ 必是广义不可约的。再根据定理 6.2，立即有 $\mathfrak{Q}_{C_1}=B(\Pi_K)$. 证毕。

2. Π_1 空间上对称算子代数的二重换位

引理 6.4 如果 $A_1,\cdots,A_m$ 是 Π_1 空间上有限个可交换的拟幂零自共轭算子，$\mathfrak{Q}$ 是由 $A_1,\cdots,A_m$ 及 I 生成的弱闭代数，那末 $\mathfrak{Q}=\mathfrak{Q}''$.

证 只要对 $D\in\mathfrak{Q}''$ 证明 $D\in\mathfrak{Q}$ 即可。显然，不妨就 D 是自共轭算子情况加以证明。

因为 $A_1,\cdots,A_m$ 和 D 可交换，所以存在半负向量 e，$\text{span}\{e\}$ 是 $A_1,\cdots,A_m$, D 的公共的不变子空间。

如果 $\text{span}\{e\}$ 非退化，即 $(e,e)<0$，注意到 Π_K 空间上拟幂零自共轭算子必是幂零算子，立即可知 $A_i=0(i=1,2,\cdots,m)$，所以 $\mathfrak{Q}'=B(\Pi_1)$，从而 $\mathfrak{Q}''=\{\lambda I\}=\mathfrak{Q}$.

如果 $\text{span}\{e\}$ 退化，那末存在 $A_1,\cdots,A_m$, D 的公共标准分解 $\Pi_1=(\text{span}\{e\}+\text{span}\{e'\})\oplus P$，其中 $(e',e')=0$，$(e,e')=1$, P 是 Π_1 的正闭子空间。对应于上述分解，有下列矩阵表示

$$A_i=\begin{pmatrix}0 & A_{i1} & A_{i2}\\ 0 & 0 & A_{i1}^*\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\text{span}\{e\}\\ P\\ \text{span}\{e'\}\end{matrix}\qquad D=\begin{pmatrix}d & D_1 & D_2\\ 0 & D_P & D_1^*\\ 0 & 0 & d\end{pmatrix}\begin{matrix}\text{span}\{e\}\\ P\\ \text{span}\{e'\}\end{matrix}$$

$$(i=1,2,\cdots,m)\tag{6.8}$$

其中 $A_{i1}p=(p,p_i)e$, $D_1p=(p,p_D)e$, p_i, $p_D\in P$, $i=1,2,\cdots,m$, D_P 是 $(P,(\cdot,\cdot))$ 上自共轭算子，而 A_{i2}, D_2 是两个实数。

作 $D''=D-dI$，有 $D''\in\mathfrak{Q}''$. 因此，不妨在假设 $d=0$ 的情况下证明 $D\in\mathfrak{Q}$.

今证 $D_P=0$：事实上，由 $A_iD=DA_i$ 得到 $A_{i1}D_P=0$，即对一切 $p\in P$，

$$0=A_{i1}D_Pp=(D_Pp,\ p_i)e=(p,\ D_Pp_i)e,$$

从而 $D_Pp_i=0$ $(i=1,2,\cdots,m)$. 任取 $q\in P$，$q\perp\text{span}\{p_i|i=1,2,\cdots,m\}$. 作 $(P,(\cdot,\cdot))$ 上算子 B_1，$B_1p=(p,q)e$，$p\in P$. 再作 Π_1 上算子

$$\widetilde{B}_1=\begin{pmatrix}0 & B_1 & 0\\ 0 & 0 & B_1^*\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

则直接验证可知 $A_i\widetilde{B}_1=\widetilde{B}_1A_i=0$ $(i=1,2,\cdots,m)$，即 $\widetilde{B}_1\in\Omega'$，所以 $\widetilde{B}_1D=D\widetilde{B}_1$，从而 $D_Pq=0$. 由此可知，$D_P=0$.

令 E 是 P 在 $\text{span}\{p_i|i=1,2,\cdots,m\}$ 上的投影，$F=I-E$. 显然，$\mathscr{N}(F)=\text{span}\{p_i|i=1,2,\cdots,m\}$. 对于

$$\widetilde{B}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & F & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

易知 $A_i\widetilde{B}=\widetilde{B}A_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$，所以 $\widetilde{B}D=D\widetilde{B}$. 于是 $Fp_D=0$，即 $p_D=Ep_D\in\text{span}\{p_i|i=1,2,\cdots,m\}$. 令 $p_D=\sum_{i=1}^m d_ip_i$. 下面证明 $\sum_{i=1}^m(I_md_i)p_i=0$. 记 $p_0=\sum_{i=1}^m(I_md_i)p_i$，作 B_2 使 $B_2p=(p,p_0)e$，$p\in P$. 再用 B_2 代替 (6.9) 中 B_1 作 $\widetilde{B}_2$，经计算得

$$A_i\widetilde{B}_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & (p_0,p_i)\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \widetilde{B}_2A_i=\begin{pmatrix}0 & 0 & (p_i,p_0)\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$i=1,2,\cdots,m$$

注意到

$$A_iA_j=\begin{pmatrix}0 & 0 & (p_i,p_j)\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad i,j=1,2,\cdots,m$$

以及 $A_iA_l = A_lA_i$，可知 (p_i, p_l) 都是实数。因此 $(p_i, p_0) = (p_0, p_i)$，从而 $A_i\widetilde{B}_2 = \widetilde{B}_2A_i\ (i = 1, 2, \cdots, m)$，于是，

$$\left(D - \sum_{i=1}^{m}(Red_i)A_i\right)\widetilde{B}_2 = \widetilde{B}_2\left(D - \sum_{i=1}^{m}(Red_i)A_i\right),$$

即 $\left(p_D - \sum_{i=1}^{m}(Red_i)p_i,\ p_0\right) = \left(p_0,\ p_D - \sum_{i=1}^{m}(Red_i)p_i\right)$，也就是说 $p_0 = 0$。

作 $D' = D - \sum_{i=1}^{m}(Red_i)A_i$，显然 $D' \in \Omega''$，因此又可不妨假设 D 的矩阵表示形式 (6.8) 中 $d = 0$，$D_P = 0$，$D_1 = 0$，如果在 $\{p_i\}$ 中有某个 $p_{i_0} \neq 0$，那末 $A_{i_0}^2$ 的矩阵表示中只有 $A_{i_0 2}^2 \neq 0$，并且 $A_{i_0 2}^2 = (p_{i_0}, p_{i_0})$，所以存在实数 α，使得 $D = \alpha A_{i_0}^2$；如果 $\{p_i\}$ 都是零，那末 A_i 的矩阵表示中就只有 A_{i2} 可能非零。当某个 A_i 的 $A_{i2} \neq 0$ 时，将又存在实数 α，使得 $D = \alpha A_i$。否则，A_i 均为零算子，这又回到前面所讨论的平凡的情况。总之，在任何情况下，我们都证明了 $D \in \Omega$。证毕。

定理 6.5 设 $A_1, \cdots, A_m$ 是 Π_1 上有限个可交换的自共轭算子。如果相应于它们的广义临界点的根子空间都是非退化的，那末由它们生成的弱闭代数 $\Omega = \Omega''$。

证 令 p_i 为 Π_1 到 A_i 的广义临界点 λ_i 的根子空间上投影，因为 $\{A_i\}$ 可交换，所以 $\{P_i\}$ 也可交换，从而 $P_1\cdots P_m\Pi_1$ 是非退化的，并且约化 $A_i\ (i = 1, 2, \cdots, m)$。显然，$P_1\cdots P_m\Pi_1$ 仍是 Π_1 型空间，且

$$\Pi_1 = (P_1\cdots P_m\Pi_1)\oplus(P_1\cdots P_m\Pi_1)^{\perp}.$$

令

$$\Omega_1 = \Omega|_{P_1\cdots P_m\Pi_1},\quad \Omega_2 = \Omega|_{(P_1\cdots P_m\Pi_1)^{\perp}}.$$

在 $P_1\cdots P_m\Pi_1$ 上，Ω_1 就是由 $(A_i - \lambda_i I)|_{P_1\cdots P_m\Pi_1}$ 生成的弱闭代数。根据引理 6.4，$\Omega_1 = \Omega_1''$。在 Hilbert 空间 $((P_1\cdots P_m\Pi_1)^{\perp}, (\cdot, \cdot))$ 上，由 J. V. N. 代数二次交换子定理，又有 $\Omega_2 = \Omega_2''$。

如果能证明 $\Omega_1\oplus\Omega_2 = (\Omega_1\oplus\Omega_2)''$，就得到 $\Omega = \Omega''$ 的结论了。

事实上，设 $A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix}\in(\mathfrak{Q}_1\oplus\mathfrak{Q}_2)''$. 因为 $\tilde{I}=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in(\mathfrak{Q}_1\oplus\mathfrak{Q}_2)'$，所以 $A\tilde{I}=\tilde{I}A$. 从而 $A_2=0$，$A_3=0$. 又对任何 $B_1\in\mathfrak{Q}_1'$，$B_2\in\mathfrak{Q}_2'$，显然 $\tilde{B}=\begin{pmatrix}B_1 & 0\\ 0 & B_2\end{pmatrix}\in(\mathfrak{Q}_1\oplus\mathfrak{Q}_2)'$，从而 $A\tilde{B}=\tilde{B}A$，于是又得到 $A_1\in\mathfrak{Q}_1''$，$A_4\in\mathfrak{Q}_2''$，即 $A\in\mathfrak{Q}_1''\oplus\mathfrak{Q}_2''=\mathfrak{Q}_1\oplus\mathfrak{Q}_2$. 证毕.

引理 6.6 设 $\mathfrak{Q}$ 是 Π_K 上交换的 J. V. N. 代数，$\mathfrak{Q}$ 中任何单调投影算子序列必弱收敛，那末 $\mathfrak{Q}$ 中投影算子全体 $\mathscr{P}$ 必是按算子范数有界集.

证 只要证明 $\mathscr{P}$ 在某个正则分解 $\Pi_K=H_-\oplus H_+$ 所导出的范数 $\|\cdot\|$ 下，$\mathscr{P}$ 是按 $\|\cdot\|$ 的算子范数有界即可以了. 证明分三步.

(I) 对于投影算子 P，用 $N(P)$ 表示 $P\Pi_K$ 中包含的极大负性子空间的维数，$\mathscr{P}_-$ 表示 $\mathscr{P}$ 中 $N(P)\neq 0$ 投影算子全体. 显然，$\mathscr{P}_-$ 不是空集. 今证必存在分解 $\Pi_K=\Pi_{K_1}\oplus\cdots\oplus\Pi_{K_l}$，$K_1+\cdots+K_l=K$，每个 Π_{K_i} 都约化 $\mathfrak{Q}$，而且对投影算子 $P\in\mathfrak{Q}_i(\mathfrak{Q}_i=\mathfrak{Q}|^{\Pi_{K_i}})$，$P\Pi_{K_i}$ 含有负子空间时，必有 $N(P)=K_i$.

事实上，记 $K_1=\inf\limits_{P\in\mathscr{P}_-}N(P)$. 由于 $K<\infty$，易知必存在 $P_1\in\mathscr{P}_-$，使得 $N(P_1)=K_1$. 令 $\Pi_{K_1}=P_1\Pi_K$，则 Π_{K_1} 约化 $\mathfrak{Q}$. 记 $\mathfrak{Q}_1=\mathfrak{Q}|^{\Pi_{K_1}}$，$\mathfrak{Q}_1^\perp=\mathfrak{Q}|\Pi_{K_1}^\perp$，相应于分解 $\Pi_K=\Pi_{K_1}\oplus\Pi_{K_1}^\perp$，有

$$\mathfrak{Q}=\mathfrak{Q}_1\oplus\mathfrak{Q}_1^\perp.$$

显然，对 $\mathfrak{Q}_1$ 中任一投影算子 P，如果 $P\Pi_{K_1}$ 中含有负子空间，那末 $N(P)=K_1$. 用 $\mathfrak{Q}_1^\perp$，$\Pi_{K_1}^\perp$ 代替开始的 $\mathfrak{Q}$，Π_K，相应地便有分解 $\Pi_{K_1}^\perp=\Pi_{K_2}\oplus\Pi_{K_2}^\perp$，$\mathfrak{Q}_1^\perp=\mathfrak{Q}_2\oplus\mathfrak{Q}_2^\perp$，而当投影算子 $P\in\mathfrak{Q}_2$，$P\Pi_{K_2}$ 含有负性子空间时，必有 $N(P)=K_2$. 因为 $K<\infty$，所以经有限步后就得到 (I) 的结论.

(II) 证明对 Π_K 上 J. V. N. 代数 $\mathfrak{Q}$，如果当 $\mathfrak{Q}$ 中投影算子 P 的值域 $P\Pi_K$ 含有负子空间时，都有 $N(P)=K$，那末值域含有负子空间的 $\mathfrak{Q}$ 中投影算子全体 $\mathscr{P}_-$ 必按算子范数成为有界集.

如果这个结论不对，那末必有 $\{P_n\}\subset\mathscr{P}_-$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|P_n\|=\infty$。令 $L_i=P_i\Pi_K$。显然，$P_1\cdots P_n\in\mathscr{P}_-$，即 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}L_i$ 含有K维负子空间，从而 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}L_i$ 含有K维半负子空间。但 $P_1\cdots P_n\Pi_K=\bigcap\limits_{i=1}^{n}L_i$，并且(弱)-$\lim\limits_{n\to\infty}P_1\cdots P_n=P\in\Omega$。由§4定理4.4，$P\Pi_K=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}L_i$。然而 $P\Pi_K$ 是非退化的，所以 $P\Pi_K$ 含有K维负子空间。

作分解 $\Pi_K=P\Pi_K\oplus(I-P)\Pi_K$，由它导出的范数为 $\|\cdot\|'$，因为 $P_n(I-P)$ 是 Hilbert 空间 $((I-P)\Pi_K,(\cdot,\cdot))$ 上的投影算子，以及

$$P_n=P_n|_{P\Pi_K}\oplus P_n|_{(I-P)\Pi_K}=P|_{P\Pi_K}\oplus P_n|_{(I-P_n)\Pi_K},$$

所以

$$\|P_n\|'\leqslant\|P\|'+\|P_n(I-P)\|'=\|P\|'+1.$$

这样，$\{\|P_n\|'\}$ 是有界数列。这与假设 $\|P_n\|\to\infty(n\to\infty)$ 相矛盾。

(III) 先证在(II)的假设下，$\mathscr{P}$ 是按算子范数成为有界集。事实上，已知 $\mathscr{P}_-$ 是有界集，而对任何值域是正子空间的投影算子P，必有 $I-P\in\mathscr{P}_-$，从而 $\|P\|\leqslant\|I-P\|+\|I\|$。由此可知，$\mathscr{P}$ 是有界集。对于一般的情况，将(I)，(II)两步结合起来不难得到本引理的结论。证毕。

记Π_K空间上以0及共轭的纯虚数为谱点的代数算子[1)]为$\mathscr{A}_0$。

定理 6.7 设Ω是可析的 Π_K 空间上的交换 J. V. N. 代数，并且Ω中任何单调的投影算子序列必弱收敛，那末必存在自共轭算子 $A\in\Omega$，对任何 $B\in\Omega$，存在相应的 $B_1\in\{A\}''$，使得 $B_1-B\in\mathscr{A}_0$。

证 设A是 Π_K 上自共轭算子，$A\in\Omega$，A的广义临界点为 $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_l;\lambda_{l+1},\bar\lambda_{l+1},\cdots,\lambda_{l+p},\bar\lambda_{l+p}\}$，$\{E_t\}$ 是A的谱系，根据谱系的理论以及本定理的假设易知，当 $1\leqslant j\leqslant l$ 时，$E_{\lambda_j}-E_{\lambda_j-0}\in$

1) A是有界线性算子，如果存在多项式 $p(t)$，使得 $p(A)=0$，则称A是代数算子。

Ω，并且 $(E_{\lambda_j}-E_{\lambda_j-0})\Pi_K=\Phi_{\lambda_j}(A)$. 又显然 $\Phi_{\lambda_j}(A)\dotplus\Phi_{\bar\lambda_j}(A)$ $(l+1\leqslant j\leqslant l+p)$ 是有限维非退化的闭线性子空间，并且相应于它的投影算子 $P_j\in\Omega$，这样就有

$$\Pi_K=\bigoplus_{j=1}^{l}(E_{\lambda_j}-E_{\lambda_j-0})\,\Pi_K\oplus\left(\bigoplus_{j=l+1}^{l+p}P_j\Pi_K\right)\oplus H_A^{\perp},\qquad(6.9)$$

其中 $(E_{\lambda_j}-E_{\lambda_j-0})\Pi_K$ $(1\leqslant j\leqslant l)$，$P_j\Pi_K$ $(l+1\leqslant j\leqslant l+p)$ 都是 Ω 的约化子空间，$H_A^{\perp}$ 是正子空间. 根据所得到的这个事实以及 $K<\infty$，立即可知，存在 Π_K 的分解

$$\Pi_K=\Pi^{(1)}\oplus\cdots\oplus\Pi^{(m)}\oplus H_\Omega,\qquad(6.10)$$

其中 $\Pi^{(i)}(1\leqslant i\leqslant m)$ 都是 Ω 的约化子空间，而在每个 $\Pi^{(i)}$ 上，Ω 中一切自共轭算子都只有单实谱，或互为共轭的非实谱，并且如果有某个 $A\in\Omega$，A 在 $\Pi^{(i)}$ 上的谱是一对共轭复数，那末 $\Pi^{(i)}$ 必是有限维，(6.10) 中的 H_Ω 是 Π_K 的正子空间.

根据分解 (6.10)，Ω 有分解

$\Omega=\Omega_1\oplus\cdots\oplus\Omega_m\oplus\Omega|_{H_\Omega}$，$\Omega_i=\Omega|_{\Pi^{(i)}}(1\leqslant i\leqslant m)$.

在 Hilbert 空间 $(H_\Omega,(\cdot,\cdot))$上，利用已知的 Von-Neumann 的结果，对代数 $\Omega|_{H_\Omega}$ 存在 $\bar A\in\Omega|_{H_\Omega}$，使得 $\{\bar A\}''=\Omega|_{H_\Omega}$.

相应于分解 (6.10)，作 Π_K 上算子

$$A=\begin{pmatrix}1 & & & O\\ & \ddots & & \\ & & m & \\ O & & & \bar A\end{pmatrix},\qquad(6.11)$$

不妨设 $\sigma(\bar A)\subset[-1,0]$，显然 $A\in\Omega$. 在 $\Pi^{(j)}(1\leqslant j\leqslant m)$ 上，如果 Ω_j 中有一个自共轭算子 A_j 的谱是一对共轭复数，那末 $\dim\Pi^{(j)}<\infty$，从而 Ω_j 中一切算子都是代数算子，如果 $\dim\Pi^{(j)}=\infty$，那末 Ω_j 中一切自共轭算子都只有单实谱，从而对任何算子 $A\in\Omega_j$，必有复数 $\alpha+i\beta$，使得 $A-(\alpha+i\beta)I$ 是拟幂零算子. 但 Π_K 型空间上拟幂零算子都是幂零算子，从而 $A-(\alpha+i\beta)I$ 是代数算子，并且 $\sigma(A-(\alpha+i\beta)I)=\{0\}$.

由于 $\sigma(A)=\{1,2,\cdots,m,\sigma(\bar A)\}$，而 $\sigma(\bar A)\subset[-1,0]$，易知 $\{A\}''=\Omega_1\oplus\cdots\oplus\Omega_m\oplus\Omega|_{H_\Omega}=\Omega$. 证毕.

第四章　Π 空间上酉、自共轭和压缩算子

设 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 是完备的不定度规空间，$\Pi=H_-\oplus H_+$ 是一个正则分解，当 $\dim H_-=\dim H_+=\infty$ 时，称 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$（或 Π）是 Крейн 空间．显然，Крейн 空间 Π 是完备不定度规空间中最复杂的一类空间．如果说，Π_K 空间酉、自共轭算子理论比起 Hilbert 空间上相应的理论复杂得多，但毕竟因为 Π_K 空间的负指标是有限的，因而能够获得比较满意的 Π_K 空间上酉、自共轭算子谱论（差不多可以说 Π_K 空间上酉、自共轭算子很接近于 Hilbert 空间酉、自共轭算子）．那末，对于 Π 空间上酉、自共轭算子，几乎不可能设想会有象 Π_K 空间所发生的那种情况．然而，我们仍将在本章中对 Π 空间上酉、自共轭算子谱论以及压缩算子的性质作一定的探讨，作为今后进一步研究的开始．

§1　谱半径和具有分裂谱的酉、自共轭算子

1．范数比和酉算子的谱半径　设 $\Pi=H_-^{(i)}\oplus H_+^{(i)}$ $(i=1,2)$ 是两个正则分解，由它们产生的内积、范数分别是 $[\cdot,\cdot]_i$，$\|\cdot\|_i$ $(i=1,2)$．在这一小节中，我们将先给出范数比

$$\lambda=\sup_{x\neq 0}\frac{\|x\|_2}{\|x\|_1}$$

的表达式，并用它给出 Π 上酉算子的谱半径．

定理 1.1　设 $\Pi=H_-^{(i)}\oplus H_+^{(i)}$ $(i=1,2)$ 是两个正则分解，$\{e_\lambda^{(i)}\mid\lambda\in\Lambda\}$ $(i=1,2)$ 是 $(H_-^{(i)},-(\cdot,\cdot))$ 的完备就范直交系．假设 V 是 $(H_-^{(1)},-(\cdot,\cdot))$ 到 $(H_-^{(2)},-(\cdot,\cdot))$ 的酉算子，即 $Ve_\lambda^{(1)}=e_\lambda^{(2)}(\lambda\in\Lambda)$．用 P_- 表示 Π 在 $H_-^{(1)}$ 的投影算子，并令 $T=P_-V$，那末

(i) T 是 $(H_-^{(1)}, -(\cdot, \cdot))$ 到 $(H_-^{(1)}, -(\cdot, \cdot))$ 的有界线性算子，并且是扩张算子，即存在常数 $M > 0$，使得

$$M\|x\|_1 \geqslant \|Tx\|_1 \geqslant \|x\|_1, \quad x \in H_-^{(1)}. \tag{1.1}$$

(ii) 范数比

$$\tilde{k} = \|T\| + \|(T^*T - I)^{\frac{1}{2}}\| = \|T^*\| + \|(TT^* - I)^{\frac{1}{2}}\|. \tag{1.2}$$

证 (i) 对任何 $x \in H_-^{(1)}$，显然，

$$\begin{aligned}\|x\|_1^2 = \|Vx\|_2^2 &= -(Vx, Vx) \\ &\leqslant -(P_-Vx, P_-Vx) = \|Tx\|_1^2.\end{aligned} \tag{1.3}$$

另一方面，利用范数等价性又有

$$\begin{aligned}\|Tx\|_1^2 &= -(P_-Vx, P_-Vx) \leqslant \|Vx\|_1^2 \\ &\leqslant M^2\|Vx\|_2^2 = M^2\|x\|_1^2,\end{aligned} \tag{1.4}$$

结合 (1.3), (1.4) 就得到 (1.1).

(ii) 首先假设 $\dim H_-^{(1)} = \dim H_-^{(2)} = K < \infty$.

因为 $\{e_i^{(1)}\}$ 是完备就范直交系，所以

$$e_j^{(2)} = \sum_{i=1}^{K} a_i^j e_i^{(1)} + e_j', \quad e_j' \in H_+^{(1)}, \ j = 1, 2, \cdots, K.$$

从 $Ve_j^{(1)} = e_j^{(2)} = Te_j^{(1)} + e_j'$，我们有

$$\begin{aligned}-\delta_{ij} &= (e_i^{(1)}, e_j^{(1)}) = (Ve_i^{(1)}, Ve_j^{(1)}) \\ &= (Te_i^{(1)}, Te_j^{(1)}) + (e_i', e_j').\end{aligned} \tag{1.5}$$

令 $L = H_-^{(1)} \oplus H_-^{(2)}$. 由于 $H_-^{(i)} (i = 1, 2)$ 都是K维负子空间，所以有分解

$$L = H_-^{(1)} \oplus P_1, \quad L = H_-^{(2)} \oplus P_2, \tag{1.6}$$

其中 P_1, P_2 是两个有限维正子空间. 从而

$$\Pi = H_-^{(1)} \oplus P_1 \oplus P, \ \Pi = H_-^{(2)} \oplus P_2 \oplus P, \ P = L^{\perp}. \tag{1.7}$$

对任何 $x \in \Pi$，必有唯一分解：$x = n_1 + p_1 + p$，$n_1 \in H_-^{(1)}$，$p_1 \in P_1$，$p \in P$. 因此

$$\begin{aligned}\|x\|_2^2 = \|(n_1 + p_1) + p\|_2^2 &= \|n_1 + p_1\|_2^2 + \|p\|_2^2 \\ &= \|n_1 + p_1\|_2^2 + \|p\|_1^2.\end{aligned} \tag{1.8}$$

由此可见，如果能证明

$$k' = \sup_{\substack{x \in L \\ x \neq 0}} \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1}$$

是在L上可达的，并且 $k' \geqslant 1$，那末便有 $k' = \tilde{k}$. 事实上，因为 $k' \geqslant 1$，由 (1.8) 立即有

$$\|x\|_2^2 \leqslant k'\|n_1 + p_1\|_1^2 + \|p\|_1^2 \leqslant k'\|x\|_1^2, \quad x = n_1 + p_1 + p \in \Pi, \tag{1.9}$$

即 $\tilde{k} \leqslant k'$. 反之，因为存在 $n_1 + p_1 \in L$，使得

$$\|n_1 + p_1\|_2 \geqslant k'\|n_1 + p_1\|_1,$$

所以又有

$$\tilde{k} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1} \geqslant k'. \tag{1.10}$$

下面只要证明

$$k' = \|T^*\| + \|(TT^* - I)^{\frac{1}{2}}\|. \tag{1.11}$$

显然，L就是任取两组复数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_K$; $\beta_1, \cdots, \beta_K$，所作

$$x = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i e_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{K} \beta_i e_i' \tag{1.12}$$

的全体. 这里 $\{e_i'\}$ 是否线性无关，是否有的向量是零都暂且不管，仍引入K维内积空间 $H = \{(\alpha_1, \cdots, \alpha_K) | \alpha_i$ 是复数，$i = 1, 2, \cdots, K\}$. 对任何H中的 $y = (\alpha_1, \cdots, \alpha_K)$, $z = (\beta_1, \cdots, \beta_K)$，规定内积

$$[x, y] = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i \bar{\beta}_i,$$

并用 $\|\cdot\|$ 表示 $[\cdot, \cdot]$ 导出的范数，如果将 $e_i^{(1)}$ 与H中的

$$e_i = (0, \cdots, 0, \overset{i}{1}, 0, \cdots, 0)$$

视为同一，那末 $H^{(1)}$ 上算子T必可视为H上算子，下面我们也将T视为H上算子.

现在用 $(\cdot, \cdot)$ 来计算由 (1.12) 所表达的x的 $\|x\|_1$, $\|x\|_2$.

$$\|x\|_1^2 = \sum_i |\alpha_i|^2 + \sum_{l,m} \beta_l \bar{\beta}_m (e_l', e_m')$$

$$= \sum_i |\alpha_i|^2 + \sum_{l,m} \beta_l \bar{\beta}_m (-\delta_{lm} - (Te_l^{(1)}, Te_m^{(1)}))$$

$$= \|y\|^2 - \|z\|^2 + \|Tz\|^2. \tag{1.13}$$

为了计算 $\|x\|_2^2$，可利用

$$e_i^{(1)} = -\sum_j (e_i^{(1)}, e_j^{(2)}) e_j^{(2)} + \left[e_i^{(1)} + \sum_j (e_i^{(1)}, e_j^{(2)}) e_j^{(2)} \right],$$

先将 x 关于分解 $L = H_-^{(2)} \oplus P_2$ 的表达式求出，

$$x = \sum_i \alpha_i e_i^{(1)} + \sum_j \beta_j (e_j^{(2)} - Te_j^{(1)})$$

$$= \sum_j \beta_j e_j^{(2)} + \sum_{i,j} [\alpha_i + \beta_j (Te_j^{(1)}, e_i^{(1)})] e_i^{(1)}$$

$$= \sum_j \left[\beta_j - \sum_i \left(\alpha_i + \sum_m \beta_m (Te_m^{(1)}, e_i^{(1)}) \right) \right.$$

$$\left. \cdot (e_i^{(1)}, e_j^{(2)}) \right] e_j^{(2)} + \sum_i \left(\alpha_i + \sum_m \beta_m (Te_m^{(1)}, e_i^{(1)}) \right)$$

$$\cdot \left(e_i^{(1)} + \sum_j (e_i^{(1)}, e_j^{(2)}) e_j^{(2)} \right).$$

因为

$$\beta_j - \sum_i \left(\alpha_i + \sum_m \beta_m (Te_m^{(1)}, e_i^{(1)}) \right) (e_i^{(1)}, e_j^{(2)})$$

$$= \beta_j + \sum_i (\alpha_i - [Tz, e_i])[e_i, Te_j]$$

$$= \beta_j + [y, Te_j] - [Tz, Te_j],$$

所以，如果在分解 $L = H_-^{(2)} \oplus P_2$ 下，

$$x = x_- + x_+ (x_- \in H_-^{(2)}, x_+ \in P_2),$$

那末

$$\|x_-\|_2^2 = \sum_j |\beta_j + [T^*(y - Tz), e_j]|^2$$

$$= \|z + T^*(y - Tz)\|^2, \tag{1.14}$$

而

$$x_+ = \sum_i (\alpha_i - [Tz, e_i]) e_i^{(1)}$$

$$-\sum_j ([y, Te_j] - [Tz, Te_j])e_j^{(2)},$$

利用 $\|x_+\|_2^2 = (x_+, x_+)$，$(e_i^{(1)}, e_j^{(2)}) = -[e_i, Te_j]$，立即得到

$$\|x_+\|_2^2 = -\|y - Tz\|^2 - \|T^*(y - Tz)\|^2 + 2\|T^*(y - Tz)\|^2$$
$$= \|T^*(y - Tz)\|^2 - \|y - Tz\|^2.$$

再结合 (1.14)，就得到

$$\|x\|_2^2 = \|z + T^*(y - Tz)\|^2 + \|T^*(y - Tz)\|^2 - \|y - Tz\|^2. \tag{1.15}$$

显然，y, z 分别独立地取遍H后所得到的向量对 $\{y, z\}$ 全体与向量对 $\{y - Tz, z\}$ 全体一致。令 $a = y - Tz$，那末

$$k' = \sup_{\substack{x \in L \\ x \neq 0}} \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1} = \sup_{\|y\| + \|z\| \neq 0} \cdot \frac{(\|z + T^*(y - Tz)\|^2 + \|T^*(y - Tz)\|^2 - \|y - Tz\|^2)^{\frac{1}{2}}}{(\|y\|^2 - \|z\|^2 + \|Tz\|^2)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \sup_{\|a\| + \|z\| \neq 0} \frac{(\|T^*a + z\|^2 + \|T^*a\|^2 - \|a\|^2)^{\frac{1}{2}}}{(\|a + Tz\|^2 + \|Tz\|^2 - \|z\|^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{1.16}$$

令 $T^* = U\rho$ 是极分解，显然U是酉算子，$\sigma(\rho) \subset [1, \|T\|]$。记 $b = U^{-1}z$，由 (1.16) 可知，

$$k'^2 = \sup_{\|a\| + \|b\| \neq 0} \frac{\|\rho a + b\|^2 + \|\rho a\|^2 - \|a\|^2}{\|\rho b + a\|^2 + \|\rho b\|^2 - \|b\|^2}.$$

不妨设 ρ 的特征值是 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_K$，相应于 λ_i 的特征向量就是 e_i。又设

$$a = \sum_i a_i e_i, \quad b = \sum_i b_i e_i,$$

并令 $\lambda_i b_i + a_i = \xi_i$，$u_i = (|\xi_i|^2 + (\lambda_i^2 - 1)|b_i|^2)^{\frac{1}{2}}$，

$$u = \sum_i u_i e_i,$$

易知

$$\frac{\|\rho a + b\|^2 + \|\rho a\|^2 - \|a\|^2}{\|\rho b + a\|^2 + \|\rho b\|^2 - \|b\|^2} = \{[(\rho^2 - I)u, u] + [\rho^2 u, u]$$

$$-2\sum_i(\lambda_i^2-1)(\lambda_i b_i\xi_i+\lambda_i\bar{b}_i\xi_i)\}\Big/[u, u].$$

由于

$$[(\rho^2-I)u, u]+[\rho^2 u, u]\leqslant(\|\rho^2-I\|+\|\rho^2\|)\|u\|^2$$
$$=(\|(\rho^2-I)^{\frac{1}{2}}\|^2+\|\rho\|^2)\|u\|^2,$$

$$\Big|2\sum_i(\lambda_i^2-1)(\lambda_i b_i\xi_i+\lambda_i\bar{b}_i\xi_i)\Big|=2\Big|\sum_i\lambda_i(\lambda_i^2-1)^{\frac{1}{2}}$$
$$\cdot[(\lambda_i^2-1)^{\frac{1}{2}}b_i\xi_i+(\lambda_i^2-1)^{\frac{1}{2}}\bar{b}_i\xi_i]\Big|$$
$$\leqslant 2\|\rho\|\|(\rho^2-I)^{\frac{1}{2}}\|\|u\|^2,$$

由此可知,对一切 $a\in H$, $b\in H$,

$$k'^2=\sup_{\|a\|+\|b\|\neq 0}\frac{\|\rho a+b\|^2+\|\rho a\|^2-\|a\|^2}{\|\rho b+a\|^2+\|\rho b\|^2-\|b\|^2}$$
$$\leqslant\|(\rho^2-I)^{\frac{1}{2}}\|^2+\|\rho\|^2+2\|\rho\|\|(\rho^2-I)^{\frac{1}{2}}\|$$
$$=(\|\rho\|+\|(\rho^2-I)^{\frac{1}{2}}\|)^2. \tag{1.17}$$

注意到 $\|\rho\|+\|(\rho^2-I)^{\frac{1}{2}}\|=\|T^*\|+\|(TT^*-I)^{\frac{1}{2}}\|$, 就有

$$k'\leqslant\|T^*\|+\|(TT^*-I)^{\frac{1}{2}}\|.$$

反之,由于λ_K是 ρ 的特征值中最大的,取 $b=(0, 0, \cdots, 0, 1)$, $\xi=(0, 0, \cdots, 0, \xi_K)$, $\xi_K=-|\lambda_K^2-I|^{\frac{1}{2}}$, 这时易知(1.17) 成为等式. 这样, 就证明了 (1.11) 成立.

因为 U 是酉算子,所以

$$\|T\|=\|T^*\|,\ \|(T^*T-I)^{\frac{1}{2}}\|=\|(TT^*-I)^{\frac{1}{2}}\|.$$

从而当 $\dim H_-=K<\infty$ 时, (ii) 已证得.

现在假设 $\dim H_-^{(1)}=\infty$. 这时 $\dim H_-^{(1)}=\dim H_-^{(2)}=\infty$. 由于 $\mathscr{R}(V)=H_-^{(2)}$, 而$H_-^{(2)}$ 是 Π 的极大负闭线性子空间,所以

$$TH_-^{(1)}=P_VH_-^{(1)}=P_H_-^{(2)}=H_-^{(1)},$$

即 $\mathscr{R}(T)=H_-^{(1)}$. 又因为 (i) 中已经指出, T 是连续单射,由此可知极分解 $T^*=U\rho$ 中保距部分 U 必是酉算子, 从而 $U^*=U^{-1}$. 利用这一点仍可类似于 $\dim H_-^{(1)}<\infty$ 情况进行讨论,现扼要叙说如下:

考察 $L = H_-^{(1)} + H_-^{(2)}$. 这时 L 未必是闭的，但分解 (1.6) 仍成立，不过 P_1, P_2 未必是闭的. 令 $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ 分别表示 P_1, P_2 的闭包，显然 $\bar{L} = H_-^{(1)} \oplus \bar{P}_1$, $\bar{L} = H_-^{(2)} \oplus \bar{P}_2$, 并且 $\bar{L}$ 是完备子空间，从而有分解

$$\Pi = H_-^{(1)} \oplus \bar{P}_1 \oplus P,\ \Pi = H_-^{(2)} \oplus \bar{P}_2 \oplus P,\ P = L^{\perp}.$$

和有限维情况一样，应该算出 $\bar{L}$ 中 x 的比 $\frac{\|x\|_2}{\|x\|_1}$ 的上确界. 显然，只要求出在 $\bar{L}$ 的稠密集 L 中 x 的上述比的上确界即可. 下面就仍相仿于 $\dim H_-^{(1)} < \infty$ 情况，也引入新的 Hilbert 空间 $H = \{(\alpha_\lambda) | \alpha_\lambda$ 是复数，$\sum_{\lambda \in \Lambda} |\alpha_\lambda|^2 < \infty\}$, $[(\alpha_\lambda), (\beta_\lambda)] = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda \bar{\beta}_\lambda$, 同样可得 (1.16) 式. 利用 $U^* = U^{-1}$, 以及将 ρ 的连续谱先近似地化成点谱，当 ρ 只有纯点谱时可完全仿有限维情况算出比值的上确界，然后再取极限，易知 (ii) 就成立，证毕.

定理 1.2 设 V 是 Крейн 空间 Π 上半酉算子，并且存在正则分解 $\Pi = H_-^{(0)} \oplus H_+^{(0)}$, 使得 $H_-^{(1)} = VH_-^{(0)}$ 是 Π 的极大负闭线性子空间. 那末

(i) 对任何正则分解 $\Pi = H_- \oplus H_+$, VH_- 必是 Π 的极大负闭线性子空间.

(ii) 作正则分解 $\Pi = H_-^{(1)} \oplus H_+^{(1)}$, 令 $T = P_- V^{-1}|_{H_-^{(1)}}$, 则 T 必是 Hilbert 空间 $(H_-^{(1)}, -(\cdot, \cdot))$ 上有界线性算子，并且对一切 $x \in H_-^{(1)}$, $\|x\| \leqslant \|Tx\|$.

(iii) V 作为 Hilbert 空间 $(\Pi, [\cdot, \cdot]_0)$[1] 上算子，必有

$$\|V\| \leqslant \|T^*\| + \|(TT^* - I)^{\frac{1}{2}}\| (= \|T\| + \|(T^*T - I)^{\frac{1}{2}}\|). \tag{1.18}$$

当 $\mathscr{R}(V) \supset H_-^{(0)}$ 时，上式等号成立.

(iv) 令 $H_-^{(n)} = V^n H_-^{(0)}$, $n = 1, 2, \cdots$, $P_-^{(n)}$ 是 Π 在 $H_-^{(n)}$ 上投

1) $[\cdot, \cdot]_i$, $\|\cdot\|_i (i = 0, 1)$ 分别是由正则分解 $\Pi = H_-^{(i)} \oplus H_+^{(i)}$ 导出的内积、范数.

影，以及 $T_n = P_-^{(n)} V^{-n}|_{H_-^{(n)}}$，那末当 $\mathscr{R}(V^n) \supset H_-^{(0)} (n = 1, 2, \cdots)$ 时，V 的谱半径

$$r_{\sigma(V)} = \lim_{n\to\infty} (\|T_n^*\| + \|(T_n T_n^* - I)^{\frac{1}{2}}\|)^{\frac{1}{n}}$$
$$\left(= \lim_{n\to\infty} (\|T_n\| + \|(T_n^* T_n - I)^{\frac{1}{2}}\|)^{\frac{1}{n}} \right). \tag{1.19}$$

证 (i) 令 $H_+^{(1)} = H_-^{(1)\perp}$. 根据第一章 § 3 引理 3.2 的 (v) 以及引理 3.3 的 (iii)，$\Pi = H_-^{(1)} \oplus H_+^{(1)}$，并且这是正则分解.

因为 $\overline{\mathscr{R}(V)} \supset \mathscr{R}(V) \supset H_-^{(1)}$，所以 $\overline{\mathscr{R}(V)}$ 必是非退化的，又根据第二章 § 2 推论 2.6，V 不仅是连续的，而且

$$\mathscr{R}(V) = \overline{\mathscr{R}(V)},$$

从而有分解

$$\mathscr{R}(V) = H_-^{(1)} \oplus P_1, \ \overline{P}_1 = P_1, \ P_1 \subset H_+^{(1)}, \tag{1.20}$$

并且 $\mathscr{R}(V)$ 是完备子空间，而 $\mathscr{R}(V)^\perp = H_+^{(1)} \ominus P_1$.

对任何正则分解 $\Pi = H_- \oplus H_+$，由 V 的保距性，易知

$$\mathscr{R}(V) = VH_- \oplus VH_+,$$

并且是完备子空间 $\mathscr{R}(V)$ 的正则分解. 从而

$$\Pi = (VH_-) \oplus (VH_+ \oplus \mathscr{R}(V)^\perp),$$

并且是正则分解. VH_- 显然是 Π 上极大负的闭线性子空间.

(ii) 视 V 是 $H_-^{(0)}$ 到 $H_-^{(1)}$ 的算子，由定理 1.1 的 (i)，立即得到本定理的结论 (ii).

(iii) 显然，分解 (1.20) 中 $P_1 = VH_+^{(0)}$. 令 $L = H_-^{(0)} + H_-^{(1)}$，有

$$\Pi = H_-^{(0)} \oplus P_0' \oplus P, \ \Pi = H_-^{(1)} \oplus P_1' \oplus P, \ P = L^\perp, \tag{1.21}$$

$H_-^{(0)} \oplus P_0' = \overline{L} = H_-^{(1)} \oplus P_1'$. 按 (1.21)，对任何 $x \in \Pi$，有唯一分解：$x = x_- + x_0' + x_p$，$x_- \in H_-^{(0)}$，$x_0' \in P_0'$，$x_p \in P$. 根据定理 1.1 ($\tilde{k} = \|T^*\| + \|(TT^* - I)^{\frac{1}{2}}\|$)，

$$\begin{aligned}\|Vx\|_0^2 &\leqslant \tilde{k}^2 \|Vx\|_1^2 = \tilde{k}^2 (\|Vx_-\|_1^2 + \|V(x_0' + x_p)\|_1^2) \\ &= \tilde{k}^2 [-(Vx_-, Vx_-) + (V(x_0' + x_p), V(x_0' + x_p))] \\ &= \tilde{k}^2 [-(x_-, x_-) + (x_0', x_0') + (x_p, x_p)] \\ &= \tilde{k}^2 \|x\|_0^2,\end{aligned}$$

即 (1.18) 成立.

特别,当 $\mathscr{R}(V)\supset H_-^{(0)}$ 时,就有 $\mathscr{R}(V)\supset L(-H_-^{(0)}+H_-^{(1)})$. 根据定理 1.1 的证明,易知必有 $x\in\Pi$, $x\neq 0$, 使得

$$\|Vx\|_0^2=\tilde{k}^2\|Vx\|_1^2,$$

即 (1.18) 中等号成立.

(iv) 对每个自然数 n, 根据本定理的 (iii),

$$\|V^n\|=\|T_n^*\|+\|(T_nT_n^*-I)^{\frac{1}{2}}\|;$$

再利用 Гельфанд 谱半径公式

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|V^n\|}=r_{\sigma(V)},$$

立即得到 (1.19). 证毕.

对 Π 上酉算子 U, 有如下重要推论.

定理 1.3 设 U 是 Π 上酉算子, $\Pi=H_-^{(0)}\oplus H_+^{(0)}$ 是正则分解. 对任何自然数 n, $\Pi=U^nH_-^{(0)}\oplus U^nH_+^{(0)}$ 必是正则分解. 如记 $P_-^{(n)}$ 是 Π 在 $U^nH_-^{(0)}$ 上投影, $T_n=P_-^{(n)}U^{-n}|_{U^nH_-^{(0)}}$, 那末

$$r_{\sigma(U)}=\lim_{n\to\infty}(\|T_n^*\|+\|(T_nT_n^*-I)^{\frac{1}{2}}\|)^{\frac{1}{n}}$$

$$\left(=\lim_{n\to\infty}(\|T_n\|+\|(T_n^*T_n-I)^{\frac{1}{2}}\|)^{\frac{1}{n}}\right).$$

2. 具有分裂谱的酉、自共轭算子

定义 1.1 设 U (或 A) 是 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上酉(或自共轭)算子, 如果 $\sigma(U)$ (或 $\sigma(A)$) 能分解成有限个互不相交的非空闭子集 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 的和, 那末称 U (或 A) 的谱是具有有限分裂的.

类似可以引入无限分裂的概念.

定理 1.4 设 U 是 Крейн 空间 Π 上酉算子, 如果存在在包含 $\sigma(U)$ 的某单连区域 Ω 上非常数的解析函数 f, 使得 $\sigma(f(U))$ 可分解成有限个互不相交的非空连络闭集 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 的和, 那末必有分解

$$\Pi=\Pi^{(1)}\dotplus\Pi^{(2)}\dotplus\cdots\dotplus\Pi^{(n)},\tag{1.22}$$

其中每个 $\Pi^{(i)}$ 都是 U 的不变子空间, 并且对每个 i, 必有 i_i, 使得

$$\sigma(f(U)|_{\Pi^{(i)}})\subset\sigma_{i_i}\ (i=1,2,\cdots,n).$$

令 C_0 是单位圆周，如果 $\sigma(U|_{\Pi^{(i)}})\cap C_0\neq\phi$，那末 $\Pi^{(i)}$ 必是完备子空间；如果 $\sigma(U|_{\Pi^{(i)}})\cap C_0=\phi$，那末 $\Pi^{(i)}$ 必是零性闭子空间，并且必存在相应于 $\Pi^{(i)}$ 的 $\Pi^{(i')}$，使得

$$\sigma(U|_{\Pi^{(i')}})=\left\{\lambda\left|\frac{1}{\bar{\lambda}}\in\sigma\left(U\Big|_{\Pi^{(i)}}\right)\right.\right\},$$

$\Pi^{(i)}\dotplus\Pi^{(i')}$ 是完备子空间.

证 在 Ω 内再取有界单连区域 Ω_0，使得 $\bar{\Omega}_0\subset\Omega$，并且

$$\sigma(U)\subset\Omega_0.$$

根据解析函数的性质，易知每个 σ_j 在 $\bar{\Omega}_0$ 内的原象

$$f^{-1}(\sigma_j)=\{t|f(t)\in\sigma_j,t\in\Omega_0\}$$

必可分成有限个互不相交的连络闭集的和. 这样，我们就可以得到 $\bar{\Omega}_0$ 内的有限个互不相交的连络闭集 $\sigma_1',\cdots,\sigma_n'$，它们具有下列性质：

(1) $\sigma_i'\cap\sigma(U)\neq\phi$, $i=1,2,\cdots,n$.

(2) 对每个 $1\leqslant i\leqslant n$，必有 j_i，使得 $f(\sigma_i')\subset\sigma_{j_i}$.

(3) 如果 $(\sigma_i'\cap\sigma(U))\cap C_0=\phi$，那末 $\sigma_i'\cap\sigma(U)$ 不是在开单位圆内，便是在闭单位圆外.

对每个 $\sigma_i'\cap\sigma(U)$，用通常围道积分方法，易知存在闭线性子空间 $\Pi^{(i)}$，它对 U 是不变的，并且 $\sigma(U|_{\Pi^{(i)}})=\sigma_i'\cap\sigma(U)$. 显然，还有 $\sigma(f(U)|_{\Pi^{(i)}})=\sigma(f(U|_{\Pi^{(i)}}))\subset f(\sigma_i')\subset\sigma_{j_i}$.

定理的其余部分可从酉算子的谱必关于单位圆周对称的性质以及第二章§4定理4.9得. 证毕.

为得到有关更特殊的具有有限分裂谱的酉算子的性质，先给出如下引理.

引理 1.5 设 U 是 Крейн 空间 Π 上酉算子，如果存在非零多项式 $p(t)$，使得 $p(U)=0$. 那末

(i) 必存在阶数最低的非零多项式 $q(t)$，使得 $q(U)=0$，并且除常数倍外，$q(t)$ 是唯一的，而一切使得 $p(U)=0$ 的多项式 $p(t)$ 必被 $q(t)$ 整除.

(ii) 设 $q(t) = \prod_{i=1}^{n}(t-\alpha_i)^{m_i}$（当 $i \neq j$ 时，$\alpha_i \neq \alpha_j$，）必有 $\sigma(U) = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$，并且 $\sigma(U) = \sigma_p(U)$.

(iii) $\Phi_{\alpha_i}(U)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 中向量的最高阶数是 m_i. 当 $\alpha_i\bar{\alpha}_j \neq 1$ 时，$\Phi_{\alpha_i}(U) \perp \Phi_{\alpha_j}(U)$. 特别，当 $|\alpha_i| \neq 1$ 时，

$$\frac{1}{\bar{\alpha}_i} \in \sigma(U),$$

并且 $\Phi_{\alpha_i}(U)$ 是零性的.

证 除去(iii) 中的当 $\alpha_i\bar{\alpha}_j \neq 1$ 时，$\Phi_{\alpha_i}(U) \perp \Phi_{\alpha_j}(U)$，以及 $\frac{1}{\bar{\alpha}_i} \in \sigma(U)$ 等属于 Π 空间上酉算子所特有的性质外，引理 1.5 的其余结论对 Banach 空间上有界线性算子都成立，并且是已知的，这里略去证明．证毕.

推论 1.6 设 U 是 Крейн 空间 Π 上的酉算子．如果存在非零多项式 $p(\lambda)$，使得 $p(U)$ 是有限秩算子，那末，

(i) 必有分解

$$\Pi = \Pi^{(1)} \oplus \cdots \oplus \Pi^{(n)},$$

其中 $\Pi^{(i)}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是 U 的不变子空间，而 $\sigma(U|_{\Pi^{(i)}})$ 或是单点集 $\{\alpha_i\}$，这时必有 $|\alpha_i| = 1$；或是两点集 $\left\{\alpha_i, \frac{1}{\bar{\alpha}_i}\right\}$，这时 $|\alpha_i| \neq 1$，但有分解

$\Pi^{(i)} = \Pi_1^{(i)} + \Pi_2^{(i)}$，$\Pi_1^{(i)} = \Phi_{\alpha_i}(U)$，$\Pi_2^{(i)} = \Phi_{\frac{1}{\bar{\alpha}_i}}(U)$.

(ii) $\sigma(U) = \sigma_p(U)$，并且对每个 $\alpha_i \in \sigma_p(U)$，$\Phi_{\alpha_i}(U)$ 中向量的最高阶数是有限的.

证 不妨设多项式 $p(t)$ 的非零根关于单位圆周对称分布，并且对一对对称的根 $\left\{a, \frac{1}{\bar{a}}\right\}$，它们具有相同的重数．因为必要时，可再乘适当多项式做到这一点，仍保持 $p(U)$ 是有限秩算子．下面证明推论.

(i) 由于 $\sigma(p(U)) = \{p_1, \cdots, p_m\}$ 是有限个数，由此便知

$\sigma(U)$ 也是有限集。所以，不难从定理 4.1 立即得到本推论的 (i)。

(ii) 任取 $\alpha\in\sigma(U)$，取围道 γ，γ 内部仅含 $\sigma(U)$ 中点 α，令

$$E_\alpha=\frac{1}{2\pi_i}\oint(\lambda I-U)^{-1}d\lambda,$$

记 $p_0=p(\alpha)$，显然 $\sigma(U|_{E_\alpha\Pi})=\{\alpha\}$，

$$\sigma(p(U)|_{E_\alpha\Pi})=\sigma(p(U|_{E_\alpha\Pi}))=\{p_0\}.$$

如果 $p_0\neq 0$，那末由于 $p(U)$ 是全连续算子(从而 $p(U)|_{E_\alpha\Pi}$ 也是 $E_\alpha\Pi$ 上连续算子)，$E_\alpha\Pi$ 必是有限维空间. 因此，存在 m，使得 $(p(U)-p_0I)^m|_{E_\alpha\Pi}=0$.

如记 $p(t)-p_0=(t-\alpha)^kq(t)(q(\alpha)\neq 0)$，于是

$$[(U-\alpha I)^kq(U)]^m|_{E_\alpha\Pi}=0.$$

由于 $q(U)$ 在 $E_\alpha\Pi$ 上是具有有界逆算子的，所以 $E_\alpha\Pi\subset\Phi_\alpha(U)$，并且 $E_\alpha\Pi$ 中每个元的阶数不超过 mk. 另一方面，由于有分解

$$\Pi=E_\alpha\Pi\dotplus(I-E_\alpha)\Pi,$$

而 α 是 $U|_{(I-E_\alpha)\Pi}$ 的正则点，所以 $\Phi_\alpha(U)\subset E_\alpha\Pi$. 从而当 $p_0\neq 0$ 0 时，推论的 (ii) 成立.

当 $|\alpha|=1$ 时，E_α 是 Π 上投影算子，并且 $E_\alpha\Pi$ 约化 U，从而也约化 $p(U)$.

当 $|\alpha|\neq 1$ 时，由于 $p(\lambda)$ 的根的对称性，易知 $p\left(\frac{1}{\bar\alpha}\right)=p'$ 将随着 $p(\alpha)\neq 0$，而有 $p'\neq 0$，因而 (ii) 在 $E_{\frac{1}{\bar\alpha}}\Pi$ 上也成立. 但 $E_\alpha+E_{\frac{1}{\bar\alpha}}$ 是 Π 上投影算子，并且 $(E_\alpha+E_{\frac{1}{\bar\alpha}})\Pi=E_\alpha\Pi+E_{\frac{1}{\bar\alpha}}\Pi$ 约化 U，从而也约化 $p(U)$.

从上面讨论可知，(ii) 不仅对一切使得 $p(\alpha)\neq 0$ 的 α 成立，而且上述 α 必关于单位圆周对称，如果令 Φ 是这些 α 相应根子空间的直接和，那末 $\Pi=\Phi\oplus\Phi^\perp$，Φ 约化 U，从而也约化 $p(U)$，并且 $\sigma(p(U)|_{\Phi^\perp})=\{0\}$. 下面只要在 $\Phi^\perp$ 上证明 (ii) 成立即可.

首先注意，因为 $p(U)$ 是有限秩的，所以 $0\in\sigma(p(U))$，从而必有 $\beta\in\sigma(U)$，使得 $p(\beta)=0$. 因为 $\beta\neq 0$，所以 $p(t)$ 是非零多项式. 再注意到 $(\Phi^{\perp},(\cdot,\cdot))$ 也是完备的不定度规空间. 这样，利用引理 1.5 立即就得到 (ii) 在 $\Phi^{\perp}$ 上也成立. 证毕.

推论 1.7 设 U 是 Крейн 空间上酉算子. 如果存在

$$p(t)=\prod_{i=1}^{n}(t-\alpha_i),\ |\alpha_i|=1,\ \alpha_i\neq\alpha_j\ (i\neq j),$$

使 $p(U)=0$, 则必有分解 $\Pi=\Pi^{(1)}\oplus\cdots\oplus\Pi^{(n)}$，其中 $\Pi^{(j)}$ 是相应于 α_j 的特征子空间 $\Phi_{\alpha_j1}(U)$ (若 $\alpha_j\bar{\in}\sigma(U)$, 规定 $\Pi^{(j)}=\{0\}$).

特别，如果 $U^n=I$ 时，那末必有分解

$$\Pi=\Pi^{(1)}\oplus\cdots\oplus\Pi^{(n)},$$

其中 $\Pi^{(j)}$ 是相应于 $e^{i\frac{2\pi}{n}j}$ 的特征子空间 (如果 $e^{i\frac{2\pi j}{n}}\bar{\in}\sigma(U)$, 规定 $\Pi^{(j)}=\{0\}$).

由引理 1.5 和推论 1.6 可直接得到推论 1.7.

定理 1.8 设 U 是 Крейн 空间 Π 上酉算子，如果存在非零多项式 $p(t)$，使得 $p(U)$ 是广义幂零算子，那末

(i) 存在唯一的阶数最低的非零多项式 $q(t)$, 使得 $q(U)$ 是广义幂零算子;

(ii) 当 $q(t)=\prod_{i=1}^{n}(t-\alpha_i)^{m_i}$ 时，必有 $\sigma(U)=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$;

(iii) 存在分解 $\Pi=\Pi^{(1)}\oplus\cdots\oplus\Pi^{(m)}$, $\Pi^{(i)}(i=1,2,\cdots,m)$ 都是 U 的约化子空间, $\sigma(U|_{\Pi^{(i)}})$ 或是单点集 $\{\alpha_{j_i}\}$, 这时

$$|\alpha_{j_i}|=1;$$

或是两点集 $\left\{\alpha_{j_i},\frac{1}{\bar{\alpha}_{j_i}}\right\}$, 这时 $|\alpha_{j_i}|\neq 1$, 并且 $\Pi^{(i)}=\Pi_1^{(i)}+\Pi_2^{(i)}$, $\Pi_1^{(i)}$ 和 $\Pi_2^{(i)}$ 都是关于 U 不变的零性子空间,

$$\sigma(U|_{\Pi_1^{(i)}})=\{\alpha_{j_i}\},\ \sigma(U|_{\Pi_2^{(i)}})=\left\{\frac{1}{\bar{\alpha}_{j_i}}\right\};$$

(iv) $q(t)=\prod_{i=1}^{n}(t-\alpha_i)$.

证 (i) 首先注意，对于 Banach 空间上两个可交换的有界线性算子 A，B，它们的谱半径有下列不等式，

$$r_{\sigma(A+B)}\leqslant r_{\sigma(A)}+r_{\sigma(B)},\tag{1.23}$$

利用这个事实和展转相除法可知 (i) 成立。

(ii) 因为 $\sigma(q(U))=\{0\}$，$\sigma(q(U))=\{q(t)\mid t\in\sigma(U)\}$，所以 $\sigma(U)\subset\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$. 但如果有某个 $\alpha_i\bar{\in}\sigma(U)$，显然有

$$q_1(t)=q(t)(t-\alpha_i)^{-m_i}$$

是阶数低于 $q(t)$ 的多项式，并且 $q_1(U)=q(U)(U-\alpha_iI)^{-m_i}$ 仍是广义幂零算子. 这与$q(t)$是最低阶数的假设相矛盾. 所以

$$\sigma(U)=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}.$$

(iii) 对每个α_i，取围道 $\gamma\subset\rho(U)$，其内部仅含 $\sigma(U)$ 中的点 α_i. 令

$$E_{\alpha_j}=\frac{1}{2\pi i}\oint(\lambda I-U)^{-1}d\lambda.$$

当 $|\alpha_j|=1$ 时，取 $\Pi^{(j)}=E_{\alpha_j}\Pi$；当 $|\alpha_j|\neq 1$ 时，取 $\Pi_1^{(j)}=E_{\alpha_j}\Pi$，$\Pi_2^{(j)}=E_{\frac{1}{\bar{\alpha}_j}}\Pi$. 显然，如此取法便满足 (iii).

(iv) 根据 (iii)，空间已有分解 $\Pi=\Pi^{(1)}\oplus\cdots\oplus\Pi^{(m)}$，每个 $\Pi^{(i)}$ 都是完备子空间，并且约化 U. 由此可知，只要证明 $\prod_{i=1}^{n}(U-\alpha_iI)$ 在每个 $\Pi^{(i)}$ 上是广义幂零算子即可.

如果 $\Pi^{(i)}=\Pi_1^{(i)}+\Pi_2^{(i)}$，$\Pi_1^{(i)}=E_{\alpha_i}\Pi$，$\Pi_2^{(i)}=E_{\frac{1}{\bar{\alpha}_i}}\Pi$，注意到$E_{\alpha_i}$，$E_{\frac{1}{\bar{\alpha}_i}}$是有界线性算子，而 $(U-\alpha_iI)$，$\left(U-\frac{1}{\bar{\alpha}_i}I\right)$ 分别在 $E_{\alpha_i}\Pi$，$E_{\frac{1}{\bar{\alpha}_i}}\Pi$ 上是广义幂零算子，从下列显然的不等式

$$\left\|(U-\alpha_iI)^n\left(U-\frac{1}{\bar{\alpha}_i}I\right)^n\Big|_{\Pi^{(i)}}\right\|^{\frac{1}{n}}=\Big\|(U-\alpha_iI)^n$$
$$\times\left(U-\frac{I}{\bar{\alpha}_i}I\right)^n(E_{\alpha_i}+E_{\frac{1}{\bar{\alpha}_i}})\Big\|^{\frac{1}{n}},$$

$$\left\|(U-\alpha_i I)^n\left(U-\frac{1}{\bar{\alpha}_i}I\right)^n E_{\alpha_i}\right\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \left\|\left(U-\frac{1}{\bar{\alpha}_i}I\right)E_{\alpha_i}\right\|$$

$$\times \|(U-\alpha_i I)^n E_{\alpha_i}\|^{\frac{1}{n}},$$

$$\left\|(U-\alpha_i I)^n\left(U-\frac{1}{\bar{\alpha}_i}I\right)^n E_{\frac{1}{\bar{\alpha}_i}}\right\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \|(U-\alpha_i I)E_{\frac{1}{\bar{\alpha}_i}}\|$$

$$\times \left\|\left(U-\frac{1}{\bar{\alpha}_i}I\right)^n E_{\frac{1}{\bar{\alpha}_i}}\right\|^{\frac{1}{n}}$$

以及(1.23)，立即可知 $(U-\alpha_i I)\left(U-\frac{1}{\bar{\alpha}_i}I\right)\Big|_{\Pi^{(i)}}$ 是 $\Pi^{(i)}$ 上广义幂零算子。

同样可证，当 $|\alpha_i|=1$ 时，$(U-\alpha_i I)$ 在 $\Pi^{(i)}=E_{\alpha_i}\Pi$ 上也是广义幂零的。

再利用“两个交换的有界线性算子 A，B，如果其中有一个是广义幂零算子，那末 AB 必是广义幂零的”这一事实，立即得到 $\prod_{i=1}^{n}(U-\alpha_i I)$ 在每个 $\Pi^{(i)}(i=1,2,\cdots,m)$ 上都是广义幂零的，从而在 Π 上也是广义幂零的．证毕．

对于自共轭算子，也有类似于定理 1.4—定理 1.8 的结果．扼要叙述如下(证明略)．

定理 1.9 设 A 是 Kpeйн 空间 Π 上有界自共轭算子，如果存在包含 $\sigma(A)$ 的某个单连区域 Ω 上非常数的解析函数，使得 $\sigma(f(A))$ 可分解成有限个互不相交的非空连络闭集 $\sigma_1,\cdots,\sigma_m$ 的和，则必有分解

$$\Pi=\Pi^{(1)}\dotplus\Pi^{(2)}\dotplus\cdots\dotplus\Pi^{(n)}, \tag{1.24}$$

其中每个 $\Pi^{(i)}$ 都是 A 的不变子空间．对每个 i，必有 i_i，使得

$$\sigma(f(A)|_{\Pi^{(i)}})\subset\sigma_{i_i}.$$

如果 $\sigma(A|_{\Pi^{(i)}})\cap(-\infty,\infty)\neq\phi$，那末 $\Pi^{(i)}$ 必是完备子空间；如果 $\sigma(A|_{\Pi^{(i)}})\cap(-\infty,\infty)=\phi$，那末 $\Pi^{(i)}$ 必是零性闭子空间，并且必存在相应于 $\Pi^{(i)}$ 的 $\Pi^{(i')}$，使得

$$\sigma(A|_{\Pi^{(i')}})=\{\bar{\lambda}|\lambda\in\sigma(A|_{\Pi^{(i)}})\},$$

$\Pi^{(i)} \dotplus \Pi^{(i')}$ 是完备子空间。

定理 1.10 设 A 是 Крейн 空间 Π 上有界自共轭算子。如存在非零多项式 $p(t)$，使得 $p(A)$ 是有限秩算子。那末

(i) 必有分解 $\Pi = \Pi^{(1)} \oplus \cdots \oplus \Pi^{(n)}$，其中每个 $\Pi^{(i)}$ 都是 A 的不变子空间，而 $\sigma(A|_{\Pi^{(i)}})$ 或是单点集 $\{\alpha_i\}$，这时必有 $I_m\alpha_i = 0$；或是两点集 $\{\alpha_i, \bar{\alpha}_i\}$，这时 $I_m\alpha_i \neq 0$，但有分解 $\Pi^{(i)} = \Pi_1^{(i)} \dotplus \Pi_2^{(i)}$，$\Pi_1^{(i)} = \Phi_{\alpha_i}(A)$，$\Pi_2^{(i)} = \Phi_{\bar{\alpha}_i}(A)$。

(ii) $\sigma(A) = \sigma_p(A)$，并且对每个 $\alpha_i \in \sigma_p(A)$，$\Phi_{\alpha_i}(A)$ 中向量的最高阶数是有限的。

定理 1.11 设 A 是 Крейн 空间 Π 上有界自共轭算子，如果存在非零多项式 $p(t)$，使得 $p(A) = 0$，那末

(i) 必存在阶数最低的非零多项式 $q(\lambda)$，使得 $q(A) = 0$，并且除常数倍外，$q(t)$ 是唯一的。而一切使得 $p(A) = 0$ 的多项式 $p(t)$ 必被 $g(t)$ 整除。

(ii) 当 $q(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - \alpha_i)^{m_i}$（当 $i \neq j$ 时 $\alpha_i \neq \alpha_j$）时，必有 $\sigma(A) = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$，并且 $\sigma(A) = \sigma_p(A)$。

(iii) $\Phi_{\alpha_i}(A)$ 中根向量的最高阶数是 m_i，当 $\alpha_i \neq \bar{\alpha}_j$ 时，

$$\Phi_{\alpha_i}(A) \perp \Phi_{\alpha_j}(A).$$

特别是当 $I_m\alpha_i \neq 0$ 时，$\Phi_{\alpha_i}(A)$ 是零性的。

特别，当 $q(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - \alpha_i)$ 时，$\Phi_{\alpha_i}(A) = \Phi_{\alpha_i 1}(A)(i = 1, 2, \cdots, n)$。

定理 1.12 设 A 是 Крейн 空间 Π 上有界自共轭算子，如果存在非零多项式 $p(t)$，使得 $p(A)$ 是广义幂零算子。那末

(i) 必存在唯一的阶数最低的非零多项式 $q(t)$，使得 $q(A)$ 是广义幂零算子。

(ii) 当 $q(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - \alpha_i)^{m_i}$ 时，必有 $\sigma(A) = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$，

(iii) 存在分解 $\Pi = \Pi^{(1)}\oplus\cdots\oplus\Pi^{(m)}$，每个 $\Pi^{(i)}$ 都是 A 的约化子空间. $\sigma(A|_{\Pi^{(i)}})$ 或是单点集 $\{\alpha_{j_i}\}$，这时 $I_m\alpha_{j_i} = 0$；或是两点集 $\{\alpha_{j_i}, \bar{\alpha}_{j_i}\}$，这时 $I_m\alpha_{j_i} \neq 0$，并且 $\Pi^{(i)} = \Pi_1^{(i)} + \Pi_2^{(i)}$，$\Pi_1^{(i)}$ 和 $\Pi_2^{(i)}$ 都是关于 A 不变的零性闭子空间

$$\sigma(A|_{\Pi_1^{(i)}}) = \{\alpha_{j_i}\}, \sigma(A|_{\Pi_1^{(i)}}) = \{\bar{\alpha}_{j_i}\}.$$

(iv) $q(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - \alpha_i)$.

3. 仅具有单点谱，但没有特征值的酉、自共轭算子

在 Hilbert 空间中，一个酉算子（或自共轭算子）如果仅具有单点谱 $\{\alpha\}$，那末它必是 αI. 在 Π_K 空间中，一个酉算子（或自共轭算子）T，如果仅具有单点谱 $\{\alpha\}$，那末 α 必是 T 的特征值，并且 $T - \alpha I$ 必是幂零算子（见下面引理 1.13）. 但是在 Крейн 空间 Π 中，一个酉算子（或自共轭算子），如果仅具单点谱 $\{\alpha\}$，即使

$$|\alpha| = 1$$

（或 $I_m\alpha = 0$），α 也未必是特征值. 在本节中我们将给出这种算子的例子.

引理 1.13 设 U（或 A）是 Π_K 空间上酉算子（或自共轭算子），如果 $\sigma(U) = \{\alpha\}$（或 $\sigma(A) = \{\alpha\}$[1]），那末

$$(U - \alpha I)^{2K+1} = 0$$

（或 $(A - \alpha I)^{2K+1} = 0$）.

证 根据第三章 § 2 的三角模型定理 2.2（或定理 2.8），存在标准分解 $\Pi_K = N\oplus\{Z + Z^*\}\oplus P$，使得 $U = \{S, U_N, U_P, C, D, T\}$（或 $A = \{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$），并且

$$\sigma(S)\cup\sigma(U_N)\cup\sigma(U_P) = \{\alpha\}$$

（或 $\sigma(S)\cup\sigma(A_N)\cup\sigma(A_P) = \{\alpha\}$）. 由此易知 $\Pi_K = \Phi_\alpha(U)$（或 $\Pi_K = \Phi_\alpha(A)$）. 再根据第三章 § 2 推论 2.10 的 (i)，立即有

$$(U - \alpha I)^{2K+1} = 0$$

---

1) 根据第三章 § 2 定理 2.12，A 必是定义在整个 Π_K 上有界算子.

(或 $(A-\alpha I)^{2K+1}=0$). 证毕.

为了给出所要求的例子,需要下列引理.

引理 1.14 设 Q 是 Крейн 空间 Π 上有界线性算子,令

$$A=\frac{1}{2}(Q+Q^{\dagger}),\ B=\frac{1}{2i}(Q-Q^{\dagger}), \tag{1.25}$$

那末 $I+Q$ 为 Π 上酉算子的充要条件是下面 (1.26), (1.27) 式任一成立,

$$Q^{\dagger}Q=QQ^{\dagger}\ 且\ QQ^{\dagger}+Q+Q^{\dagger}=0, \tag{1.26}$$

$$AB=BA\ 且\ A^2+B^2+2A=0. \tag{1.27}$$

证 因为 U 为酉算子的充要条件是 $UU^{\dagger}=U^{\dagger}U=I$, 易知这个条件等价于 (1.26) 成立. 再经直接计算,不难知道 (1.26) 与 (1.27) 等价. 证毕.

由于 $Q=A+iB$, $AB=BA$, 再利用可交换时的谱半径不等式 (1.23), 可见只要 $\sigma(A)=\sigma(B)=\{0\}$, 就能保证

$$\sigma(Q)=\{0\},$$

从而得到 $\sigma(U)=\{1\}$. 如果再能保证 $0\bar{\in}\sigma_p(Q)$, 那末 U 便是仅具单点谱 $\{1\}$ 的酉算子,并且 1 不是 U 的特征值.

例 1.1 令 $\Pi=H_-\oplus H_+$ 是正则分解, $H_\pm=l^2$, $\{e_j^\pm\}$ 分别是 $(H_\pm, \pm(\cdot,\cdot))$ 的完备就范直交系. 令

$$z_j=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_j^-+e_j^+),\ z_j^*=\frac{1}{\sqrt{2}}(-e_j^-+e_j^+),$$

$$j=1,2,\cdots,$$

$$Z=\overline{\mathrm{span}}\{z_j\},\ Z^*=\overline{\mathrm{span}}\{z_j^*\}.$$

显然, $\Pi=Z+Z^*$,并且以 $\{z_j\}$, $\{z_j^*\}$ 作为对偶族分别在 Z, Z^* 上引入内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$, 从而 $\{Z,Z^*\}$ 是 $H.D.$ 对.

在 Hilbert 空间 $(Z,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上任取一个(有界的) 广义幂零算子 B_Z, 但 B_Z 是单射,并且具有稠值域(显然, 这种算子是存在的);视 B_Z 是 $(Z,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 到 $(Z,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的算子,因而 B_Z^* 是 $(Z^*,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 到 $(Z^*,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的有界线性算子, 具有稠值域的

单射，并且 $\sigma(B_Z^*)=\{0\}$. 作 Π 上算子

$$B: z+z^* \longmapsto B_Z z + B_Z^* z^*, \quad z\in Z, \quad z^*\in Z^*, \qquad (1.28)$$

容易直接验证 B 是 Π 上有界自共轭算子，即 $B=B^\dagger$，并且是单射.

注意到 Π 空间和 Hilbert 空间 $(Z,\langle\cdot,\cdot\rangle)\oplus(Z^*,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 拓扑等价，而 B 作为 $(Z,\langle\cdot,\cdot\rangle)\oplus(Z^*,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上算子时，

$$\sigma(B)=\sigma(B_Z)\cup\sigma(B_Z^*)=\{0\},$$

从而 B 是 Π 上广义幂零算子.

由正则分解 $\Pi=H_-\oplus H_+$ 导出的范数记为 $\|\cdot\|$. 下面不妨设 $\|B\|<1$（必要时可除 B 以适当常数）. 取

$$A=-I+(I-B^2)^{\frac{1}{2}},$$

显然，$A=B^2C$，其中 $C=f(B)$，f 是具有实系数，并且在 $[0,\|B\|]$ 上一致收敛的幂级数所定义函数，因而 C 是 Π 上有界自共轭算子，$AB=BA$，并且 $\sigma(A)=\{0\}$.

取 $Q=A+iB$，显然 $\sigma(Q)=\{0\}$，并且

$$Q=B(Bf(B)+iI).$$

根据谱映射定理 $\sigma(Bf(B))=\{0\}$，从而 $0\in\rho(Bf(B)+iI)$. 但 B 是单射，所以 Q 也是单射. 根据 A 的作法，易知

$$A^2+B^2+2A=0.$$

这样，$U=I+Q$ 是 Π 上酉算子，并且仅具单点谱 $\{1\}$，但 1 不是 U 的特征值.

§2 具有标准分解的酉、自共轭算子

本节中主要讨论 Крейн 空间 Π 上的一类特殊的酉、自共轭算子. 它们是 Π_K 空间酉、自共轭算子在 Π 空间上的推广.

1. 具有标准分解的酉、自共轭算子

引理 2.1 设 $(H_1,[\cdot,\cdot]_1)$，$(H_2,[\cdot,\cdot]_2)$ 是两个 Hilbert 空间，S 是 $(H_1,[\cdot,\cdot]_1)$ 到 $(H_2,[\cdot,\cdot]_2)$ 的稠定闭线性算子. 那末，S^* 是 $(H_2,[\cdot,\cdot]_2)$ 到 $(H_1,[\cdot,\cdot]_1)$ 的稠定算子，并且

$$S^{**} = S.$$

本引理是 Hilbert 空间中熟知的结果.

定理 2.2 设 $\Pi = N \oplus \{Z + Z^*\} \oplus P$ 是 Kpeйн 空间Π的一个标准分解,并且 $\{Z, Z^*\}$ 在对偶族 $\{z_i\}$, $\{z_i^*\}$ 下构成 $H.D.$ 对. 记由$\{z_i\}$,$\{z_i^*\}$分别在 Z,Z^* 上产生的内积为$\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\langle\cdot,\cdot\rangle^*$(为简单起见,仍用$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示$\langle\cdot,\cdot\rangle^*$), 并设它们在 Z, Z^* 上产生的拓扑和 Π 上拓扑在 Z, Z^* 上诱导拓扑分别等价. 又设有六个线性算子 $\{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$, 其中 S 是 $(Z, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 稠定闭算子,A_N 是$(N, -(\cdot,\cdot))$上自共轭算子, A_P是$(P, (\cdot,\cdot))$上自共轭算子, F^*, G^*, Q 是$(Z^*, \langle\cdot,\cdot\rangle)$分别到$(N, -(\cdot,\cdot))$, $(P, (\cdot,\cdot))$, $(Z, \langle\cdot,\cdot\rangle)$的有界算子,并且 $Q = Q^*$. 规定 Π 上的线性算子 A 如下:

$$\mathscr{D}(A) = \mathscr{D}(A_N) \oplus \{\mathscr{D}(S) + \mathscr{D}(S^*)\} \oplus \mathscr{D}(A_P), \tag{2.1}$$

$$Az = Sz, \quad z \in \mathscr{D}(S), \tag{2.2}$$

$$An = A_N n + Fn, \quad n \in \mathscr{D}(A_N), \tag{2.3}$$

$$Ap = A_P p + Gp, \quad p \in \mathscr{D}(A_P), \tag{2.4}$$

$$Az^* = S^* z^* - F^* z^* + G z^* + Q z^*, \quad z^* \in \mathscr{D}(S^*), \tag{2.5}$$

那末,A是Π上自共轭算子,并且$\sigma(A) \subset (\sigma(s) \cup \sigma(s^*) \cup \sigma(A_N) \cup \sigma(A_P))$. 当 $\sigma(S) = \sigma_e(S)$ 或 $\{\bar{\lambda} | \lambda \in \sigma_r(S)\} \subset \rho(S)$[1)] 时,还有

$$\sigma(A) = \sigma(S) \cup \sigma(S^*) \cup \sigma(A_N) \cup \sigma(A_P). \tag{2.6}$$

证 首先证明A是Π上对称算子. 事实上, 对任何 $\mathscr{D}(A)$ 中$x = z^* + z + n + p$(即$z^* \in \mathscr{D}(S^*)$, $z \in \mathscr{D}(S)$, $n \in \mathscr{D}(A_N)$, $p \in \mathscr{D}(A_P)$), 按(2.2)—(2.5)有

$$\begin{aligned}(Ax, x) &= (S^*z^* + A_N n - F^*z^* + A_P p + G^*z^* \\ &\quad + Qz^* + Fn + Gp + Sz, x) \\ &= (S^*z^*, z) + (Sz, z^*) + (Qz^*, z^*) \\ &\quad + (A_N n - F^*z^*, n) + (A_P p + G^*z^*, p) \\ &\quad + (Fn + Gp, z^*). \end{aligned} \tag{2.7}$$

---

1) 这时必有 $I_m\lambda \neq 0$.

由于

$$(S^*z^*, z) = \langle S^*z^*, z\rangle = \langle z^*, Sz\rangle = (z^*, Sz), \quad (2.8)$$

$$(Qz^*, z^*) = \langle Qz^*, z^*\rangle = \langle z^*, Qz^*\rangle = (z^*, Qz^*), \quad (2.9)$$

$$-(F^*z^*, n) = \langle z^*, Fn\rangle = (z^*, Fn), \quad (2.10)$$

$$(G^*z^*, p) = \langle z^*, Gp\rangle = (z^*, Gp), \quad (2.11)$$

以及 $(A_N n, n)$, $(A_P p, p)$ 是实数，从 (2.7) 式易知，(Ax, x) 是实数，即 A 是 Π 上对称算子.

再证 $A = A^+$. 显然，只要证明 $\mathscr{D}(A^+)\subset\mathscr{D}(A)$ 即可.

事实上，如果有 $z_i^* + z_i + n_i + p_i \in \Pi$, 其中 $z_i^* \in z^*$, $z_i \in Z$, $n_i \in N$, $p_i \in P$, $i = 1, 2$, 使得对任何 $\mathscr{D}(A)$ 中

$$x = z^* + z + n + p,$$

下式成立

$$(A(z^* + z + n + p), z_1^* + z_1 + n_1 + p_1) = (z^* + z + n + p, z_2^* + z_2 + n_2 + p_2). \quad (2.12)$$

那末，特别取 $x = z$, $z \in \mathscr{D}(S)$, 由 (2.12) 便得到

$$(Sz, z_1^*) = (Az, z_1^* + z_1 + n_1 + p_1) = (z, z_2^* + z_2 + n_2 + p_2) = (z, z_2^*),$$

即

$$\langle Sz, z_1^*\rangle = \langle z, z_2^*\rangle, z \in \mathscr{D}(S),$$

从而必有 $z_1^* \in \mathscr{D}(S^*)$，并且$S^*z_1^* = z_2^*$.

再取 $x = z + n, z \in \mathscr{D}(S)$, $n \in \mathscr{D}(A_N)$, 由 (2.12) 又得到

$$(A(n + z), z_1^* + n_1) = (n + z, S^*z_1^* + n_2),$$

即 $(A_N n, n_1) + (Fn, z_1^*) = (n, n_2)$ 对一切 $n \in \mathscr{D}(A_N)$ 成立. 从而

$$-(A_N n, n_1) = -(n, n_2 + F^*z_1^*), \ n \in \mathscr{D}(A_N).$$

这就是说，必有 $n_1 \in \mathscr{D}(A_N)$, 并且 $A_N n_1 = n_2 + F^*z_1^*$ (即 $n_2 = A_N n_1 - F^*z_1^*$).

同样，特取 $x = z + p$, $z \in \mathscr{D}(S)$, $p \in \mathscr{D}(A_P)$, 就得到 $p_1 \in \mathscr{D}(A_P)$ 并且 $p_2 = A_P p_1 + G^*z_1^*$.

最后，再特取 $x = z^*$, $z^* \in \mathscr{D}(S^*)$, 由 (2.12) 得到

$$(S^*z^*, z_1) = (z^*, z_2 - Qz_1^* - Fn_1 - Gp_1), \quad z^* \in \mathscr{D}(S^*),$$
即
$$\langle S^*z^*, z_1\rangle = \langle z^*, z_2 - Qz_1^* - Fn_1 - Gp_1\rangle, \quad z^* \in \mathscr{D}(S^*).$$
这就是说，$z_1 \in \mathscr{D}(S^{**})$，并且 $z_2 = S^{**}z_1 + Qz_1^* + Fn_1 + Gp_1$. 再注意到 $S^{**} = S$，所以 $z_2 = Sz_1 + Qz_1^* + Fn_1 + Gp_1$.

总结上面证明的结果，就得到 $z_1^* + z_1 + n_1 + p_1 \in \mathscr{D}(A)$，并且还直接地得到

$$\begin{aligned} A^+(z_1^* + z_1 + n_1 + p_1) &= z_1^* + z_2 + n_2 + p_2 \\ &= S^*z_1^* + A_N n_1 - F^*z_1^* + A_P p_1 \\ &\quad + G^*z_1^* + Sz_1 + Qz_1^* + Fn_1 + Gp_1 \\ &= A(z_1^* + z_1 + n_1 + p_1). \end{aligned}$$

下面证明 (2.6)：用 $\|\cdot\|$ 表示正则分解 $\Pi = H_-\oplus H_+$ 所导出的范数，其中 $H_-\supset N$, $H_+\supset P$. 用 $\|\cdot\|_1$ 表示 $(Z, \langle\cdot, \cdot\rangle)$, $(Z^*, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ 上范数，$\|\cdot\|$ 在 Z, Z^* 上的诱导范数与 $\|\cdot\|_1$ 是等价的.

证 $(\sigma(S)\cup\sigma(S^*))\subset\sigma(A)$：事实上，如果 $\lambda \in \sigma_a(S)$，那末存在 $\{z_n\}\subset Z$, $\|z_n\|_1 = 1$, $n = 1, 2, \cdots$，使得
$$\|(S - \lambda I)z_n\|_1 \to 0 (n \to \infty).$$
从而 $\|(A - \lambda I)z_n\| \to 0 (n \to \infty)$，并且存在常数 $m > 0$,
$$\|z_n\| \geqslant m \quad (n = 1, 2, \cdots),$$
即 $\lambda \in \sigma_c(A)$.

如果 $\lambda \in \sigma_r(S)$，那末必有 $\bar{\lambda} \in \sigma_p(S^*)$，并且 $\bar{\lambda} \in \rho(S)$. 所以存在非零向量 z_0^*，使得 $(S^* - \bar{\lambda}I)z_0^* = 0$，并且
$$\begin{aligned} (A - \bar{\lambda}I)[z_0^* &+ (A_N - \bar{\lambda}I)^{-1}F^*z_0^* - (A_P - \bar{\lambda}I)^{-1}G^*z_0^* \\ &(S - \bar{\lambda}I)^{-1}(-Qz_0^* - F(A_N - \bar{\lambda}I)^{-1}F^*z_0^* \\ &\quad + G(A_P - \bar{\lambda}I)^{-1}G^*z_0^*)] = 0, \end{aligned}$$
即 $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A)\subset\sigma(A)$. 因为 $\sigma(A)$ 关于实轴是对称的（见第二章§1 定理 1.6 的 (iv)），所以 $\lambda \in \sigma(A)$.

因为
$$\sigma(S^*) = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(S)\}, \quad \sigma(S) = (\sigma_a(S)\cup\sigma_r(S))\subset\sigma(A),$$
而且 $\sigma(A)$ 关于实轴对称，所以又有 $\sigma(S^*)\subset\sigma(A)$.

再证 $\sigma(A_N)\cup\sigma(A_P)\subset\sigma(A)$. 事实上，如果 $\lambda\in\sigma(A_N)-\sigma(S)$，那末必有 $\{n_m\}\subset N$，$\|n_m\|=1$，$m=1,2,\cdots$，使得

$$\|(A_N-\lambda I)n_m\|\to 0(m\to\infty).$$

取 $z_m=(S-\lambda I)^{-1}Fn_m$，$m=1,2,\cdots$，显然

$$\|n_m-z_m\|\geqslant 1,\ m=1,2,\cdots,$$

且

$$(A-\lambda I)(n_m-z_m)=(A_N-\lambda I)n_m,\ m=1,2,\cdots,$$

由此可知 $\|(A-\lambda I)(n_m-z_m)\|\to 0(m\to\infty)$，从而 $\lambda\in\sigma(A)$.

同样可证：当 $\lambda\in\sigma(A_P)-\sigma(S)$ 时，$\lambda\in\sigma(A)$.

这样，我们就得到 $\sigma(S)\cup\sigma(S^*)\cup\sigma(A_N)\cup\sigma(A_P)\subset\sigma(A)$.

反之，对任何 $\lambda\bar{\in}\sigma(S)\cup\sigma(S^*)\cup\sigma(A_N)\cup\sigma(A_P)$，我们可类似于第三章中 §4 引理 4.7，直接算出

$$\begin{aligned}(\lambda I-A)^{-1}=\{&(\lambda I-S)^{-1},\ (\lambda I-A_N)^{-1},\ (\lambda I-A_P)^{-1},\\ &(\lambda I-S)^{-1}F(\lambda I-A_N)^{-1},\\ &(\lambda I-S)^{-1}G(\lambda I-A_P)^{-1},\ (\lambda I-S)^{-1}[Q\\ &-F(\lambda I-A_N)^{-1}F^*+G(\lambda I-A_P)^{-1}G^*]\\ &\times(\lambda I-S^*)^{-1}\}\end{aligned}\tag{2.13}$$

由于 $(\lambda I-S)^{-1}$，$(\lambda I-A_N)^{-1}$，$(\lambda I-A_P)^{-1}$，$(\lambda I-S^*)^{-1}$，Q，F，G 都是有界算子，所以 $(\lambda I-A)^{-1}$ 也是有界的，即 $\lambda\bar{\in}\sigma(A)$，从而 (2.6) 成立. 证毕.

在定理 2.2 中，为了得到谱的等式 (2.6)，对于 S 具有剩余谱（即 $\sigma_r(S)\neq\varnothing$）时，我们假设了 $\{\bar{\lambda}\mid\lambda\in\sigma_r(s)\}\subset\rho(S)$. 下面的例子说明这个条件是不可少的.

例 2.1 设 $\Pi=H_-\oplus H_+$，$H_\pm=l^2$，$\{e_i^\pm\}$ 分别是 $(H_\pm,\ \pm(\cdot,\cdot))$ 中完备规范直交系，令

$$z_i=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_i^-+e_i^+),\ z_i^*=\frac{1}{\sqrt{2}}(-e_i^-+e_i^+),\ i=1,2,\cdots.$$

记 $Z=\overline{\mathrm{span}}\{z_i\}$，$Z^*=\overline{\mathrm{span}}\{z_i^*\}$，显然，在对偶族 $\{z_i\}$，$\{z_i^*\}$ 下，$\{Z,\ Z^*\}$ 成为 $H.D.$ 对. 由它们产生的 Hilbert 空间 $(Z,\langle\cdot,\cdot\rangle)$，$(Z^*,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上拓扑分别与 Π 在 Z，Z^* 上诱导的拓

扑等价。假设 U_0 是 $(Z, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ 在基 $\{z_i\}$ 下的单向平移算子，当 Z^* 视为 Z 的对偶时，U_0^* 在 $\{z_i\}$ 的对偶基 $\{z_i^*\}$ 下满足

$$U_0^* z_1^* = 0, \; U_0^* z_i^* = z_{i-1}^* \; (i = 2, 3, \cdots).$$

再假定 Z^* 到 Z 的有界线性算子 Q 如下：

$$Q \sum_{i=1}^{\infty} b_i z_i^* = b_1 z_1 \quad \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^2 < \infty\right), \tag{2.14}$$

显然 $Q = Q^*$. 今作 $\Pi = Z + Z^*$ 上算子 A 如下：

$$A(z + z^*) = U_0 z + U_0^* z^* + Q z^*, \quad z \in Z, \quad z^* \in Z^*, \tag{2.15}$$

根据定理 2.2，A 是 Π 上自共轭算子，而且是有界的。显然 $0 \in \sigma(U_0)$，然而下面我们可证明 $0 \in \rho(A)$.

事实上，因为

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z_i \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty\right), \; z^* = \sum_{i=1}^{\infty} b_i z_i^* \; \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^2 < \infty\right),$$

所以

$$A(z + z^*) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z_{i+1} + \sum_{i=2}^{\infty} b_i z_{i-1}^* + b_1 z_1. \tag{2.16}$$

由于 $z + z^* = 0$ 的充要条件是 $a_i = 0$，$b_i = 0$ $(i = 1, 2, \cdots)$，由 (2.16) 可知 A 是一对一的，并且 $A\Pi = \Pi$. 根据逆算子定理，$0 \in \rho(A)$，可见 $\sigma(A) \neq \sigma(U_0) \cup \sigma(U_0^*)$.

我们还应该注意，虽然按定理 2.2 所获得的一类自共轭算子是 Π 空间上特殊的自共轭算子类，同时，它们也足以说明 Π 空间自共轭算子远比 Π_K 空间的自共轭算子复杂（在第二章 §3 例 3.1 中已指出，即使 Π 是可析的，也有 Π 上自共轭算子的特征值是整个复平面）. 现在，将再用定理 2.2 来说明 Π 空间上的自共轭算子谱的有界性、算子的有界性以及乘方运算的复杂性.

例 2.2 第三章 §2 定理 2.12 已证明 Π_K 上自共轭算子是有界的，等价于它的谱是有界集. 本例要说明 Π 空间上存在全平面都是正则点的自共轭算子（当然必是无界的）.

$\Pi, H_\pm, Z, Z^*$ 等都与例2.1中相同. 在 Hilbert 空间 $(Z, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 任取稠定闭算子 S, 但要求 $\sigma(S)=\varnothing$ (这种算子是存在的, 例如 B 是 Hilbert 空间 $(Z, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上有界的具有稠值域并且是一对一的广义幂零算子, 令 $S=B^{-1}$, 那末 S 便是 $(Z, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上的稠定闭算子, 并且 $\sigma(S)=\varnothing$), 显然 $\sigma(S^*)=\varnothing$. 作 Π 上的稠定线性算子 A

$$A(z+z^*)=Sz+S^*z^*,\ z\in Z,\ z^*\in Z^*. \tag{2.17}$$

根据定理 2.2, A 是 Π 上的自共轭算子.

如记正则分解 $\Pi=H_-\oplus H_+$ 所产生的内积是 $[\cdot,\cdot]$. 显然, Z, Z^* 按 $[\cdot,\cdot]$ 是直交的. 由此, 根据 (2.17), 有

$$\sigma(A)=\sigma(S)\cup\sigma(S^*)=\varnothing.$$

例 2.3 第三章 § 3 定理 3.3 证明了 Π_K 上自共轭算子 A 的乘方 $A^n(n=1,2,\cdots)$ 仍都是 Π_K 上自共轭算子. 本例要说明 Π 空间上自共轭算子 A 的 A^2 可能不是稠定算子 (其实还可做到 $\mathscr{D}(A^2)=\{0\}$).

Π, $H_\pm$, $\{z_i\}$, $\{z_i^*\}$, $(Z, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $(Z^*, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 等都与例 2.1 中相同. 令 ρ 是 Hilbert 空间 $(Z, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上如下的线性算子:

$$\begin{cases}\mathscr{D}(\rho)=\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz_n\ \middle|\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_{2k}|^2k^2+\sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_{2k+1}|^2<\infty,\right.\\ \rho\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz_n=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}z_{2k+1}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(2k)a_{2k}z_{2k},\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz_n\in\mathscr{D}(\rho).\end{cases} \tag{2.18}$$

显然, ρ 是 $(Z, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上自共轭算子. 记

$$Z_1=\overline{\mathrm{span}}\{z_{2k+1}|k\geqslant 0\},\ Z_2=\overline{\mathrm{span}}\{z_{2k}|k\geqslant 1\},$$

则有 $Z_1\oplus Z_2=Z$, 并且 Z_1 约化 ρ, 而 $\rho|_{Z_1}=I$. 令 U 是 $(Z, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 到 $(Z_1, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的酉算子, 例如取 U 是满足:

$$Uz_n=z_{2n-1}(n=1,2,\cdots),$$

易知算子 $T=U\rho$ 是 $(Z, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上的稠定闭算子.

将基 $\{z_{2k}\}$ 拆成可数个互不相交的可数集

$$\{z_{2k}|k=1,2,\cdots\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{z_{n_i}|i=1,2,\cdots\}^{1)}.$$

对每个集 $\{z_{n_i}|i=1,2,\cdots\}$（固定 n）作一相应的向量

$$e_n=\sum_{i=1}^{\infty}a_i^{(n)}z_{n_i},$$

这里

$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_i^{(n)}|^2<1,$$

但

$$\sum_{i=1}^{\infty}|n_ia_i^{(n)}|^2=\infty,$$

即 $e_n\bar{\in}\mathscr{D}(\rho)$. 令 $Z_0=\overline{\text{span}}\{e_n|n=1,2,\cdots\}$, 显然 $Z_0\subset Z_2$, 并且 Z_0 中任何非零元 z_0 都不属于 $\mathscr{D}(\rho)$. 事实上，如果

$$z_0=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n,$$

并且 $z_0\in\mathscr{D}(\rho)$, 那末必有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|n_ia_na_i^{(n)}|<\infty,$$

但由于

$$\sum_{i=1}^{\infty}|n_ia_i^{(n)}|^2=\infty,$$

所以只有 $a_n=0$ $(n=1,2,\cdots)$, 即 $z_0=0$.

令 B 是 Hilbert 空间 $(Z,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 到 $(Z_0,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上的有界线性算子，并且 B^{-1} 也是有界的. 作 $(Z,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 算子 S 如下:

---

1) 这里下标 n_i 视为二指标 (n,i) 的下标，同时 n_i 又表示某个偶数，而 $\{n_i\}$ 全体正是偶数全体.

$$S = T + B, \quad \mathscr{D}(S) = \mathscr{D}(T) = \mathscr{D}(\rho). \tag{2.19}$$

由于 T 是稠定闭算子，B 是连续的，从而 S 是稠定闭算子．当 $z \in \mathscr{D}(S)$，$z \neq 0$ 时，必有 $Bz \neq 0$．注意到

$$\mathscr{R}(T) \subset Z_1 \subset \mathscr{D}(\rho) = \mathscr{D}(S), \quad \mathscr{R}(B) = Z_0,$$

而 $Z_0 \perp Z_1$，$Z_0 \cap \mathscr{D}(\rho) = \{0\}$，从而对任何 $z \in \mathscr{D}(S)$，$z \neq 0$，必有 $Sz \neq 0$，并且 $Sz \bar{\in} \mathscr{D}(\rho) = \mathscr{D}(S)$．换句话说，

$$\mathscr{D}(S^2) = \{0\}.$$

作 Π 上稠定算子 A：

$$A(z + z^*) = Sz + S^* z^*, \quad z \in \mathscr{D}(S), \quad z^* \in \mathscr{D}(S^*), \tag{2.20}$$

根据定理 2.2，A 是 Π 上自共轭算子．显然，$\mathscr{D}(A^2) \subset \mathscr{D}(S^*)$，所以 A^2 不是稠定的．从上面对 A 的假定可见，如果将 (2.19) 中算子 B 取得适当一点(依赖于 U 的选取)，还可做到由 (2.20) 所定义的算子满足 $\mathscr{D}(A^2) = \{0\}$．

类似于定理 2.2，对 Крейн 空间 Π 上酉算子有如下定理．

定理 2.3 设 $\Pi = N \oplus \{Z + Z^*\} \oplus P$ 是 Крейн 空间 Π 的一个标准分解，并且 $\{Z, Z^*\}$ 在对偶族 $\{z_i\}$，$\{z_i^*\}$ 下构成 H. D. 对．记由 $\{z_i\}$，$\{z_i^*\}$ 分别在 Z，Z^* 上产生的内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，$\langle\cdot,\cdot\rangle^*$ (为简单起见，仍用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $\langle\cdot,\cdot\rangle^*$)，设它们在 Z，Z^* 上产生的拓扑和 Π 上拓扑在 Z，Z^* 上诱导的拓扑分别等价．又设有六个线性算子 $\{S, U_N, U_P, C, D, T\}$，其中 S 是 $(Z, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上有界算子，并且 $0 \in \rho(S)$，U_N 是 $(N, -(\cdot,\cdot))$ 上酉算子，U_P 是 $(P, (\cdot,\cdot))$ 上酉算子，C, D, T 是 $(Z^*, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 分别到 $(N, -(\cdot,\cdot))$，$(P, (\cdot,\cdot))$，$(Z, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的有界算子，并且 $T = -T^*$．规定 Π 上线性算子 U 如下：

$$\begin{cases} Uz = Sz, \quad z \in Z, \\ Un = U_N n + Fn, \quad F = SC^* U_N, \quad n \in N, \\ Up = U_P p + Gp, \quad G = -SD^* U_P, \quad p \in P, \\ Uz^* = S^{-1*} z^* + Bz^* + Cz^* + Dz^*, \quad z^* \in Z^*, \\ B = \dfrac{1}{2} S(C^* C - D^* D) + ST, \end{cases} \tag{2.21}$$

那末U是Π上酉算子，并且

$$\sigma(U)\subset\sigma(S)\cup\sigma(S^{-1*})\cup\sigma(U_N)\cup\sigma(U_P),$$

当 $\sigma(s)=\sigma_d(s)$ 或

$$\left\{\frac{1}{\bar\lambda}\,\middle|\,\lambda\in\sigma_r(s)\right\}\subset\rho(s)$$

时，还有

$$\sigma(U)=\sigma(S)\cup\sigma(S^{-1*})\cup\sigma(U_N)\cup\sigma(U_P). \qquad (2.22)$$

本定理中有关U是酉算子的结论可仿Π_K空间情况直接加以验证。这里从略。等式 (2.22) 的证明的关键一步是证

$$\sigma_r(S)\subset\sigma(U),$$

其证明如下：当 $\lambda\in\sigma_r(S)$ 时，由假设，显然有 $|\lambda|\neq 1$ 并且

$$\frac{1}{\bar\lambda}\in\sigma_p(S^{-1*}),$$

所以有 $z_0^*\in Z^*$，$z_0^*\neq 0$，且有

$$\left(S^{-1*}-\frac{1}{\bar\lambda}I\right)z_0^*=0,$$

$$\begin{aligned}\left(U-\frac{1}{\bar\lambda}I\right)\Big[z_0^*&-\left(U_N-\frac{1}{\bar\lambda}I\right)^{-1}Cz_0^*\\&-\left(U_P-\frac{1}{\bar\lambda}I\right)^{-1}Dz_0^*+\left(S-\frac{1}{\bar\lambda}I\right)^{-1}\\&\times\Big(-Bz_0^*+F\left(U_N-\frac{1}{\bar\lambda}I\right)^{-1}Cz_0^*\\&+G\left(U_P-\frac{1}{\bar\lambda}I\right)^{-1}Dz_0^*\Big)\Big]=0,\end{aligned}$$

即$\dfrac{1}{\bar\lambda}\in\sigma_p(U)$。再利用 $\sigma(U)$ 关于单位圆周对称性，就得到 $\lambda\in\sigma(U)$。等式 (2.22) 的其余部分的证明完全类似于定理 2.2。这里也从略。

当 $\lambda\in\rho(U)$ 时，预解式 $(\lambda I-U)^{-1}$ 的表达式如下：

$$
\begin{cases}
(U-\lambda I)^{-1}z=(S-\lambda I)^{-1}z, \quad z\in Z, \\
(U-\lambda I)^{-1}n=(U_N-\lambda I)^{-1}n-(S-\lambda I)^{-1}F(U_N-\lambda I)^{-1}n, \\
\qquad F=SC^*U_N, \quad n\in N, \\
(U-\lambda I)^{-1}p=(U_P-\lambda I)^{-1}p-(S-\lambda I)^{-1}G(U_P-\lambda I)^{-1}p, \\
\qquad G=-SD^*U_P, \quad p\in P, \\
(U-\lambda I)^{-1}z^*=(S^{-1*}-\lambda I)^{-1}z^*+B'z^*+C'z^*+D'z^*, \\
\qquad z^*\in Z^*, \\
C'=-(U_N-\lambda I)^{-1}C(S^{-1*}-\lambda I)^{-1}, \quad D'=-(U_P-\lambda I)^{-1}D \\
\qquad \times(S^{-1*}-\lambda I)^{-1}, \\
B'=-(S-\lambda I)^{-1}\{B(S^{-1*}-\lambda I)^{-1}+FC'+GD'\}, \\
B=\frac{1}{2}S(C^*C-D^*D)+ST.
\end{cases} \tag{2.23}
$$

从定理 2.2, 2.3 可见,即使象定理 2.2, 2.3 所规定的一类特殊的自共轭算子和酉算子,都包含了一个(一般说来)无限维 Hilbert 空间 $(Z,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上相当任意的算子 S,所以不能在 Крейн 空间中企求建立相当一般的自共轭和酉算子的谱论,为此,我们引入如下定义.

定义 2.1 称由定理 2.2 和定理 2.3 所定义的自共轭算子和酉算子是具有标准分解的自共轭算子和具有标准分解的酉算子.

自然,感兴趣的是对具有标准分解的自共轭和酉算子,S 究竟应满足怎样的条件就能建立起此类算子的较满意的谱论,但我们更感兴趣的是怎样的自共轭算子和酉算子才是具有标准分解的,这是本节中主要讨论的问题. 鉴于 Крейн 空间上酉算子必是有界的,在处理上较(无界)自共轭算子有某些方便(虽然不是本质的),所以下面主要讨论酉算子情况.

2. 酉自共轭算子一般形式 正如第一小节中所指出的,要想给出 Крейн 空间上一般的酉算子和自共轭算子的广泛而有效的模型是困难的. 但在本小节中,我们仍要给出酉算子和自共轭算子的某种一般的形式,以便以后的讨论.

下面先给出 Hilbert 空间上算子的一个性质.

引理 2.4 设 T 是 Hilbert 空间 $(H_1, [\cdot,\cdot]_1)$ 到 Hilbert 空间 $(H_2, [\cdot,\cdot]_2)$ 的有界线性算子，那末对 $(-\infty,\infty)$ 上任何 Borel 可测函数 $f(t)$，必有

$$\overline{Tf(T^*T)}^{1)} = f(TT^*)T. \tag{2.24}$$

进一步，如果 0 是 $\sigma(T^*T)$ 的孤立点或 $f(t)$ 在 0 的某个近旁 $[0,\alpha]$ $(\alpha>0)$ 上有界，那末

$$Tf(T^*T) = f(TT^*)T. \tag{2.25}$$

证 因为 $T(T^*T)=(TT^*)T$，所以对任何多项式 $p(t)$，

$$Tp(T^*T) = p(TT^*)T,$$

从而对任何连续函数 f（只要在 $[0,\|T\|^2]$ 上连续），(2.25) 成立。由此易知，对任何有界 Borel 可测函数 f（只要在 $[0,\|T\|^2]$ 上有界），(2.25) 成立。

假设 f 是非负实值 Borel 可测函数，令

$$E_n = \{t \mid f(t) \leqslant n\}, f_n = f\chi_{E_n}^{2)}$$

（这里 n 是自然数），显然 $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \cdots \leqslant f_n \leqslant \cdots$，并且

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t).$$

令 $\{E_t^{(1)}\}$，$\{E_t^{(2)}\}$ 分别是 T^*T，TT^* 的谱系。如果

$$x \in \mathscr{D}(f(T^*T)),$$

那末

$$\int |f(t)|^2 d(E_t^{(1)}x, x) < \infty,$$

由此易知，$\{f_n(T^*T)x\}$ 是基本点列，从而 $\{Tf_n(T^*T)x\}$（即 $\{f_n(TT^*)Tx\}$）是基本点列。利用这个事实，以及 Levi 积分定理，就有 $Tx \in \mathscr{D}(f(TT^*))$，并且

$$Tf(T^*T)x = \lim_{n\to\infty} Tf_n(T^*T)x = \lim_{n\to\infty} f_n(TT^*)Tx = f(TT^*)Tx,$$

即 $Tf(T^*T) \subset f(TT^*)T$.

反之，如果 $Tx \in \mathscr{D}(f(TT^*))$，则易知 $\{Tf_n(T^*T)x\}$ 便是

---

1) $\bar{A}$ 表示算子 A 的最小闭扩张.

2) χ_E 表示集 E 的特征函数.

基本点列．从而存在 $M>0$，使得

$$\int t^2|f_n(t)|^2d(E_t^{(1)}x,x)=\|Tf_n(T^*T)x\|^2\leqslant M, n=1,2,\cdots,$$

因而对任何 $\alpha>0$，

$$\int_\alpha^\infty|f_n(t)|^2d(E_t^{(1)}x,x)\leqslant\frac{M}{\alpha^2}, n=1,2,\cdots,$$

令 $n\to\infty$，就得到

$$\int_\alpha^\infty|f(t)|^2d(E_t^{(1)}x,x)\leqslant\frac{M}{\alpha^2}. \tag{2.26}$$

由 (2.26) 可知，当 0 是 $\sigma(T^*T)$ 的孤立点或 f 在某个 $[0,\alpha]$ 上有界时，必有

$$\int_{-0}^\infty|f(t)|^2d(E_t^{(1)}x,x)<\infty,$$

即 $x\in\mathscr{D}(f(T^*T))$．这就是说，$\mathscr{D}(f(TT^*)T)\subset\mathscr{D}(Tf(T^*T))$，从而 (2.25) 成立．

剩下的只要证明 (2.24)．首先注意，由于 $f(TT^*)$ 是闭算子，T 是有界的，易知 $f(TT^*)T$ 是闭算子．又因为已知

$$Tf(T^*T)\subset f(TT^*)T,$$

则只要证明：如果 $Tx\in\mathscr{D}(f(TT^*))$，那末必有 $\{x,f(TT^*)Tx\}$ 属于 $Tf(T^*T)$ 的图象的闭包．

当 $Tx\in\mathscr{D}(f(TT^*))$ 时，上面已经证明了 $\{Tf_n(T^*T)x\}$ 是基本点列，并且

$$\lim_{n\to\infty}Tf_n(T^*T)x=\lim_{n\to\infty}f_n(TT^*)Tx=f(TT^*)Tx. \tag{2.27}$$

但是 $Tf_n(T^*T)x=Tf(T^*T)\chi_{E_n}(T^*T)x$，如令

$$x_n=\chi_{E_n}(T^*T)x,$$

显然，$x_n\in\mathscr{D}(Tf(T^*T))$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$．这就是说，$H\times H$ 上点 $\{x,f(TT^*)Tx\}$ 是点列 $\{\{x_n,Tf(T^*T)x_n\}\}$ 的极限．证毕．

定理 2.5 设 $\Pi=H_-\oplus H_+$ 是 Крейн 空间 Π 的正则分解，P_+, P_- 分别是 Π 在 H_+, H_- 上的投影．又设 U 是 Π 上的酉算子，

那末U的一般形式是

$$U=\begin{pmatrix} V_1(I+U_{21}^*U_{21})^{\frac{1}{2}} & V_1U_{21}^*U_1^* \\ U_{21} & (I+U_{21}U_{21}^*)^{\frac{1}{2}}U_1^* \end{pmatrix}, \qquad (2.28)$$

其中

$$V_1(I+U_{21}^*U_{21})^{\frac{1}{2}}=P_-UP_-,\ V_1U_{21}^*U_1^*=P_-UP_+,$$
$$(I+U_{21}U_{21}^*)^{\frac{1}{2}}U_1^*=P_+UP_+,\ U_{21}=P_+UP_-,$$

V_1和U_1分别是 Hilbert 空间$(H_-,-(\cdot,\cdot))$和$(H_+,(\cdot,\cdot))$上的酉算子.

证 因为U为Π上酉算子的充要条件是$UU^\dagger=U^\dagger U=I$，如果记$U_{11}=P_-UP_-$, $U_{12}=P_-UP_+$, $U_{22}=P_+UP_+$, 那末

$$U^\dagger U=UU^\dagger=I$$

等价于下列方程组成立:

(i) $U_{11}U_{11}^*=I+U_{12}U_{12}^*$, (ii) $U_{11}^*U_{11}=I+U_{21}^*U_{21}$,

(iii) $U_{11}U_{21}^*=U_{12}U_{22}^*$, (iv) $U_{22}U_{22}^*=I+U_{21}U_{21}^*$,

(v) $U_{22}^*U_{22}=I+U_{12}^*U_{12}$, (vi) $U_{12}^*U_{11}=U_{22}^*U_{21}$.

确定U的一般形式,就是给出适合 (i)—(vi) 的所有解U_{11}, U_{12}, U_{21}以及U_{22}.

由 (ii), $U_{11}=V_1(I+U_{21}^*U_{21})^{\frac{1}{2}}$, 其中$V_1$是$(H_-,-(\cdot,\cdot))$上保距算子. 根据 (i),

$$V_1(I+U_{21}^*U_{21})V_1^*=I+U_{12}U_{12}^*, \qquad (2.29)$$

注意到$\mathscr{R}(I+U_{12}U_{12}^*)=H_-$, 所以$\mathscr{R}(V_1)=H_-$. 这样, V_1便是$(H_-,-(\cdot,\cdot))$上酉算子,由 (2.29) 就得到

$$V_1U_{21}^*U_{21}V_1^*=U_{12}U_{12}^*.$$

据此，存在$(\mathscr{R}(U_{21}),(\cdot,\cdot))$到$(\mathscr{R}(U_{12}^*),(\cdot,\cdot))$的酉算子$V_0$, 使得$U_{12}^*=V_0U_{21}V_1^*$.

类似地，由 (iv), $U_{22}^*=U_1(I+U_{21}U_{21}^*)^{\frac{1}{2}}$, 其中$U_1$是$(H_+,(\cdot,\cdot))$上保距算子. 再根据 (v), U_1便是$(H_+,(\cdot,\cdot))$上酉算子,并且应适合

$$U_1U_{21}U_{21}^*U_1^*=U_{12}^*U_{12}. \qquad (2.30)$$

从 (vi), 我们有

$$V_0U_{21}V_1^*V_1(I+U_{21}^*U_{21})^{\frac{1}{2}}=U_1(I+U_{21}U_{21}^*)^{\frac{1}{2}}U_{21},$$

利用引理 2.4 (这里的 U_{21} 作为引理 2.4 中的 T), 由上式得到

$$V_0U_{21}=U_1U_{21}, \tag{2.31}$$

即 $V_0|_{\mathscr{R}(U_{21})}=U_1|_{\mathscr{R}(U_{21})}$. 这样 $U_{12}^*=V_0U_{21}V_1^*=U_1U_{21}V_1^*$, 显然, 如此解出的 $U_{12}=V_1U_{21}^*U_1^*$ 适合所要求的 (2.30).

反之, 对于已解出的(用 U_{21}, U_1, V_1 表达的) U_{11}, U_{22}, U_{12} 的形式, 利用引理 2.4 不难直接验证它们适合 (i)—(iv). 这就是说, (2.28) 是酉算子的一般形式. 证毕.

下面再提供定理 2.5 的另一个证明.

证 令正则分解 $\Pi=H_-\oplus H_+$ 所产生的内积是 $[\cdot,\cdot]$,

$$J=P_+-P_-.$$

那末, U 为$(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上酉算子的充要条件是

$$JU^*J=U^{-1}. \tag{2.32}$$

这里"*"是 $(\Pi,[\cdot,\cdot])$ 上共轭运算. 又令 $U=W\rho$ 是U在$(\Pi,[\cdot,\cdot])$ 上极分解, 则 (2.32) 变成 $J\rho W^{-1}J=\rho^{-1}W^{-1}$. 利用 $\rho^{-1}>0$ 和极分解的唯一性, 从 $J\rho W^{-1}JW=\rho^{-1}$ 中得到

$$JW^{-1}JW=I,\ J\rho J=\rho^{-1}. \tag{2.33}$$

从上面第一式得到 J 与W可交换, 所以

$$W=\begin{pmatrix}V_1 & 0\\ 0 & U_1^*\end{pmatrix},\ V_1=W|_{H_-},\ U_1^*=W|_{H_+}, \tag{2.34}$$

V_1, U_1^* 分别是 $(H_-,-(\cdot,\cdot))$, $(H_+(\cdot,\cdot))$ 上酉算子. 在分解 $\Pi=H_-\oplus H_+$ 下, 令

$$\rho=\begin{pmatrix}\rho_{11} & \rho_{12}\\ \rho_{21} & \rho_{22}\end{pmatrix}(\rho_{12}=\rho_{21}^*,\ \rho_{11}^*=\rho_{11},\ \rho_{22}^*=\rho_{22}).$$

因为 (2.33) 的第二式等价于 $\rho J\rho=J$, 即

$$\begin{pmatrix}-\rho_{11}^2+\rho_{21}^*\rho_{21} & -\rho_{11}\rho_{21}^*+\rho_{21}^*\rho_{22}\\ -\rho_{21}\rho_{11}+\rho_{22}\rho_{21} & -\rho_{21}\rho_{21}^*+\rho_{22}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-I & O\\ O & I\end{pmatrix}, \tag{2.35}$$

所以 $\rho_{11}^2=I+\rho_{21}^*\rho_{21}$, $\rho_{22}^2=I+\rho_{21}\rho_{21}^*$. 因为 $\rho>0$, 所以

$$\rho_{11}\geqslant 0,\ \rho_{22}\geqslant 0.$$

从而 $\rho_{11}=(I+\rho_{21}^*\rho_{21})^{\frac{1}{2}}$, $\rho_{22}=(I+\rho_{21}\rho_{21}^*)^{\frac{1}{2}}$. 由引理 2.4, 显然

有

$$-\rho_{11}\rho_{21}^* + \rho_{21}^*\rho_{22} = 0, \quad -\rho_{21}\rho_{11} + \rho_{22}\rho_{21} = 0.$$

所以 Π 上酉算子的一般形式是

$$U = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & U_1^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (I + \rho_{21}^*\rho_{21})^{\frac{1}{2}} & \rho_{21}^* \\ \rho_{21} & (I + \rho_{21}\rho_{21}^*)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

其中 V_1, U_1 分别是 $(H_-, -(\cdot,\cdot)), (H_+, (\cdot,\cdot))$ 上酉算子.而 $\begin{pmatrix} (I + \rho_{21}^*\rho_{21})^{\frac{1}{2}} & \rho_{21}^* \\ \rho_{21} & (I + \rho_{21}\rho_{21}^*)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$ 易知既是 $(\Pi, (\cdot,\cdot))$ 上酉算子，也是 $(\Pi, [\cdot,\cdot])$ 上自共轭算子.

如果在一般形式 (2.36) 中,作变元变换 $\rho_{21} = U_1U_{21}$，立即可将 (2.36) 化成 (2.28) 的形式. 证毕.

定理 2.6 在正则分解 $\Pi = H_-\oplus H_+$ 下,算子 A 为 Π 上有界自共轭算子的充要条件是

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & -A_{21}^* \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

其中 A_{11}, A_{22} 分别是 $(H_-, -(\cdot,\cdot)), (H_+, (\cdot,\cdot))$ 上有界自共轭算子，A_{21} 是 $(H_-, -(\cdot,\cdot))$ 到 $(H_+(\cdot,\cdot))$ 的有界线性算子.

证 $[\cdot,\cdot], P_\pm, J$ 等记号如定理 2.5 的证明中所交待. 利用 $A^\dagger = A$ 的充要条件是 $JA^*J = A$ (这里"*"是 $(\Pi, [\cdot,\cdot])$ 上共轭运算),立即可知 (2.37) 是 Π 上有界自共轭算子的一般形式. 证毕.

3. 极大半负的不变子空间 下一小节将讨论具有标准分解的酉、自共轭算子的充分条件. 为此首先注意,假如 U 是具有标准分解的酉算子,即存在标准分解 $\Pi = N\oplus\{Z + Z^*\}\oplus P$, 使得

$$U = \{S, U_N, U_P, C, D, T\},$$

那末 $N\oplus Z$ 必是极大半负,并且是对 U 不变的子空间. 不仅如此,而且 $N\oplus Z$ 也是 U^{-1} 的不变子空间. 所以，若要给出具有标准分解的酉算子的充分条件，首先是要研究对酉算子 U 及其逆 U^{-1} 的极大半负的不变子空间的存在. 其次,如果 $\Pi = H_-\oplus H_+$ 是正

则分解，那末Π中一切极大半负子空间的形式是 L_A，其中A是$(H_-,-(\cdot,\cdot))$到 $(H_+,(\cdot,\cdot))$ 的压缩算子(见第一章§3引理3.2的(iv))。

下列引理是显然的。

引理 2.7 设U是 Крейн 空间Π上的有界线性算子，其在标准分解 $\Pi=H_-\oplus H_+$ 下的 2×2 矩阵表示是

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} H_- \\ H_+ \end{matrix}, \tag{2.38}$$

那末极大半负子空间 L_A 为U的不变子空间的充要条件是，

$$U_{21}+U_{22}A=A(U_{11}+U_{12}A). \tag{2.39}$$

当U是酉算子时，L_A 为U^{-1}的不变子空间的充要条件是

$$-U_{12}^*+U_{22}^*A=A(U_{11}^*-U_{21}^*A). \tag{2.40}$$

下面就是要利用U的一般形式以及引理2.7，给出U是具有标准分解的某些充分条件，并给出谱的关系式。当然，对于Π上酉算子U，即使找到对U，U^{-1}都不变的极大半负子空间，也未必就能断定存在标准分解，下面就是一例。

例 2.4 设 $\Pi=H_-\oplus H_+$，$H_\pm=L^2[0,1]$。作Π上算子

$$A=\begin{pmatrix} 2I-S & -I \\ I & -(2I-S)^{-1} \end{pmatrix} \begin{matrix} H_- \\ H_+ \end{matrix}, \tag{2.41}$$

其中S满足 $(Sf)(t)=tf(t)$，$f\in L^2[0,1]$。根据定理2.6，A是Π上自共轭算子，并且是有界的。令

$$L=\{\{x,(2I-S)^{-1}x\}^{1)}\mid x\in H_-\},$$

由于 $\|(2I-S)^{-1}x\|<\|x\|(x\neq 0)$，所以$L$是$\Pi$中极大负、闭子空间(见第一章§3引理3.2的(iii))。

当 $|\lambda|>3$ 时，容易直接算出

$$(A-\lambda I)=\begin{pmatrix} (2-\lambda)I-S & -I \\ I & -(2I-S)^{-1}-\lambda I \end{pmatrix},$$

---

1) 这里 $L^2[0,1]$ 中的 $(2I-S)^{-1}x$ 是 H_+ 中的向量。

$$(A-\lambda I)^{-1}=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -(2I-S)^{-1}-\lambda I & I \\ -I & (2-\lambda)I-S \end{pmatrix}$$

$$B=[I+(\lambda I+(2I-S)^{-1})(S-(2-\lambda)I)]^{-1}.$$

利用引理 2.7，易直接验证 L 是 $A-\lambda I$，$(A-\lambda I)^{-1}$ 的公共的不变子空间.

再证明 $A-\lambda I$ 不再有其它极大半负不变子空间. 如果不对，那末必有 $(H_-, -(\cdot,\cdot))$ 到 $(H_+, (\cdot,\cdot))$ 的压缩算子 $A'(\|A'x\|\leqslant\|x\|, x\in H)$，$L'=L_{A'}$ 是 $A-\lambda I$ 的不变子空间.根据引理 2.7，A' 适合

$$I-(2I-S)^{-1}A'-A'(2I-S)+A'^2=0. \qquad (2.42)$$

由 (2.42)，立即可得

$$(I-A'(2I-S))(I-(2I-S)^{-1}A')=0. \qquad (2.43)$$

对任何 $x\in L^2[0,1]$，当 $A'x\neq 0$ 时，显然

$$\|(2I-S)^{-1}A'x\|<\|A'x\|\leqslant\|x\|.$$

因此，$I-(2I-S)^{-1}A'$ 是单射. 又因为

$$((2I-S)^{-1}A')^*=A'^*(2I-S)^{-1},$$

通过类似的证明可知，$I-A'^*(2I-S)^{-1}$ 也是单射，从而 $I-(2I-S)^{-1}A'$ 具有稠值域. 从 (2.43) 就得到

$$I-A'(2I-S)=0,$$

即 $A'=(2I-S)^{-1}$. 这就是说，$(A-\lambda I)$ 只有唯一的极大半负不变子空间(其实是极大负闭子空间).

因为 $1\in\sigma((2I-S)^{-1})$，显然,对于 L，决不会有正则分解 $\Pi=H'_-\oplus H'_+$，使得 $H'_-\supset L$.

任取 $|\lambda|>3$ 的非实复数 λ，显然，L 是Π上酉算子

$$U=(A-\bar{\lambda}I)(A-\lambda I)^{-1}$$

以及它的逆 U^{-1} 的公共不变子空间，但决不能把 L 扩张成标准分解.

注意 如果将 (2.41) 中 $2I-S$ 换以 B，并要求 B^{-1*} 是严格压缩算子,即对任何 $x\in L^2[0,1]$，当 $x\neq 0$ 时，$\|B^{-1*}x\|<\|x\|$ 成立，那末例 2.4 所指出的事实就对算子（这时 T 未必是自共轭

的）

$$T = \begin{pmatrix} B & -I \\ I & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{matrix} H_- \\ H_+ \end{matrix} \tag{2.44}$$

仍然成立，即 $L = \{\{x, B^{-1}x\} | x \in H_-\}$ 是 $T - \lambda I, (T - \lambda I)^{-1}$ ($|\lambda| > \|B\| + 1$) 的公共的极大负闭子空间，并且T不再有其它的极大半负不变子空间。

4. 具有标准分解的酉、自共轭算子的充分条件 在本小节中，将利用酉和自共轭算子的一般形式给出具有标准分解的某些充分条件（讨论仅限于酉算子）。

设 $\Pi = H_- \oplus H_+$ 是正则分解，根据定理 2.5，Π 上酉算子的一般形式（见 (2.36)，并以 U_{21} 代替 (2.36) 中 ρ_{21}）是

$$U = \begin{pmatrix} V_1(I + U_{21}^* U_{21})^{\frac{1}{2}} & V_1 U_{21}^* \\ U_1^* U_{21} & U_1^*(I + U_{21} U_{21}^*)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{matrix} H_- \\ H_+ \end{matrix} \tag{2.45}$$

其中 U_1，V_1 分别是 $(H_+, (\cdot, \cdot))$，$(H_-, -(\cdot, \cdot))$ 上酉算子，U_{21} 是 $(H_-, -(\cdot, \cdot))$ 到 $(H_+, (\cdot, \cdot))$ 的有界线性算子。根据引理 2.7，极大半负子空间 L_A（A 是 $(H_- -(\cdot, \cdot))$ 到 $(H_+, (\cdot, \cdot))$ 的压缩算子）为 U, U^{-1} 的不变子空间的充要条件是：

$$AV_1[(I + U_{21}^* U_{21})^{\frac{1}{2}} + U_{21}^* A] = U_1^*[U_{21} + (I + U_{21} U_{21}^*)^{\frac{1}{2}} A], \tag{2.46}$$

$$A[(I + U_{21}^* U_{21})^{\frac{1}{2}} V_1^* - U_{21}^* U_1 A] = -U_{21} V_1^* + (I + U_{21} U_{21}^*)^{\frac{1}{2}} U_1 A. \tag{2.47}$$

对 (2.46) 左乘 U_1，(2.47) 右乘 V_1，分别得

$$U_1 A V_1[(I + U_{21}^* U_{21})^{\frac{1}{2}} + U_{21}^* A] = U_{21} + (I + U_{21} U_{21}^*)^{\frac{1}{2}} A, \tag{2.48}$$

$$A[(I + U_{21}^* U_{21})^{\frac{1}{2}} - U_{21}^* U_1 A V_1] = -U_{21} + (I + U_{21} U_{21}^*)^{\frac{1}{2}} U_1 A V_1. \tag{2.49}$$

方程 (2.48)，(2.49) 是下面研究的出发点。

引理 2.8 必存在 $(H_-, -(\cdot, \cdot))$ 到 $(H_+, (\cdot, \cdot))$ 的压缩算子 A，满足

$$A[(I + U_{21}^* U_{21}]^{\frac{1}{2}} + U_{21}^* A] = U_{21} + (I + U_{21} U_{21}^*)^{\frac{1}{2}} A, \tag{2.50}$$

$$A[(I + U_{21}^* U_{21})^{\frac{1}{2}} - U_{21}^* A] = -U_{21} + (I + U_{21} U_{21}^*)^{\frac{1}{2}} A. \tag{2.51}$$

如果令 $U_{21}=V_0\rho$ 是极分解，那末 (2.50)，(2.51) 的通解是

$$A=\begin{matrix}\mathscr{R}(V_0)\\ \mathscr{R}(V_0)^\perp\end{matrix}\begin{pmatrix}A_1 & O\\ O & A_2\end{pmatrix}\begin{matrix}\mathscr{N}(\rho)^\perp\\ \mathscr{N}(\rho)\end{matrix}, \tag{2.52}$$

其中 $A_1=V_0J_0$，J_0 是任何与 ρ 可交换的 $(H_-, -(\cdot,\cdot))$ 上既是酉又是自共轭的算子，而 A_2 是任何 $(\mathscr{N}(\rho), -(\cdot,\cdot))$ 到 $(\mathscr{R}(V_0)^\perp, (\cdot,\cdot))$ 的压缩算子。

证 显然 (2.50)，(2.51) 等价于

$$AU_{21}^*A=U_{21},\quad A(I+U_{21}^*U_{21})^{\frac{1}{2}}=(I+U_{21}U_{21}^*)^{\frac{1}{2}}A. \tag{2.53}$$

(1) 解 $AU_{21}^*A=U_{21}$. 因为 $A\rho V_0^*A=V_0\rho$，所以当 $x\in\mathscr{N}(\rho)^\perp$，$x\neq 0$ 时，$P_{\mathscr{R}(V_0)}Ax\neq 0$（这里 P_L 表示 Hilbert 空间在闭线性子空间 L 上投影），即算子 $A_1=P_{\mathscr{R}(V_0)}A|_{\mathscr{N}(\rho)^\perp}$ 是单射．利用 A_1 是单射，从方程 $A\rho V_0^*A=V_0\rho$ 中又可得到 $A\mathscr{N}(\rho)\subset\mathscr{R}(V_0)^\perp$.
从而按分解 $H_-=\mathscr{N}(\rho)^\perp\oplus\mathscr{N}(\rho)$，$H_+=\mathscr{R}(V_0)\oplus\mathscr{R}(V_0)^\perp$ 有

$$A=\begin{matrix}\mathscr{R}(V_0)\\ \mathscr{R}(V_0)^\perp\end{matrix}\begin{pmatrix}A_1 & O\\ A_3 & A_2\end{pmatrix}\begin{matrix}\mathscr{N}(\rho)^\perp\\ \mathscr{N}(\rho)\end{matrix}. \tag{2.54}$$

令 $B=V_0^*A$，因为 $\|A\|\leqslant 1$，所以 $\|B\|\leqslant 1$. 根据

$$A\rho V_0^*A=V_0\rho,$$

有 $\rho=B\rho B$. 从 (2.54) 还可得到 $B|_{\mathscr{N}(\rho)}=0$. 显然，$\mathscr{N}(\rho)$ 约化 B，当视 B 为 $\mathscr{N}(\rho)^\perp$ 到 $\mathscr{N}(\rho)^\perp$ 的算子时，由 $\rho=B\rho B$ 就得到

$$B^*\rho B^*=\rho,\quad BB^*\rho B^*B=\rho,\quad B^*B\rho BB^*=\rho,$$

从而 ρ 与 B^*B，BB^* 都可交换[1]，并且有

$$BB^*B^*B|_{\mathscr{N}(\rho)^\perp}=I. \tag{2.55}$$

但是，BB^*，B^*B 都是正压缩算子，由 (2.55)，立即得到

$$BB^*|_{\mathscr{N}(\rho)^\perp}=B^*B|_{\mathscr{N}(\rho)^\perp}=I,$$

从而 B 必是 $(\mathscr{N}(\rho)^\perp, -(\cdot,\cdot))$ 上酉算子．又因为

$$\rho^2=B^*\rho B^*B\rho B=B^*\rho^2B,$$

所以 ρ^2 与酉算子 B 可交换，从而 ρ 与 B 可交换．这样就得到

$$\rho=B\rho B=B^2\rho.$$

1) 这里应用了 Hilbert 空间中熟知的 Putnam-Fuglede 定理的推广形式的结论．这种推广的形式的证明可见本书附录 B 的定理 4.

再根据极分解的唯一性，立即有 $B^2 = I$，所以 B 是自共轭的.

由于 $B = V_0^* A$ 在 $\mathscr{N}(\rho)^\perp$ 上是酉算子，并且 A 是压缩的，所以只有 $A_3 = 0$. 取 $J_0 = B$，那末 $A_1 = V_0 J_0$.

(2) 解 $A(I + U_{21}^* U_{21})^{\frac{1}{2}} = (I + U_{21} U_{21}^*)^{\frac{1}{2}} A$. 将 (1) 中已解得的 A_1 代入方程 $A(I + U_{21}^* U_{21})^{\frac{1}{2}} = (I + U_{21} U_{21}^*)^{\frac{1}{2}} A$，并注意到 $A_3 = 0$，立即可知方程 $A(I + U_{21}^* U_{21})^{\frac{1}{2}} = (I + U_{21} U_{21}^*)^{\frac{1}{2}} A$ 等价于

$$A(I + U_{21}^* U_{21})^{\frac{1}{2}}|_{\mathscr{N}(\rho)} = (I + U_{21} U_{21}^*)^{\frac{1}{2}} A|_{\mathscr{N}(\rho)}.$$

显然，任何 $(\mathscr{N}(\rho), -(\cdot,\cdot))$ 到 $(\mathscr{R}(V_0)^\perp, (\cdot,\cdot))$ 的算子 A_2 都是上述方程的解. 为了保证(2.54)中的 A 的压缩性，所以 A_2 只要是压缩算子就可以了. 证毕.

注意 当 $\mathscr{R}(V_0) = H_+$，$\mathscr{N}(\rho) \neq \{0\}$ 时，$A_2 = 0$. 同时引理 2.8 实质上给出了 $(\Pi_\kappa(\cdot,\cdot))$ 特殊的酉算子

$$U_0 = \begin{pmatrix} (I + U_{21}^* U_{21})^{\frac{1}{2}} & U_{21}^* \\ U_{21} & (I + U_{21} U_{21}^*)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

及其逆 U_0^{-1} 的一切公共的极大半负不变子空间.

引理 2.9 如果存在单位圆周 C_1 上有界 Borel 可测函数 $f(z)$，使得

$$U_1 V_0 = V_0 f(V_1), \tag{2.56}$$

其中 V_0 是 (2.45) 中 U_{21} 的极分解的保距部分. 那末，

(i) $\mathscr{N}(V_0)$，$\mathscr{R}(V_0)$ 分别约化 $f(V_1)$，U_1，并且 $f(V_1)|_{\mathscr{N}(V_0)^\perp}$ 是 $(\mathscr{N}(V_0)^\perp, -(\cdot,\cdot))$ 上酉算子.

(ii) 如果记 $V_0^* U_1 A = \mathscr{A}$，$P_{\mathscr{R}(V_0)^\perp} U_1 A = \mathscr{B}$，那末方程 (2.48)，(2.49) 分别等价于下列方程组：

$$\begin{cases} \mathscr{A} V_1 \rho \bar{f}(V_1)^{1)} \mathscr{A} + \mathscr{A} V_1 (I + \rho^2)^{\frac{1}{2}} \\ \qquad\qquad - (I + \rho^2)^{\frac{1}{2}} \bar{f}(V_1) \mathscr{A} - \rho = 0 & (2.57) \\ \mathscr{B} V_1 [(I + \rho^2)^{\frac{1}{2}} + \rho \bar{f}(V_1) \mathscr{A}] = U_1^* \mathscr{B} & (2.58) \end{cases}$$

---

1) $\bar{f}$ 表示 f 的复数共轭.

$$\begin{cases}\bar{f}(V_1)\mathscr{A}\rho\mathscr{A}V_1+(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}\mathscr{A}V_1-\bar{f}(V_1)\\ \qquad\qquad\times\mathscr{A}(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}-\rho=0 & (2.59)\\ U_1^*\mathscr{B}[(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}-\rho\mathscr{A}V_1]=\mathscr{B}V_1 & (2.60)\end{cases}$$

证 (i) 对任何 f, $f(V_1)$ 是正常算子. 根据 Putnam-Fuglede 型定理 (见附录 B 的定理 5), $P_{\mathscr{N}(V_0)}$ 与 $f(V_1)$ 可交换, $P_{\mathscr{R}(V_0)}$ 与 U_1 可交换,并且

$$V_0^*U_1|_{\mathscr{R}(V_0)}V_0=f(V_1)|_{\mathscr{N}(V_0)^\perp},$$

从而 $f(V_1)$ 是 $(\mathscr{N}(V_0)^\perp, -(\cdot,\cdot))$ 上酉算子,即有

$$f(V_1)\bar{f}(V_1)|_{\mathscr{N}(V_0)^\perp}=\bar{f}(V_1)f(V_1)|_{\mathscr{N}(V_0)^\perp}=I. \qquad (2.61)$$

(ii) 令 $U_1A=B$, 方程 (2.48) 化成

$$BV_1[(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}+\rho V_0^*U_1^*B]=V_0[\rho+(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}\times V_0^*U_1^*B]+P_{\mathscr{R}(V_0)^\perp}U_1^*B,$$

其中 $V_0\rho$ 是 U_{21} 的极分解. 显然,上述方程等价于下列方程组

$$\begin{cases}V_0^*BV_1[(I+\rho^2)+\rho V_0^*U_1^*B]=\rho+(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}V_0^*U_1^*B,\\ P_{\mathscr{R}(V_0)^\perp}BV_1[(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}+\rho V_0^*U_1^*B]=P_{\mathscr{R}(V_0)^\perp}U_1^*B.\end{cases}$$

再令 $\mathscr{A}=V_0^*B$, $\mathscr{B}=P_{\mathscr{R}(V_0)^\perp}B$, 并注意到

$$V_0^*U_1^*=\bar{f}(V_1)V_0^*,$$

立即可知上面方程组就是 (2.57), (2.58).

同样可证,方程 (2.49) 等价于 (2.59) 和 (2.30). 证毕.

根据 Putnam-Fuglede 型定理的知识(见附录 B 的定理 4), 下列引理是显然的.

引理 2.10 (i) 如果 A_2^0 是方程 $U_1A_2V_1=A_2$ 的一个特解,那末对任何与 V_1 可交换的有界线性算子 S, $A_2=A_2^0S$ 必也是

$$U_1A_2V_1=A_2$$

的解.

(ii) 方程 $U_1A_2V_1=A_2$ 具有非零特解的充要条件是分别有 U_1, V_1 的非零约化子空间 $L_+(\subset H_+)$, $L_-(\subset H_-)$ 以及 $(L_-, -(\cdot,\cdot))$ 到 $(L_+,(\cdot,\cdot))$ 的酉算子 V,使得

$$V_1^{-1}|_{L_-}=V^*U_1|_{L_+}V.$$

利用引理 2.8—引理2.10 可给出基本定理及其推论.

定理 2.11 设在正则分解 $\Pi = H_- \oplus H_+$ 下,酉算子

$$U = \begin{pmatrix} V_1(I + U_{21}^* U_{21})^{\frac{1}{2}} & V_1 U_{21}^* \\ U_1^* U_{21} & U_1^*(I + U_{21} U_{21}^*)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{matrix} H_- \\ H_+ \end{matrix}, \quad (2.45)$$

其中 U_1, V_1 分别是 $(H_+, (\cdot, \cdot))$, $(H_-, -(\cdot, \cdot))$ 上酉算子, U_{21} 是 $(H_-, -(\cdot, \cdot))$ 到 $(H_+, (\cdot, \cdot))$ 的有界线性算子. $U_{21} = V_0 \rho$ 是极分解. 如果存在单位圆周C_0上有界 Borel 可测函数 $f(z)$, 使得

$$U_1 V_0 = V_0 f(V_1), \quad (2.56)$$

并且存在 $(H_-, -(\cdot, \cdot))$ 上与 ρ 可交换的自共轭且酉的算子 K, 使得

$$K V_1 = \bar{f}(V_1) K, \quad (2.62)$$

那末必存在 U, U^{-1} 的公共的极大半负不变子空间 L_A:

$$A = \begin{matrix} \mathscr{R}(V_0) \\ \mathscr{R}(V_0)^\perp \end{matrix} \begin{pmatrix} V_0 K & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathscr{N}(\rho)^\perp \\ \mathscr{N}(\rho) \end{matrix}, \quad (2.63)$$

其中 A_2 是 $(\mathscr{N}(\rho), -(\cdot, \cdot))$ 到 $(\mathscr{R}(V_0)^\perp, (\cdot, \cdot))$ 任何适合 $U_1 A_2 V_1 = A_2$ 的压缩算子, 并且由 (2.63) 所产生的 L_A 是适合 $U_1 A V_1 = A$ 的全部极大半负公共不变子空间.

证 因为K与ρ可交换, 所以 $\mathscr{N}(\rho)^\perp$ 约化 K. 又因为 $\mathscr{N}(\rho)^\perp$ 也约化 $f(V_1)$ (见引理 2.9 的 (i)), 由 (2.62) 可知 $\mathscr{N}(\rho)^\perp$ 约化 $V_1 = K^{-1}\bar{f}(V_1)K$.

取 $\mathscr{A}' = K V_1^*$, 从 (2.62) 立即得到

$$\bar{f}(V_1)\mathscr{A}' = \bar{f}(V_1) K V_1^* = K = \mathscr{A}' V_1, \quad (2.64)$$

利用K与ρ可交换的性质, 易知 $\mathscr{A}'$ 必是 (2.57), (2.59) 的解.

令 $\mathscr{A} = \mathscr{A}' P_{\mathscr{N}(\rho)^\perp}$, 显然, $\mathscr{A}$ 也是 (2.57), (2.59) 的解, 并且 $\mathscr{A}$ 作为 $(\mathscr{N}(\rho)^\perp, -(\cdot, \cdot))$ 上算子是酉算子. 根据 $U_1 A$ 应是 $(H_-, -(\cdot, \cdot))$ 到 $(H_+, (\cdot, \cdot))$ 的压缩算子的要求,即对任何 $x \in H_-$, 应有 $\|\mathscr{A} x\|^2 + \|\mathscr{B} x\|^2 \leqslant \|x\|^2$, 因而只有

$$\mathscr{B}|_{\mathscr{N}(\rho)^\perp} = 0.$$

因此下面就在假设 $\mathscr{B}|_{\mathscr{N}(\rho)^\perp} = 0$ 的情况下解 (2.58), (2.60).

在 (2.58), (2.60) 中,令 $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}|_{\mathscr{N}(\rho)^\perp}$, $\mathscr{B}_2 = \mathscr{B}|_{\mathscr{N}(\rho)}$. 按

假设，$\mathscr{B}_1=0$，这时 (2.58)，(2.60) 在 $\mathscr{N}(\rho)^\perp$ 自动地成立. 而 (2.58)，(2.60) 在 $\mathscr{N}(\rho)$ 上等价于下列方程

$$\mathscr{B}_2 V_1 = U_1^* \mathscr{B}_2. \tag{2.65}$$

由于

$$\mathscr{B}_2 = \mathscr{B}|_{\mathscr{N}(\rho)} = P_{\mathscr{R}(V_0)^\perp} U_1 A|_{\mathscr{N}(\rho)} = U_1 P_{\mathscr{R}(V_0)^\perp} A|_{\mathscr{N}(\rho)}{}^{1)} = A_2,$$

所以 $\mathscr{B}_2$ 适合 (2.65) 等价于 A_2 适合 $U_1 A_2 V_1 = A_2$. 再根据 A 的压缩性要求，A_2 还应是压缩算子.

根据 (2.62)，$\bar{f}(V_1)$ 必是酉算子，即 $(\bar{f}(V_1))^{-1} = f(V_1)$. 由引理 2.9 可知，

$$\begin{aligned} P_{\overline{\mathscr{R}(V_0)}} A|_{\mathscr{N}(\rho)^\perp} &= U_1^* V_0 \mathscr{A}'|_{\mathscr{N}(\rho)^\perp} = U_1^* V_0 K V_1^*|_{\mathscr{N}(\rho)^\perp} \\ &= U_1^* V_0 f(V_1) K|_{\mathscr{N}(\rho)^\perp} = V_0 K|_{\mathscr{N}(\rho)^\perp}, \end{aligned}$$

所以 A 的形式是 (2.63).

显然，形为 (2.63) 的解必适合 $U_1 A V_1 = A$. 根据引理 2.8 及其后面所提到的注意，形如 (2.63) 的解正是适合 $U_1 A V_1 = A$ 的对 U，U^{-1} 都不变的极大半负不变子空间全体. 证毕.

下面给几个重要的推论.

推论 2.12 满足定理 2.11 条件的 Крейн 空间 Π 上的酉算子 U 必是具有标准分解的算子，并且对定理 2.11 中任何一个满足 $\|A_2\| < 1$ 的算子 A，必有相应的标准分解

$$\Pi = N \oplus \{Z + Z^*\} \oplus P,$$

其中

$$\begin{cases} Z = \{\{x, V_0 K x\} \mid x \in \mathscr{N}(\rho)^\perp\}, Z^* = \{\{-K V_0^* y, y\} \mid y \in \mathscr{R}(V_0)\}, \\ N = \{\{x', A_2 x'\} \mid x' \in \mathscr{N}(\rho)\}, P = \{\{A_2^* y', y'\} \mid y' \in \mathscr{R}(V_0)^\perp\}. \end{cases} \tag{2.66}$$

在上述标准分解下，$U = \{S, U_N, U_P, C, D, T\}$，

$$\begin{cases} S = V_1((I+\rho^2)^{\frac{1}{2}} + \rho K)|_{\mathscr{N}(\rho)^\perp}, U_N = V_1|_{\mathscr{N}(\rho)}, U_P = U_1^*|_{\mathscr{R}(V_0)^\perp}, \\ C = 0,\ D = 0,\ T = 0, \end{cases} \tag{2.67}$$

---

1) 根据引理 2.9 的 (i)，$P_{\mathscr{R}(V_0)^\perp} U_1 = U_1 P_{\mathscr{R}(V_0)^\perp}$.

而 $\sigma(U)=\sigma(S)\cup\sigma(U_N)\cup\sigma(U_P)\cup\sigma(S^{*-1})$.

证 因为 $U_1A_2V_1=A_2$ 至少有解 $A_2=0$ 适合 $\|A_2\|<1$，但凡是由 $\|A_2\|<1$ 的解 A_2 所得到 (2.63) 的 A，按 (2.66) 所作的四个子空间 Z, Z^*, N, P 等显然构成一个标准分解. 现在要说明在这个分解下，U 具有 (2.67) 的形式.

下面的计算除了用 (2.56), (2.62) 外，还要用到 $K^2=I$（因为 K 是 Hilbert 空间上自共轭且酉的算子），

$$U_1A_2V_1=A_2,\quad f(V)^{-1}=\bar{f}(V)$$

等，

对任何 $x\in\mathscr{N}(\rho)^\perp$, $z=\{x,V_0Kx\}$, 由 (2.45) 可知

$$Uz=\{V_1(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}x+V_1\rho V_0^*V_0Kx, U_1^*(V_0\rho x+(I+V_0\rho^2V_0^*)^{\frac{1}{2}}V_0Kx)\},\tag{2.68}$$

由于

$$V_1(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}x+V_1\rho V_0^*V_0Kx=V_1((I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}+\rho K)x,\tag{2.69}$$

$$\begin{aligned}U_1^*(V_0\rho x+(I+V_0\rho^2V_0^*)^{\frac{1}{2}}V_0Kx)&=U_1^*V_0(\rho+(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}K)x\\&=V_0\bar{f}(V_1)(\rho+(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}K)x=V_0KK\bar{f}(V_1)(\rho\\&\quad+(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}K)x=V_0KV_1(\rho K+(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}})x,\end{aligned}\tag{2.70}$$

所以 $S=V_1((I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}+\rho K)|_{\mathscr{N}(\rho)^\perp}$.

对任何 $x'\in\mathscr{N}(\rho)$, $n=\{x',A_2x'\}$, 由 (2.45) 可知

$$Un=\{V_1x', U_1^*A_2x'\}=\{V_1x', A_2V_1x'\}.\tag{2.71}$$

因为 $\mathscr{N}(\rho)$ 约化 V_1，所以从 (2.71) 可知 $U_N=V_1|_{\mathscr{N}(\rho)}$，并且 $UN\subset N$.

同样，对任何 $y'\in\mathscr{R}(V_0)^\perp, p=\{-A_2^*y',y'\}$，由 (2.45) 可知

$$Up=\{V_1A_2^*y', U_1^*y'\}=\{A_2^*U_1^*y', U_1^*y'\}.\tag{2.72}$$

因为 $\mathscr{R}(V_0)$ 约化 U_1，所以从 (2.72) 可知 $U_P=U_1^*|_{\mathscr{R}(V_0)^\perp}$，并且 $UP\subset P$.

从 $UN\subset N$, $Up\subset P$, 可知 $C=0$, $D=0$.

对任何 $y\in\mathscr{R}(V_0)$, $z^*=\{-KV_0^*y, y\}$, 由 (2.45) 可知，

$$Uz^*=\{-V_1(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}KV_0^*y_1+V_1\rho V_0^*y, U_1^*(-V_0\rho KV_0^*+V_0(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}V_0^*)y\}.$$

由于

$$-V_1((I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}K-\rho)V_0^*y=-V_1((I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}-\rho K)KV_0^*y,$$
(2.73)

$$U_1^*V_0(-\rho K+(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}})V_0^*y=V_0KV_1(-\rho+(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}K)V_0^*y=V_0KV_1((I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}-\rho K)KV_0^*y, \tag{2.74}$$

注意到$\mathscr{N}(\rho)^\perp$约化$V_1((I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}-\rho K)K$, $V_0KV_1((I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}-\rho K)KV_0^*$是$\mathscr{R}(V_0)$到$\mathscr{R}(V_0)$的算子，并且

$$KV_0^*V_0K|_{\mathscr{N}(\rho)^\perp}=I,$$

所以从(2.73), (2.74)就得到$UZ^*\subset Z^*$，所以$T=0$(由此也可断言$C=0, D=0$)。这样，就得到(2.67)。

用$[\cdot,\cdot]$表示正则分解$\Pi=H_-\oplus H_+$所产生的内积。从Hilbert空间$(\Pi,[\cdot,\cdot])$来看，子空间Z, Z^*, N, P彼此相互直交，根据$C=0$, $D=0$, $T=0$, 立即得到

$$\sigma(U)=\sigma(S)\cup\sigma(S^{-1*})\cup\sigma(U_N)\cup\sigma(U_P).$$

证毕.

注意 如果令$KV_0^*y=x$，并把Z^*中向量$\{-x, V_0Kx\}$与Z中向量$\frac{1}{2\|x\|^2}\{x, V_0Kx\}$视为同一(这是作为$H.D.$对所要求做到的)，那末(2.73), (2.74)恰恰表示$Uz^*=S^{-1*}z^*$，其中

$$S^{-1*}=V_1(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}-\rho K)|_{\mathscr{N}(\rho)^\perp}.$$

推论 2.13 设 Крейн 空间Π上酉算子U满足$U_1V_0=V_0V_1^*$，那末U必是具有标准分解的酉算子。当取(2.63)中$K=\pm I$, $A_2=0$时，由(2.63)所定出的L_A就是U, U^{-1}的公共的极大半负不变子空间，并且推论2.12的结论成立.

证 只要取$f(z)=\bar{z}$，易知由本推论假设可得到(2.56), (2.62). 剩下的只要用定理2.11和推论2.12的结论就得到本推论的结论. 证毕.

推论 2.14 设 Крейн 空间Π上酉算子U满足$U_{21}^*=V_1U_{21}^*U_1$，那末推论2.12的结论全部成立，并且当$z=\{x, V_0Kx\}\in Z$，规定

$$\langle z, z\rangle = \frac{-1}{2}(x, x)$$

时，S 是 Hilbert 空间 $(Z, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ 上正常算子。

证 由 $U_{21}^* = V_1 U_{21}^* U_1$ 可以得到 $\rho^2 = U_{21}^* U_{21}$ 与 V_1 可交换，$V_0\rho^2 V_0^* = U_{21}U_{21}^*$ 与 U_1 可交换，从而 $\mathscr{N}(\rho)$，$\mathscr{R}(V_0)$ 分别约化 V_1，U_1。

由 $U_{21} = U_1 U_{21} V_1$ 又可得到 $V_0\rho = U_1 V_0 \rho V_1 = U_1 V_0 V_1 \rho$，因而 $V_0 = U_1 V_0 V_1$ 成立，即此时满足推论 2.12 的条件，所以推论 2.12 结论成立，由于 V_1 与 ρ 可交换，所以由 (2.67) 式所定出的算子 S 是正常算子．证毕．

推论 2.15 设 Крейн 空间 Π 上酉算子 U 满足 $U_1 V_0 = V_0 V_1$（或 $(P_+UP_-)^* = P_-UP_+$，此处 $P_\pm$ 是 Π 在 $H_\pm$ 上投影），并且存在与 ρ 可交换的自共轭的酉算子 K，使得 $KV_1 = V_1^*K$．那末，由 (2.63) 所定义的 L_A 必是 U，U^{-1} 的公共的极大半负不变子空间，并且推论 2.12 的结论成立．

证 只要取 $f(z) = z$，易知由本推论假设可得到 (2.56)，(2.62)．其余的部分是显然的．证毕．

推论 2.16 设 U 是 Крейн 空间 Π 上酉算子．如果存在 $[0, \|\rho\|]$ 上有界 Borel 可测函数 g，使得 $V_1|_{\mathscr{N}(\rho)^\perp} = g(\rho)$，并且 P_-UP_- 与 P_+UP_+ 相似（这里 $P_\pm$ 是 Π 在 $H_\pm$ 上的投影）．那末，对与 ρ 可交换的自共轭的酉算子 K，由 (2.63) 所定出的 L_A 必是 U，U^{-1} 的公共的极大半负不变子空间，并且推论 2.12 结论成立．

证 根据假设，存在 $(H_-, -(\cdot, \cdot))$ 到 $(H_+, (\cdot, \cdot))$ 的酉算子 W，使得

$$WV_1(I + U_{21}^*U_{21})^{\frac{1}{2}} = U_1^*(I + U_{21}U_{21}^*)^{\frac{1}{2}}W. \qquad (2.75)$$

由此，对任何 $x \in \mathscr{N}(\rho)$，有

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \|WV_1(I + U_{21}^*U_{21})^{\frac{1}{2}}x\|^2 = \|U_1^*(I + U_{21}U_{21}^*)^{\frac{1}{2}}Wx\|^2 \\ &= \|V_0(I + \rho^2)^{\frac{1}{2}}V_0^*Wx\|^2 + \|P_{\mathscr{R}(V_0)^\perp}Wx\|^2 \\ &\geqslant \|P_{\mathscr{R}(V_0)}Wx\|^2 + \|P_{\mathscr{R}(V_0)^\perp}Wx\|^2 = \|Wx\|^2 = \|x\|^2.\end{aligned}$$

可见，$x \in \mathscr{N}(\rho)$ 的充要条件是 $P_{\mathscr{R}(V_0)}Wx = 0$．这样，

$$W = \begin{matrix} \mathscr{R}(V_0) \\ \mathscr{R}(V_0)^\perp \end{matrix} \begin{pmatrix} W_1 & O \\ O & W_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathscr{N}(\rho)^\perp \\ \mathscr{N}(\rho) \end{matrix} . \tag{2.76}$$

从而方程 (2.75) 等价于下列方程组

$$W V_1(I + \rho^2)^{\frac{1}{2}}|_{\mathscr{N}(\rho)^\perp} = U_1^* V_0(I + \rho^2)^{\frac{1}{2}} V_0^* W|_{\mathscr{N}(\rho)^\perp}, \tag{2.77}$$

$$W V_1|_{\mathscr{N}(\rho)} = U_1^* W|_{\mathscr{N}(\rho)}. \tag{2.78}$$

另一方面，根据极分解的唯一性，从 (2.75) 容易得到

$$W V_1 = U_1^* W, \text{ 即 } U_1 W V_1 = W. \tag{2.79}$$

显然，将 (2.79) 限制在 $\mathscr{N}(\rho)$ 上，便得到 (2.78)；将 (2.79) 代入 (2.77)，便得到

$$W(I + \rho^2)^{\frac{1}{2}}|_{\mathscr{N}(\rho)^\perp} = V_0(I + \rho^2)^{\frac{1}{2}} V_0^* W|_{\mathscr{N}(\rho)^\perp}.$$

由此可知，$(\mathscr{N}(\rho)^\perp, -(\cdot, \cdot))$ 上酉算子 $V_0^* W$ (即 $V_0^* W_1$) 与 $(I + \rho^2)$ (从而与 ρ) 可交换，自然也与 $g(\rho)$ 可交换。令

$$K_1 = V_0^* W_1,$$

这样

$$W = \begin{pmatrix} V_0 K_1 & O \\ O & W_2 \end{pmatrix}, \quad K_1 = V_0^* W_1.$$

因为 $V_1|_{\mathscr{N}(\rho)^\perp} = g(\rho)$，所以 $V_1|_{\mathscr{N}(\rho)^\perp}$ 是 $(\mathscr{N}(\rho)^\perp, -(\cdot, \cdot))$ 上正常算子，而且 $\mathscr{N}(\rho)^\perp$ 是 V_1 的不变子空间，从而 $\mathscr{N}(\rho)^\perp$ 必约化 V_1。将 W 的上述形式代入 (2.79) 后，就得到

$$U_1 V_0 V_1 = V_0, \quad U_1 W_2 V_1 = W_2, \tag{2.80}$$

由此有 $U_1 V_0 = V_0 V_1^*$，并且 $\mathscr{N}(\rho)^\perp$ 上任何与 ρ 可交换的自共轭的酉算子 K 必成立 $K V_1 = V_1 K$。根据定理 2.11，易知本推论成立，并且 (2.63) 中 A_2 可以取为 $W_2 A_2'$，只要 A_2' 与 V_1 可交换即可。证毕。

定理 2.17 设在正则分解 $\Pi = H_- \oplus H_+$ 下，酉算子

$$U = \begin{pmatrix} V_1(I + U_{21}^* U_{21})^{\frac{1}{2}} & V_1 U_{21}^* \\ U_1^* U_{21} & U_1^*(I + U_{21} U_{21}^*)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{matrix} H_- \\ H_+ \end{matrix},$$

$U_{21} = V_0 \rho$ 是极分解，如果存在单位圆周 C_1 上有界 Borel 可测函数 $f(z)$，使得

$$U_1 V_0 = V_0 f(V_1),$$

并且 P_-UP_- 是 $(H_-, -(\cdot,\cdot))$ 上正常算子（P_- 是 Π 在 H_- 上投影），那末 U, U^{-1} 必具有如下形式的公共的极大半负不变子空间 L_A:

$$A = \begin{matrix} \mathscr{R}(V_0) \\ \mathscr{R}(V_0)^\perp \end{matrix} \begin{pmatrix} U_1^* V_0 \mathscr{A} & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} N(\rho) \\ \mathscr{N}(\rho)^\perp \end{matrix}, \tag{2.81}$$

其中 $\mathscr{A}$ 是与 P_-UP_- 可交换的压缩算子，并且是方程(2.57)的解，而 A_2 是满足 $U_1A_2V_1 = A_2$ 的任一压缩算子.

进一步，如果对(2.81)中的 $\mathscr{A}$，还存在$(\mathscr{N}(\rho)^\perp, -(\cdot,\cdot))$ 到 $(\mathscr{R}(V_0)^\perp, (\cdot,\cdot))$ 的部分保距算子 W_0，使得

$$W_0V_1[(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}} + \rho\bar{f}(V_1)\mathscr{A}] = U_1^*W_0, \tag{2.82}$$

那末必存在如下形式的 U, U^{-1} 的公共的极大半负不变子空间

$$A = \begin{matrix} \mathscr{R}(V_0) \\ \mathscr{R}(V_0)^\perp \end{matrix} \begin{pmatrix} U_1^* V_0 \mathscr{A} & O \\ U_1^* \mathscr{B}_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathscr{N}(\rho) \\ \mathscr{N}(\rho)^\perp \end{matrix}, \tag{2.83}$$

其中 $\mathscr{B}_1 = W_0B$，而 B 是 $\mathscr{N}(W_0)^\perp$ 上与 $V_1((I+\rho^2)^{\frac{1}{2}} + \rho\bar{f}(V_1)\mathscr{A})$ 可交换的任一满足

$$\|\mathscr{A}x\|^2 + \|\mathscr{B}_1x\|^2 \leqslant \|x\|^2 (x \in H_-)$$

的算子，而 A_2 是满足 $U_1A_2V_1 = A_2$，并使(2.83)的 A 成为压缩算子的算子（例如 $A_2 = 0$ 总是满足的）.

证 根据引理 2.9，L_A 为 U, U^{-1} 公共的极大半负不变子空间的充要条件是 $\mathscr{A} = V_0^*U_1A$, $\mathscr{B} = P_{\mathscr{R}(V_0)^\perp}U_1A$ 适合方程组(2.57)—(2.60).

如果下面考察的是 $\mathscr{A}$ 与 V_1 和 ρ 可交换的情况（因为 P_-UP_- 是正常的，这等价于 $\mathscr{A}$ 与 $P_-UP_- = V_1(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}$ 可交换），那末，(2.57)与(2.59)就变成同一个方程，它等价于

$$\begin{cases} \mathscr{A}^2 + \mathscr{A}(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}[f(V_1) - V_1^*] - f(V_1)V_1^* = 0 & (\text{在 } \mathscr{N}(\rho)^\perp \text{ 上}), \quad (2.84) \\ \mathscr{A}V_1 = \bar{f}(V_1)\mathscr{A} & (\text{在 } \mathscr{N}(\rho) \text{ 上}). \quad (2.85) \end{cases}$$

显然，取 $\mathscr{A}|_{\mathscr{N}(\rho)} = 0$，(2.85)就被满足，因此，只须解(2.84). 由于 $f(V_1)V_1^*$ 在 $(\mathscr{N}(\rho)^\perp, -(\cdot,\cdot))$ 上是酉算子，因此易知(2.84)必有、并且是唯一地有满足 $\|\mathscr{A}\| \leqslant 1$ 的解，这个解

可以表示成 V_1, ρ 的函数

将所得的解 $\mathscr{A}$，代入(2.58)，(2.60)，并取 $\mathscr{B}|_{\mathscr{N}(\rho)^\perp}=0$，再利用 $\mathscr{A}$，ρ，V_1 等彼此可交换，易知方程(2.58)，(2.60)等价于

$$\mathscr{B}_2V_1=U_1^*\mathscr{B}_2(\mathscr{B}_2=\mathscr{B}|_{\mathscr{N}(\rho)}). \tag{2.86}$$

显然，必存在压缩算子 $\mathscr{B}_2$（例如取 $\mathscr{B}_2=0$）适合(2.86)。考虑到已取 $\mathscr{B}|_{\mathscr{N}(\rho)^\perp}=0$，所以 $A_2=P_{\mathscr{R}(V_0)^\perp}A|_{\mathscr{N}(\rho)}=U_1^*\mathscr{B}_2$（注意，$\mathscr{R}(V_0)$ 约化 U_1，参见引理 2.9 的 (i)）。因为 $\mathscr{B}_2$ 适合(2.86)，所以 A_2 就适合 $U_1A_2V_1=A_2$。

这样，由(2.81)所定的 L_A 是 U，U^{-1} 的公共的极大半负不变子空间。

进一步，如果对(2.84)中解出的 $\mathscr{A}$，还存在部分保距算子 W_0，使得(2.82)成立，那末，由于 U_1^*，$V_1[(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}+\rho\bar{f}(V_1)\mathscr{A}]$ 都是正常算子，根据附录 B 的推论 3 和定理 5 便得到：$\mathscr{N}(W_0)$，$\mathscr{R}(W_0)$ 分别约化 $V_1[(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}+\rho\bar{f}(V_1)\mathscr{A}]$ 和 U_1^*，并且 $V_1[(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}+\rho\bar{f}(V_1)\mathscr{A}]|_{\mathscr{N}(W_0)^\perp}$ 是 $(\mathscr{N}(W_0)^\perp, -(\cdot,\cdot))$ 上酉算子。再利用 $\mathscr{A}$ 是(2.57)，(2.59)的解，易知在 H_- 上下式成立

$$V_1[(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}+\rho\bar{f}(V_1)\mathscr{A}][(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}-\rho\mathscr{A}V_1]V_1^*=I, \tag{2.87}$$

即 $V_1[(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}+\rho\bar{f}(V_1)\mathscr{A}]$，$[(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}-\rho\mathscr{A}V_1]V_1^*$ 是互逆的，因而 $[(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}-\rho\mathscr{A}V_1]V_1^*$ 也是 $(\mathscr{N}(W_0)^\perp, -(\cdot,\cdot))$ 上酉算子，于是，从(2.82)得到

$$U_1W_0=W_0[(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}-\rho\mathscr{A}V_1]V_1^*.$$

由上式和(2.82)易知，任何 $(\mathscr{N}(W_0)^\perp, -(\cdot,\cdot))$ 上有界线性算子 B，如果与 $\mathscr{N}(W_0)^\perp$ 上酉算子 $V_1[(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}}+\rho\bar{f}(V_1)\mathscr{A}]$ 可交换，那末，当取 $\mathscr{B}_1(=\mathscr{B}|_{\mathscr{N}(\rho)^\perp})=W_0B$ 时，$\mathscr{B}_1$ 就适合(2.58)，(2.60)。

为了保证(2.83)所定出的 A 的压缩性，首先要适当选择 B，使得 $\|\mathscr{A}x\|^2+\|\mathscr{B}_1x\|^2\leqslant\|x\|^2(x\in H_-)$ 成立，然后适当选择 A_2，

使得 A 成为压缩算子。证毕。

下面给出某些重要推论.

推论 2.18 设 Крейн 空间 Π 上酉算子 U 满足

$$(P_+UP_-)^* = P_-UP_+,$$

那末下列命题成立，

(i) 算子 $Q = \frac{1}{2i}(V_1 - V_1^*)(I + \rho^{-2})^{\frac{1}{2}}$ 是 $(\mathscr{N}(\rho)^\perp, -(\cdot, \cdot))$ 上自共轭算子.

(ii) 令 E_1, E_2 分别表示 Q 在 $[-1, 1]$ 以及 $(-\infty, \infty) - [-1, 1]$ 上谱子空间,则 U, U^{-1} 必存在形如 (2.81) 的公共的极大半负不变子空间,其中

$$\mathscr{A} = \begin{cases} -i\left[\frac{V_1 - V_1^*}{2i}(I + \rho^{-2})^{\frac{1}{2}}\right. \\ \qquad \left.\pm\left[I - \left(\frac{V_1 - V_1^*}{2i}\right)^2(I + \rho^{-2})\right]^{\frac{1}{2}}\right] (\text{在 } E_1 \text{ 上}) & (2.88) \\ i\left[-\frac{V_1 - V_1^*}{2i}(I + \rho^{-2})^{\frac{1}{2}} \pm \left(\left(\frac{V_1 - V_1^*}{2i}\right)^2\right.\right. \\ \qquad \left.\left.\times (I + \rho^{-2}) - I\right)^{\frac{1}{2}}\right] \quad (\text{在 } E_2 \text{ 上}) & (2.89) \end{cases}$$

在 E_2 上"±"号的选取随 Q 的情况而定，为的是保证 $\|\mathscr{A}\| \leqslant 1$. 而 A_2 是满足 $U_1A_2V_1 = A_2$ 的任何压缩算子.

(iii) 如果存在 $(E_2, -(\cdot, \cdot))$ 到 $(\mathscr{R}(V_0), (\cdot, \cdot))$ 的保距算子 W_0，使 (2.82) 在 E_2 上成立,并且 $\sigma(Q) \cap ((-\infty, \infty) - [-1, 1])$ 与 $\{\pm 1\}$ 有正距离 d, 那末 U, U^{-1} 必有形如 (2.83) 的公共的极大半负不变子空间. 此时, (2.83) 中 $\mathscr{B}_1, A_2$ 可以都是非零算子.

证 由假设 $V_1\rho V_0^* = (U_1^*V_0\rho)^*$，立即得到

$$V_1\rho^2V_1^* = \rho^2,\ V_0\rho^2V_0^* = U_1V_0\rho^2V_0^*U_1^*, \tag{2.90}$$

即 P_-UP_-, P_+UP_+ 分别是 $(H_-, -(\cdot, \cdot))$, $(H_+, (\cdot, \cdot))$ 上正常算子. 利用 ρ 与 V_1 可交换(从而 $\mathscr{N}(\rho)^\perp$ 约化 V_1)以及假设,有

$$\rho V_1V_0^* = V_1\rho V_0^* = \rho V_0^*U_1.$$

由此，立即得到 $U_1^*V_0 = V_0V_1^*$，即 $U_1V_0 = V_0V_1$ 成立．取定理 2.17 中的 $f(z) = z$，并注意到 (2.88)，(2.89) 所表达的 $\mathscr{A}$ 是 (2.57)，(2.59) 的解．剩下只要利用定理 2.17 的结论就可得到本推论的 (i) 和 (ii)．

现在证明 (iii)．由 (2.88) 可知，$\mathscr{A}$ 在 E_1 上是 $(E_1, -(\cdot, \cdot))$ 上酉算子．显然，为了保证 A 的压缩性，在 (2.83) 中，必须有

$$\mathscr{B}_1|_{E_1} = 0,$$

即 $\mathscr{B}_1$ 可仅仅视为 E_2 到 $\mathscr{R}(V_0)^\perp$ 的算子．

根据 (2.89)，在 E_2 上，

$$\begin{aligned} V_1[(I+\rho^2]^{\frac{1}{2}} + \rho\bar{f}(V_1)\mathscr{A}] &= V_1(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}} + \rho\mathscr{A} \\ &= \frac{V_1+V_1^*}{2}(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}} \pm i\left[\left(\frac{V_1-V_1^*}{2i}\right)^2(I+\rho^2) - \rho^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{V_1+V_1^*}{2}(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}} \pm i\left[I - \left(\frac{V_1+V_1^*}{2}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. \times (I+\rho^2)\right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

即 $V_1[(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}} + \rho\bar{f}(V_1)\mathscr{A}]$ 是 $(E_2, -(\cdot, \cdot))$ 上酉算子．由假设，存在 W_0，使 (2.82) 成立．当取 $\mathscr{B}_1 = W_0B$（B 是任何与 $V_1[(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}} + \rho\bar{f}(V_1)\mathscr{A}]$ 可交换的有界线性算子），$\mathscr{B}_1$ 就适合 (2.58)，(2.60)．

最后再证明必能适当选取 $\mathscr{B}_1$，A_2，使得 (2.83) 所定出的 A 是 $(H_-, -(\cdot, \cdot))$ 到 $(H_+, (\cdot, \cdot))$ 的压缩算子．

事实上，因为 $\sigma(Q)\cap((-\infty, \infty) - [-1, 1])$ 与 $\{\pm 1\}$ 的距离 $d > 0$，而在 $(E_2, -(\cdot, \cdot))$ 上

$$|\mathscr{A}| = |Q| - |Q^2 - I|^{\frac{1}{2}} = [|Q| + |Q^2 - I|^{\frac{1}{2}}]^{-1}\ ^{1)},$$

从而

$$|\mathscr{A}| \leqslant \frac{1}{1+2d} I.$$

因此，只要取 B 是 E_2 上与 $V_1[(I+\rho^2)^{\frac{1}{2}} + \rho\bar{f}(V_1)\mathscr{A}]$ 可交换，

1) $|T|$ 表示算子 T 的 $(T^*T)^{1/2}$．

并且

$$|B| \leqslant \frac{d}{1+2d} I,$$

而取 A_2 满足 $U_1A_2V_1 = A_2$, 并且

$$\|A_2\| \leqslant \frac{1}{2}$$

的任何线性算子,则由 (2.83) 所定出的 A 对任何 $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, $y \in \mathscr{N}(\rho)^{\perp}$, 有

$$\begin{aligned}
\|A(x_1 + x_2 + y)\|^2 &= \|\mathscr{A} x_1\|^2 + \|\mathscr{A} x_2\|^2 \\
&\quad + \|U_1^* \mathscr{B}_1 x_2 + A_2 y\|^2 \\
&= \|x_1\|^2 + \|\mathscr{A} x_2\|^2 + \|\mathscr{B}_1 x_2\|^2 + \|A_2 y\|^2 \\
&\quad + 2R_e(U_1^* \mathscr{B}_1 x_2, A_2 y) \\
&\leqslant \|x_1\|^2 + \frac{1}{1+2d}\|x_2\|^2 + 2(\|\mathscr{B}_1 x_2\|^2 + \|A_2 y\|^2) \\
&\leqslant \|x_1\|^2 + \frac{1}{1+2d}\|x_2\|^2 + \frac{2d}{1+2d}\|x_2\|^2 + \|y\|^2 \\
&\leqslant \|x_1 + x_2 + y\|^2,
\end{aligned}$$

即 L_A 是极大半负的. 证毕.

推论 2.19 设 Крейн 空间 Π 上酉算子 U 满足

$$(P_+UP_-)^* = P_-UP_+,$$

并且 $\sigma\left(\frac{V_1 - V_1^*}{2i}(I + \rho^{-2})^{\frac{1}{2}}|_{\mathscr{N}(\rho)^{\perp}}\right) \cap ((-\infty, \infty) - [-1, 1])$ 与 $\{\pm 1\}$ 有正距离. 那末, U 必是具有标准分解的,且存在标准分解 $\Pi = N \oplus \{Z + Z^*\} \oplus P$, 其中

$$\begin{gathered}
Z = \{\{x, U_1^* V_0 \mathscr{A}_1 x\} \mid x \in E_1\}, \\
Z^* = \{\{-\mathscr{A}_1^* V_0^* U_1 y, y\} \mid y \in U_1^* V_0 \mathscr{A}_1 E_1\}, \\
N = \{\{x', U_1^* V_0 \mathscr{A}_2 x'\} \mid x' \in E_2\} \oplus \{\{x'', A_2 x''\} \mid x'' \in \mathscr{N}(\rho)\}, \\
P = \{\{\mathscr{A}_2^* V_0^* U_1 y', y'\} \mid y' \in \overline{U_1^* V_0 \mathscr{A}_2 E_2}\} \\
\oplus \{\{A_2^* y'', y''\} \mid y'' \in \mathscr{R}(V_0)^{\perp}\},
\end{gathered}$$

其中 E_1, E_2 分别是

$$Q = \frac{V_1 - V_1^*}{2i}(I + \rho^{-2})^{\frac{1}{2}}$$

在 $[-1, 1]$, $(-\infty, \infty)-[-1, 1]$ 上的谱子空间. 而 $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ 是 $\mathscr{A}$ 分别在 E_1, E_2 上限制(见 (2.88)[1],(2.89)), $\|A_2\| < 1$. 在这个标准分解下, $U = \{S, U_N, U_P, C, D, T\}$, 其中

$$S = \frac{V_1 + V_1^*}{2}(I + \rho^2)^{\frac{1}{2}} + \left[\rho^2 - \left(\frac{V_1 - V_1^*}{2i}\right)^2 (I + \rho^2)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$U_N = \begin{cases} \dfrac{V_1 + V_1^*}{2}(I + \rho^2)^{\frac{1}{2}} + i\left[\left(\dfrac{V_1 - V_1^*}{2i}\right)^2 (I + \rho^2) - \rho^2\right]\Big|_{E_2}, \\ V_1|_{\mathscr{N}(\rho)} \end{cases}$$

$$U_P = \begin{cases} V_0\left[\dfrac{V_1 + V_1^*}{2}(I + \rho^2)^{\frac{1}{2}} - i\left(\left(\dfrac{V_1 - V_1^*}{2i}\right)^2\right.\right. \\ \qquad \left.\left. \times (I + \rho^2) - \rho^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] V_0^*\Big|_{\overline{U_1^* V_0 \mathscr{A}_2 E_2}}, \\ U_1^*|_{\mathscr{R}(V_0)^\perp} \end{cases}$$

$$C = 0,\ D = 0,\ T = 0,$$

并且 $\sigma(U) = \sigma(S) \cup \sigma(S^{*-1}) \cup \sigma(U_N) \cup \sigma(U_P)$.

证 事实上,在本推论的假设下,根据推论 2.18 的 (iii) 知道,必有形如 (2.83) 的极大半负子空间 L_A 是对 U, U^{-1} 都不变的. 特别取 $\mathscr{B}_1 = 0$, $\|A_2\| < 1$, 那就得到本推论中所给出的标准分解. 余下的可仿推论 2.12 的计算(当然比推论 2.12 情况要复杂得多,但没有本质困难)来直接证明本推论结论,这里从略.

§3 压缩算子

设 T 是 Hilbert 空间 $(H_0, [\cdot, \cdot]_0)$ 上压缩算子. P. R. Halmos 证明, T 必可膨胀成酉算子, 即存在 Hilbert 空间 $(H_1, [\cdot, \cdot]_1)$ 以及 Hilbert 空间$(H_0 \oplus H_1, [\cdot, \cdot]_0 \oplus [\cdot, \cdot]_1)$ 上酉算子

1) 为确定起见,把 (2.88) 取"+"时的算子作为 $\mathscr{A}_1$.

U，使得

$$T = PU|_{H_0}, \tag{3.1}$$

其中 P 是 $H_0 \oplus H_1$ 在 H_0上投影．后来 B. Sz-Nagy 推广上述结果成为下式成立

$$T^n = PU^n|_{H_0}, \ n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{3.2}$$

显然，从 (3.2) 还可以得到 $T^{*n} = PU^{-n}|_{H_0}(n = 1, 2, \cdots)$．这通常分别称为压缩算子的 Halmos 意义和 Nagy 意义下的酉膨胀．这一节中，我们将讨论一般的完备的不定度规空间上的压缩算子的酉膨胀问题．

1. 压缩算子和正则压缩算子

定义 3.1 设 T 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上线性算子，如果下式成立

$$(Tx, \ Tx) \leqslant (x, x), \ x \in \mathscr{D}(T), \tag{3.3}$$

那末称 T 是 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上压缩算子．

Hilbert 空间上压缩算子是连续的，但 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上压缩算子确实可能是无界的(即使它的定义域是全空间)．

定义 3.2 设 T 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上稠定闭压缩算子．如果存在正则分解 $\Pi = H_- \oplus H_+$，使得 $H_- \subset \mathscr{D}(T)$，并且

$$\Pi = \overline{TH_-} \oplus (TH_-)^\perp$$

成立，那末称 T 是正则压缩算子．

事实上，定义 3.2 的分解 $\Pi = \overline{TH_-} \oplus (TH_-)^\perp$ 中的

$$\overline{TH_-} = TH_-.$$

这是因为 $H_- \subset \mathscr{D}(T)$，$(Tx, Tx) \leqslant (x, x)$，所以 TH_- 必是负的闭线性子空间，因此

$$\overline{TH_-} = TH_-.$$

后面我们将证明稠定压缩算子是不是正则压缩的并不依赖于上述要求(即 $H_- \subset \mathscr{D}(T)$)的正则分解．现在，先给出正则压缩算子的连续性方面的结果．

定理 3.1 如果 T 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上正

则压缩算子,那末 T 必是连续的,并且可唯一地延拓成全空间定义的正则压缩算子.

证 根据假设,有正则分解 $\Pi = H_-\oplus H_+$, $H_-\subset\mathscr{D}(T)$, 使得

$$\Pi = TH_-\oplus(TH_-)^\perp. \tag{3.4}$$

正则分解 $\Pi = H_-\oplus H_+$, $\Pi = TH_-\oplus TH_-^\perp$ 所产生的内积、范数分别表示为 $[\cdot,\cdot]$, $\|\cdot\|$; $[\cdot,\cdot]_1$, $\|\cdot\|_1$.

令 $T_{H_-} = T|_{H_-}$, $T_1 = P_{TH_-}T|_{H_+}$, $T_2 = P_{TH_-^\perp}T|_{H_+}$, 显然,我们只要证明它们都是 $(\Pi, [\cdot,\cdot])$ 到 $(\Pi, [\cdot,\cdot]_1)$ 的连续映射就可以了. 下面分三步来证明这一点.

(1) 因为 $\|T_{H_-}x\|_1 \geqslant \|x\|(x\in H_-)$, 所以 T_{H_-} 是 H_- 到 T_{H_-} 的双射. 但是, $T_{H_-}^{-1}$ 是有界的, 根据逆算子定理, T_{H_-} 是有界的.

(2) 如果 T_1 是无界的, 那末存在点列 $\{y_n\}\subset H_+\cap\mathscr{D}(T)$, 使得 $\|y_n\|\to 0(n\to\infty)$, 但 $\|T_1y_n\|_1 = 1$, $n = 1, 2, \cdots$.

我们不妨认为

$$\lim_{n\to\infty}\|T_{H_-}^{-1}T_1y_n\| = \alpha \neq 0$$

(否则选取一个子点列),令

$$z_n = -T_{H_-}^{-1}T_1y_n + y_n(n = 1, 2, \cdots),$$

显然

$$\lim_{n\to\infty}(z_n, z_n) = \lim_{n\to\infty}[(T_{H_-}^{-1}T_1y_n, T_{H_-}^{-1}T_1y_n) + (y_n, y_n)]$$

$$= -\alpha^2, \tag{3.5}$$

$$\lim_{n\to\infty}(Tz_n, Tz_n) = \lim_{n\to\infty}(T_2y_n, T_2y_n) \geqslant 0, \tag{3.6}$$

这与 T 是压缩算子的假设相矛盾, 所以 T_1 在 $H_+\cap\mathscr{D}(T)$ 上有界.

(3) 如果 T_2 是无界的, 那末也存在 $\{y_n\}\subset H_+\cap\mathscr{D}(T)$, $\|y_n\| = 1$, $n = 1, 2, \cdots$, 但 $\|T_2y_n\|_1\to\infty(n\to\infty)$. 类似于(2), 定义 $z_n = -T_{H_-}^{-1}T_1y_n + y_n(n = 1, 2, \cdots)$, 仍然可从 T_{H_-}, $T_{H_-}^{-1}$ 和 T_1 的有界性得到 $\{(z_n, z_n)\}$ 是有界数列. 另一方面,又有

$$(z_n, z_n) \geqslant (Tz_n, Tz_n) = (T_2 y_n, T_2 y_n) = \|T_2 y_n\|^2 \to \infty,$$
这和 $\{(z_n, z_n)\}$ 是有界的相矛盾. 所以, T_2 也在 $H_+ \cap \mathscr{D}(T)$ 上有界.

从 (1), (2), (3) 可知, T 在 $\mathscr{D}(T)$ 上连续, 因而可唯一地延拓成定义在全空间的连续的压缩算子. 显然, 延拓后的算子仍是正则压缩的.

不失一般性, 今后把正则压缩算子总是理解为定义在全空间的.

2. 正则压缩算子的一般形式 先给一个引理.

引理 3.2 设 T 是 Hilbert 空间 $(H, [\cdot, \cdot])$ 上有界线性算子. $E^{\pm}$, $E'^{\pm}$ 分别是 $I - T^*T$, $I - TT^*$ 的正负谱子空间. 令 $E_0 = \mathscr{N}(I - T^*T)$, $E_0' = \mathscr{N}(I - TT^*)$. 那末

(i) 对任何在点 $t = 1$ 的某个环境中有界的 Borel 可测函数 $f(t)$, 有

$$T^* f(I - TT^*) = f(I - T^*T) T^*,$$
$$T f(I - T^*T) = f(I - TT^*) T. \tag{3.7}$$

(ii) $T^* E_0' = E_0$, $TE_0 = E_0'$; $T^* E'^{\pm} \subset E^{\pm}$, $TE^{\pm} \subset E'^{\pm}$.

证 (i) 在§2引理 2.4 中取 $f(t)$ 为 $f(1 - t)$, 立即得到 (3.7) 的第二式. 再用 T^* 代替引理 2.4 中的 T, 就又得第一式.

(ii) 从等式

$$T^*(I - TT^*) = (I - T^*T) T^*$$

立即可得 $T^* E_0' \subset E_0$. 反之, 对任何 $z \in E_0 (= \mathscr{N}(I - T^*T))$, 立即有 $z = T^*Tz$, 从而 $(I - TT^*)Tz = 0$, 即 $Tz \in E_0'$. 这样, 就得到 $z \in T^* E_0'$, 从而 $T^* E_0' = E_0$.

同样, 还可以证明 $TE_0 = E_0'$.

令 $\chi(t)$ 是$(-\infty, 1]$的特征函数, 从 (3.7) 有

$$T^* \chi(I - TT^*) = \chi(I - T^*T) T^*. \tag{3.8}$$

当 $x \in E'^{+}$ 时, 由上式可知, $0 = \chi(I - T^*T) T^* x$, 即 $T^* x \in E^{+}$.

这样就得到 $T^* E'^{+} \subset E^{+}$, 类似可证明 $T^* E'^{-} \subset E^{-}$.

换 T 为 T^*, 就得到 $TE^{\pm} \subset E'^{\pm}$. 证毕.

为叙述方便，我们引入如下记号．设

$$\Pi = H_-\oplus H_+,\ \Pi = H'_-\oplus H'_+$$

是两个正则分解，如果 T_{H_-}, T_1, T_2 是三个有界线性算子，它们分别是 $T_{H_-}: H_- \to H'_-$; $T_1: H_+ \to H'_-$; $T_2: H_+ \to H'_+$, 那末由它们生成的 Π 上线性算子

$$T = \begin{cases} T_{H_-}, & \text{在 } H_- \text{ 上} \\ T_1 + T_2, & \text{在 } H_+ \text{ 上} \end{cases}$$

显然也是有界的．我们常表示 T 为 $\{T_{H_-}, T_1, T_2\}$，并用 VR 表示 T_{H_-} 的极分解．

引理 3.3 在正则分解 $\Pi = H_-\oplus H_+$, $\Pi = H'_-\oplus H'_+$ 下，有界线性算子 $T = \{T_{H_-}, T_1, T_2\}$ 为 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上压缩算子的充要条件是

(i) $R^2 \geqslant I$.

(ii) 对任何 $y \in H_+$,

$$\|(R^2 - I)^{-\frac{1}{2}} V^* T_1 y\| \leqslant \|(I + T_1^* P T_1 - T_2^* T_2)^{\frac{1}{2}} y\|,$$

此处 P 是 Hilbert 空间 $(H'_-, -(\cdot, \cdot))$ 在闭子空间 $H'_- \ominus \mathscr{R}(V)$ 上的投影．

证 必要性 如果 T 是压缩的，那末 (i) 是显然的． 下面证明 (ii) 成立．

显然，T 为压缩算子的充要条件是对任何 $x_\pm \in H_\pm$,

$$\begin{aligned} -[(T_{H_-}^* T_{H_-} - I)x_-, x_-] - [T_{H_-}x_-, T_1 x_+]' \\ - [T_1 x_+, T_{H_-}x_-]' - [T_1^* T_1 x_+, x_+] \\ \leqslant [(I - T_2^* T_2)x_+, x_+], \end{aligned} \tag{3.9}$$

此处 $[\cdot, \cdot]$, $[\cdot, \cdot]'$ 分别是由正则分解

$$\Pi = H_-\oplus H_+,\ \Pi = H'_-\oplus H'_+$$

所产生的内积（相应的范数分别记为 $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$）．

先证明 $\mathscr{R}(V^* T_1) \subset \mathscr{D}((R^2 - I)^{-\frac{1}{2}})$．设

$$R = \int_{1-0}^{\|R\|} \lambda dE_\lambda$$

是谱分解，令 P_1 是 $(H_-, -(\cdot, \cdot))$ 在闭子空间 $\mathscr{N}(R^2 - I)$ 上

的投影（可能 $P_1=0$），如果有 $x_+\in H_+$，使得 $P_1V^*T_1x_+\neq 0$，那末固定 x_+，取 $x_-=\alpha P_1V^*T_1x_+$（α 是复数），从(3.9)便得到

$$-2Re\alpha[P_1V^*T_1x_+, V^*T_1x_+]-[T_1^*T_1x_+, x_+] \leqslant [(I-T_2^*T_2)x_+, x_+]. \tag{3.10}$$

因为 T_1, T_2 是有界的，α 是任意的复数，显然(3.10)不能成立。由此可知，对任何 $x_+\in H_+$，$P_1V^*T_1x_+=0$，即

$$V^*T_1H_+\subset\mathscr{N}(R^2-I)^\perp.$$

如果有 $x_+\in H_+$，使得 $V^*T_1x_+\bar{\in}\mathscr{D}((R^2-I)^{-\frac{1}{2}})$，那末必存在正数 $\varepsilon>0$，使得

$$\int_{1+\varepsilon}^{\|R\|}(\lambda^2-1)^{-1}d\|E_\lambda y_1\|^2>M_0+[T_1^*T_1x_+, x_+], \tag{3.11}$$

此处 $y_1=V^*T_1x_+$, $M_0=[(I-T_2^*T_2)x_+,x_+]$. 另一方面，如记

$$I(x_+, x_-)=-[(R^2-I)x_-, x_-]-[Rx_-, V^*T_1x_+] -[V^*T_1x_+,Rx_-]-[T_1^*T_1x_+,x_+],$$

根据(3.9)，应有

$$\sup_{x_-\in H_-} I(x_+, x_-)\leqslant M_0. \tag{3.12}$$

特别，当取 $y_\varepsilon=(E_{\|R\|}-E_{1+\varepsilon})y_1$, $x_-=-R(R^2-I)^{-1}y_\varepsilon$ 时，由(3.11)就得到

$$I(x_+,-R(R^2-I)^{-1}y_\varepsilon)=\|R(R^2-I)^{-\frac{1}{2}}y_\varepsilon\|^2 -[T_1^*T_1x_+, x_+]>M_0. \tag{3.13}$$

显然，它与(3.12)矛盾。因此 $V_1^*T_1H_+\subset\mathscr{D}((R^2-I)^{-\frac{1}{2}})$.

再证明(ii)：因为 $V_1^*T_1H_+\subset\mathscr{D}((R^2-I)^{-\frac{1}{2}})$，所以对任何 $x_\pm\in H_\pm$，我们有

$$I(x_+, x_-)=-\|(R^2-I)^{\frac{1}{2}}x_-+R(R^2-I)^{-\frac{1}{2}}V^*T_1x_+\|^2 +\|(R^2-I)^{-\frac{1}{2}}V^*T_1x_+\|^2-[T_1^*PT_1x_+, x_+] \leqslant [(I-T_2^*T_2)x_+,x_+]. \tag{3.14}$$

但是，$(R^2-I)^{\frac{1}{2}}H_-$ 是在 H_- 的闭线性子空间 $\overline{R(R^2-I)^{-\frac{1}{2}}V^*T_1H_+}$ 中稠密的，所以由(3.14)可知，(ii)成立。

充分性　如果(i)，(ii)成立，那末(3.14)便成立。从而(3.9)成立，即 $T=\{T_{H_-}, T_1, T_2\}$ 是压缩算子。证毕。

下面证明压缩算子的正则性不依赖于正则分解 $\Pi = H_-\oplus H_+$ 的选取。

定理 3.4 设 T 是完备的不定度规空间上正则压缩算子. 那末，对任何正则分解 $\Pi = H'_-\oplus H'_+$ 都必有 $\Pi = TH'_-\oplus(TH'_-)^\perp$.

证 显然，我们只须证明 TH'_- 是极大负的，并且有分解

$$\Pi = TH'_-\oplus(TH'_-)^\perp.$$

根据正则压缩算子的定义，存在正则分解 $\Pi = H_-\oplus H_+$，使得 $\Pi = TH_-\oplus(TH_-)^\perp$ 成立. 因而，对于正则分解

$$\Pi = H_-\oplus H_+,$$

以及

$$\Pi = TH_-\oplus(TH_-)^\perp,\ T = \{T_{H_-},\ T_1,\ T_2\}$$

(其中 $T_{H_-}: H_- \to TH_-$; $T_1: H_+ \to TH_-$; $T_2: H_+ \to (TH_-)^\perp$).

又显然存在 $(H_-, -(\cdot,\ \cdot))$ 到 $(H_+, (\cdot,\ \cdot))$ 的压缩算子 A, $\|A\| \leqslant \alpha < 1$ (α 是数)，使得 $H'_- = L_A$. 这样，

$$\begin{aligned} TH'_- &= T\{\{x,\ Ax\}\,|\,x\in H_-\} \\ &= \{\{T_{H_-}x + T_1Ax,\ T_2Ax\}_1\,|\,x\in H_-\}, \end{aligned}$$

这里$\{x'_-,\ x'_+\}_1$和 $\{x_-,\ x_+\}$ 一样，不过是对正则分解

$$\Pi = TH_-\oplus(TH_-)^\perp$$

而言的，向量 $x'_- + x'_+$ 的另一种表示方式.

证明 TH'_- 是极大负的，并且 $\Pi = TH'_-\oplus(TH'_-)^\perp$ 成立. 显然等价于证明下面 (i), (ii) 成立.

(i) 算子 $B = T_{H_-} + T_1A$ 是 $(H_-, -(\cdot,\ \cdot))$ 到 $(TH_-, -(\cdot,\ \cdot))$ 的双射，

(ii) $\|T_2AB^{-1}\| < 1$.

因为对任何 $x\in H_-$, $x\neq 0$, 向量 $\{x,\ Ax\}$ 是负的，根据T的压缩性，$T_{H_-} + T_1A$ 必是单射. 又根据T的正则压缩性，

$$T_{H_-}H_- = TH_-,$$

并且视 T_{H_-} 是 $(H_-, -(\cdot,\ \cdot))$ 到 $(TH_-, -(\cdot,\ \cdot))$ 的算子时，

$$\|T_{H_-}\| \geqslant 1,$$

所以,对任何 $x \in H_-$,

$$\|T_{H}^{-1}T_1Ax\| = \|R^{-1}V^*T_1Ax\| = \|R^{-1}(R^2 - I)^{\frac{1}{2}}(R^2 - I)^{-\frac{1}{2}}V^*T_1Ax\| \leqslant \|(R^2 - I)^{-\frac{1}{2}}V^*T_1Ax\|, \tag{3.15}$$

此处算子 V 和 R 是极分解 $T_{H_-} = VR$ 中的 V, R. 根据引理 3.3 的 (ii), 由 (3.15) 得到

$$\|T_{H_-}^{-1}T_1Ax\| \leqslant \|(I + T_1^*PT_1 - T_2^*T_2)^{\frac{1}{2}}Ax\| \leqslant \|Ax\|,$$

即 $\|T_{H_-}^{-1}T_1A\| \leqslant \alpha < 1$. 这样, $B = T_{H_-}(I + T_{H_-}^{-1}T_1A)$ 便是 H_- 到 TH_- 的双射,即 (i) 成立.

根据 T 的正则压缩性,对任何 $x \in H_-$,

$$\|Bx\|_1^2 - \|T_2Ax\|_1^2 \geqslant \|x\|^2 - \|Ax\|^2,$$

其中 $\|\cdot\|_1$ 是由正则分解 $\Pi = TH_-\oplus(TH_-)^\perp$ 所产生的范数. 因此,对任何 $y \in TH_-$,

$$\|y\|_1^2 - \|T_2AB^{-1}y\|_1^2 \geqslant \|B^{-1}y\|^2 - \|AB^{-1}y\|^2 = \|(I - A^*A)^{\frac{1}{2}}B^{-1}y\|^2. \tag{3.16}$$

因为 $\|A\| \leqslant \alpha < 1$, 所以必存在正数 γ (不妨设 $\gamma < 1$), 使得

$$\|(I - A^*A)^{\frac{1}{2}}B^{-1}y\| \geqslant \gamma\|y\|_1. \tag{3.17}$$

由 (3.16), (3.17) 立即得到

$$\|T_2AB^{-1}y\|_1^2 \leqslant (1 - \gamma^2)\|y\|_1^2,$$

即 (ii) 成立.

由于闭线性子空间 $TH_-'(= TL_A)$ 相对于正则分解

$$\Pi = TH_-\oplus(TH_-)^\perp$$

的图象表示是 $L_{T_2AB^{-1}} = \{\{y, T_2AB^{-1}y\} | y \in TH_-\}$. 由 (i), (ii) 可知, TH_-' 是极大负的,并且是完备子空间,从而有

$$\Pi = TH_-'\oplus(TH_-')^\perp.$$

证毕.

由引理 3.3 和定理 3.4 可立即得如下的推论.

推论 3.5 设 T 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上正则压缩算子,那末在任何正则分解 $\Pi = H_-\oplus H_+$ 下, T 有表示

$$T = \begin{matrix} TH_- \\ (TH_-)^\perp \end{matrix} \begin{pmatrix} T_{H_-} & T_1 \\ O & T_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} H_- \\ H_+ \end{matrix} \quad (\text{即 } T = \{T_{H_-}, T_1, T_2\}),$$

如令 $T_{H_-} = VR$ 是极分解，则必有

(i) $R^2 \geqslant I$，V 是 $(H_-, -(\cdot, \cdot))$ 到 $(TH_-, -(\cdot, \cdot))$ 的酉算子.

(ii) 对任何 $y \in H_+$，

$$\|(R^2 - I)^{-\frac{1}{2}} V^* T_1 y\| \leqslant \|(I - T_2^* T_2)^{\frac{1}{2}} y\|.$$

(因为 T 是正则压缩的，所以引理 3.3 的 (ii) 中的 P 为零).

推论 3.6 设 T 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上正则压缩算子. 在正则分解 $\Pi = H_- \oplus H_-$ 下，$T = \{T_{H_-}, T_1, T_2\}$. 那末，算子 $K = (R^2 - I)^{-\frac{1}{2}} V^* T_1 (I - T_2^* T_2)^{-\frac{1}{2}}$ 是 Hilbert 空间 $(\overline{(I - T_2^* T_2) H_+}, (\cdot, \cdot))$ 到 Hilbert 空间 $(\overline{(R^2 - I) H_-}, -(\cdot, \cdot))$ 的压缩算子.

推论 3.5，3.6 是显然的，证明从略.

下面给出一个非正则的有界压缩算子.

例 3.1 设 $\Pi = H_- \oplus H_+$，$H_\pm = l^2$. 假设 $\{e_i\}$ $(i = -1, -2, \cdots)$，$\{e_j\}$ $(j = 0, 1, 2, \cdots)$ 分别是 $(H_-, -(\cdot, \cdot))$，$(H_+, (\cdot, \cdot))$ 的完备就范直交系，并设 T 是 Π 在基 $\{e_i\}$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 下的左移算子：$Te_i = e_{i-1}$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. 显然，$T$ 是 Π 上有界的压缩算子，但 TH_- 就不是极大负子空间，所以 T 不可能是正则压缩的.

3. 正则压缩的酉膨胀

定义 3.3 设 T 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上压缩算子，$\mathscr{D}(T) = \Pi$. $(H_i, [\cdot, \cdot]_i)$ $(i = 1, 2)$ 是两个 Hilbert 空间，如果 U 是完备的不定度规空间 $(\Pi \oplus H_1, (\cdot, \cdot) \oplus [\cdot, \cdot]_1)$ 到完备的不定度规空间 $(\Pi \oplus H_2, (\cdot, \cdot) \oplus [\cdot, \cdot]_2)$ 上的酉算子，使得

$$T = PU|_\Pi,$$

此处 P 是 $\Pi \oplus H_2$ 在 Π 上的投影. 那末，称 (U, H_1, H_2) 是 T 的 Halmos 意义下的酉膨胀. 如果 $H_1 = H_2$，$[\cdot, \cdot]_1 = [\cdot, \cdot]_2$，并且

$$T^n = PU^n|_\Pi, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

那末称 (U, H_1, H_1) 是 T 的 Nagy 意义下的酉膨胀.

引理 3.7 设 T 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上的线性算子，$\mathscr{D}(T) = \Pi$. 下列命题成立.

(i) 如果 T 是压缩（或正则压缩）算子，那末对任何 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上酉算子 U, UT 仍是压缩(或正则压缩)算子.

(ii) 如果在正则分解 $\Pi = H_- \oplus H_+$ 下，正则压缩算子

$$T = \{T_{H_-}, T_1, T_2\},$$

那末必存在 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上酉算子 $\widetilde{U}$, 使得

a) $\widetilde{U}TH_- = H_-$;

b) 如果 (U, H_1, H_2) 是 T 的 Halmos 意义下的酉膨胀，那末 $(U'U, H_1, H_2)$ 也是 $\widetilde{U}T$ 的 Halmos 意义下的酉膨胀，此处

$$U' = \widetilde{U} \oplus I_{H_2};$$

c) 如果 (U, H_1, H_2) 是 $\widetilde{U}T$ 的 Halmos 意义下的酉膨胀，那末 $(U'^{-1}U, H_1, H_2)$ 也是 T 的 Halmos 意义下的酉膨胀.

引理 3.7 是显而易见的，证明从略.

引理 3.7 表明，要找出 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上正则压缩算子 T 的一切酉膨胀，等价于只要考虑具有下列性质的正则压缩算子 T 的一切酉膨胀，存在正则分解 $\Pi = H_- \oplus H_+$, $TH_- = H_-$. 下面给出正则压缩算子 T 的 Halmos 意义下的一切酉膨胀的形式.

定理 3.8 设在正则分解 $\Pi = H_- \oplus H_+$ 下，正则压缩算子

$$T = \{T_{H_-}, T_1, T_2\},$$

并满足 $TH_- = H_-$. 令 $T_{H_-} = VR$ 是极分解，那末 T 必有 Halmos 意义下的酉膨胀，并且酉膨胀 (U, H_1, H_2) 的一般形式是

$$U = \begin{array}{c} H_- \\ H_+ \\ H_2 \end{array} \begin{pmatrix} T_{H_-} & T_1 & Y \\ O & T_2 & (I - T_2^* T_2)^{\frac{1}{2}} U_2^* \\ U_4(R^2 - I)^{\frac{1}{2}} & X & Z \end{pmatrix} \begin{array}{c} H_- \\ H_+ \\ H_1 \end{array},$$

$$X = U_4(R^2 - I)^{-\frac{1}{2}} R V^* T_1 + V_5(I - K^*K)^{\frac{1}{2}}(I - T_2^* T_2)^{\frac{1}{2}},$$

$$Y = -T_1 T_2^*(I - T_2 T_2^*)^{-\frac{1}{2}} U_2^* + V(R^2 - I)^{\frac{1}{2}}(I - K^*K)^{\frac{1}{2}} V_1^*,$$

$$Z = -[U_4 RK + V_5(I - K^*K)^{\frac{1}{2}}] T_2^* U_2^* + [U_4 R(I - KK^*)^{\frac{1}{2}} - V_5 K^*] V_1^* + W.$$

并且两个 Hilbert 空间 H_1, H_2 有如下直交分解：

$$H_1 = \mathscr{R}(U_2)\oplus\mathscr{R}(V_1)\oplus(\mathscr{R}(U_2)\oplus\mathscr{R}(V_1))^{\perp},$$
$$H_2 = \mathscr{R}(U_4)\oplus\mathscr{R}(V_5)\oplus(\mathscr{R}(U_4)\oplus\mathscr{R}(V_5))^{\perp}.$$

此处 $K = (R^2 - I)^{-\frac{1}{2}}V^*T_1(I - T_2^*T_2)^{\frac{1}{2}}$ 是 $(\overline{(I - T_2^*T_2)H_+}, (\cdot,\cdot))$到 $(\overline{(R^2 - I)H_-}, -(\cdot,\cdot))$ 的压缩算子，而 U_4, U_2, V_5, V_1, W都是保距双射.

$U_4:(\overline{\mathscr{R}(R^2 - I)}, -(\cdot,\cdot)) \to (\mathscr{R}(U_4), [\cdot,\cdot]_2);$

$U_2:(\overline{\mathscr{R}(I - T_2^*T_2)}, (\cdot,\cdot)) \to (\mathscr{R}(U_2), [\cdot,\cdot]_1);$

$V_5:(\overline{\mathscr{R}((I - K^*K)^{\frac{1}{2}}(I - T_2^*T_2)^{\frac{1}{2}})}, (\cdot,\cdot))$
$\quad\to (\mathscr{R}(V_5), [\cdot,\cdot]_2);$

$V_1:(\overline{\mathscr{R}((I - KK^*)^{\frac{1}{2}}(R^2 - I)^{\frac{1}{2}})}, -(\cdot,\cdot))$
$\quad\to (\mathscr{R}(V_1), [\cdot,\cdot]_1);$

$W:((\mathscr{R}(U_2)\oplus\mathscr{R}(V_1))^{\perp}, [\cdot,\cdot]_1)$
$\quad\to ((\mathscr{R}(U_4)\oplus\mathscr{R}(V_5))^{\perp}, [\cdot,\cdot]_2).$

证 将所要求出的U表示成 3 × 3 矩阵，

$$U = \begin{matrix} H_- \\ H_+ \\ H_1 \end{matrix}\begin{pmatrix} T_{H_-} & T_1 & A_1 \\ O & T_2 & A_2 \\ A_4 & A_5 & A_3 \end{pmatrix}\begin{matrix} H_- \\ H_+ \\ H_2 \end{matrix}.$$

显然,算子U已满足方程 $T = PU|_{\Pi}$，其中P是 $(\Pi\oplus H_2, [\cdot,\cdot]\oplus[\cdot,\cdot]_2)_1$ 在 Π 上的投影. 所以，剩下的只是问U是否可以在适当选取有界算子 A_1, A_2, A_3, A_4 和 A_5时，可使它成为 $(\Pi\oplus H_1, (\cdot,\cdot)\oplus[\cdot,\cdot]_1)$ 到 $(\Pi\oplus H_2, (\cdot,\cdot)\oplus[\cdot,\cdot]_2)$ 的酉算子. 显然，U为酉算子的充要条件是 $UU^{\dagger} = I_{\Pi\oplus H_2}$，$U^{\dagger}U = I_{\Pi\oplus H_1}$，即

(i) $T_{H_-}^*T_{H_-} - A_4^*A_4 = I_{H_-}$

(i)′ $-T_{H_-}T_{H_-}^* + T_1T_1^* + A_1A_1^* = -I_{H_-};$

(ii) $-T_1^*T_1 + T_2^*T_2 + A_5^*A_5 = I_{H_+},$

(ii)′ $T_2T_2^* + A_2A_2^* = I_{H_+};$

(iii) $-A_1^*A_1 + A_2^*A_2 + A_3^*A_3 = I_{H_1},$

(iii)′ $-A_4A_4^* + A_5A_5^* + A_3A_3^* = I_{H_2};$

(iv) $T_{H_-}^*T_1 - A_4^*A_5 = 0,$

(iv)′ $T_1T_2^* + A_1A_2^* = 0;$

(v) $T_{H_-}^* A_1 - A_4^* A_5 = 0$,

(v)′ $-T_{H_-} A_4^* + T_1 A_5^* + A_1 A_3^* = 0$;

(vi) $-T_1^* A_1 + T_2^* A_2 + A_5^* A_3 = 0$,

(vi)′ $T_2 A_5^* + A_2 A_3^* = 0$.

下面就是要分许多步解出适合 (i)—(vi), (i)′—(vi)′ 的所有可能的解. 为了方便,我们将省去 I 的下标(在有可能引起混淆时,再将相应于某个空间上的单位算子附上相应下标).

a) 解 (i). 因 $T_{H_-} = VR$ 是极分解, $R^2 \geqslant I$, 并且 V 是 $(H_-, -(\cdot, \cdot))$ 上酉算子,由 (i) 可得

$$A_4 = U_4(R^2 - I)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.18}$$

此处 U_4 是 $(\overline{\mathscr{R}(R^2 - I)}, -(\cdot, \cdot))$ 到 $(\mathscr{R}(U_4), [\cdot, \cdot]_2)$ 的酉算子.

b) 解 (iv). 根据 (3.18) 方程 (iv) 化成

$$RV^* T_1 - (R^2 - I)^{\frac{1}{2}} U_4^* A_5 = 0,$$

利用 $\mathscr{R}(V^* T_1) \subset \mathscr{D}((R^2 - I)^{-\frac{1}{2}})$ (见引理 3.2 的证明),我们得到

$$R(R^2 - I)^{-\frac{1}{2}} V^* T_1 + U_4^* A_5 = 0.$$

因此, A_5 的一般形式是

$$\begin{cases} A_5 = A_5^0 + A_5^1,\ \mathscr{R}(A_5^0) \subset \mathscr{N}(U_4^*),\ \mathscr{R}(A_5^1) \subset \mathscr{N}(U_4^*)^{\perp}, \\ A_5^1 = U_4 R(R^2 - I)^{-\frac{1}{2}} V^* T_1. \end{cases} \tag{3.19}$$

因为 $K_1 = (R^2 - I)^{-\frac{1}{2}} V^* T_1$ 是有界线性算子(见引理 3.3 或推论 3.5), 所以 A_5^1 是有界的,并且 $A_5^{1*} = K_1^* R U_4^*$.

c) 解 (ii). 因为 $\mathscr{R}(A_5^0)$ 与 $\mathscr{R}(A_5^1)$ 是 $(H_2, [\cdot, \cdot]_2)$ 中两个直交的线性子空间,所以 $A_5^* A_5 = A_5^{0*} A_5^0 + A_5^{1*} A_5^1$, 但是

$$T_1^* T_1 = T_1^* V V^* T_1 = K_1^*(R^2 - I) K_1 = A_5^{1*} A_5^1 - K_1^* K_1,$$

因此 (ii) 化成下列方程

$$A_5^{0*} A_5^0 = (I - T_2^* T_2) - K_1^* K_1.$$

这样,根据推论 (3.6), 对任何 $x \in H_+$, 易知

$$\|A_5^0 x\|^2 = \|\overline{(I - K^* K)^{\frac{1}{2}} (I - T_2^* T_2)^{\frac{1}{2}}} x\|^2,$$

也就是说, 存在 $(\mathscr{R}((I - K^* K)(I - T_2^* T_2)^{\frac{1}{2}}), (\cdot, \cdot))$ 到

$(\overline{\mathscr{R}(A_5^0)}, [\cdot, \cdot]_2)$ 的酉算子 V_5，使得

$$A_5^0 = V_5(I - K^*K)^{\frac{1}{2}}(I - T_2^*T_2)^{\frac{1}{2}}, \ \mathscr{R}(V_5) \subset \mathscr{N}(U_4^*). \quad (3.20)$$

d) 解 (ii)′. 类似于 a)，$A_2^* = U_2(I - T_2T_2^*)^{\frac{1}{2}}$，此处 U_2 是 $(\overline{\mathscr{R}(I - T_2T_2^*)}, (\cdot, \cdot))$ 到 $(\overline{\mathscr{R}(U_2)}, [\cdot, \cdot]_1)$ 的酉算子.

e) 解 (iv)′. 如果 $x \in \mathscr{N}(A_2^*)$ (即 $(I - T_2T_2^*)x = 0$)，那末 $(I - T_2^*T_2)T_2^*x = 0$. 因此，根据推论 3.5 的 (ii)，有

$$(R^2 - I)^{-\frac{1}{2}}V^*T_1T_2^*x = 0, \ x \in \mathscr{N}(A_2^*).$$

注意到 V 是酉算子，由上式得到，对任何

$$x \in \mathscr{N}(A_2^*), \ T_1T_2^*x = 0.$$

这样，(iv)′ 可以被 A_2^* 除，所以有

$$\begin{cases} A_1 = A_1^0 + A_1^1, \ \mathscr{D}(A_1^1) = \overline{\mathscr{R}(A_2^*)} = \mathscr{R}(U_2)(\subset H_1), \\ \qquad\qquad \mathscr{D}(A_1^0) = \mathscr{R}(U_2)^{\perp}(\subset H_1), \qquad (3.21) \\ A_1^1 = -T_1T_2^*(I - T_2T_2^*)^{-\frac{1}{2}}U_2^*. \end{cases}$$

根据引理 3.2,

$$A_1^1 = -T_1(I - T_2^*T_2)^{-\frac{1}{2}}T_2^*U_2^* = -VK_2T_2^*U_2^*,$$

此处 $K_2 = V^*T_1(I - T_2^*T_2)^{-\frac{1}{2}}$，$K_2$ 是有界的. 从而 A_1 有界.

f) 解 (i)′. 因为 $\mathscr{D}(A_1^0) \perp \mathscr{D}(A_1^1)$，所以

$$A_1A_1^* = A_1^1A_1^{1*} + A_1^0A_1^{0*}.$$

从 $\mathscr{N}(I - T_2^*T_2) \subset \mathscr{N}(V^*T_1)$，$\mathscr{R}(V^*T_1) \subset \mathscr{R}((R^2 - I)^{-\frac{1}{2}})$，并且 $V^*T_1(I - T_2^*T_2)^{-\frac{1}{2}}$ 是 $(\overline{\mathscr{R}(I - T_2^*T_2)}, (\cdot, \cdot))$ 到 $(\overline{\mathscr{R}(R^2 - I)}, -(\cdot, \cdot))$ 的有界算子，易知 $(I - T_2^*T_2)^{-\frac{1}{2}}T_1^*V$ 也是有界算子(从 $(\overline{\mathscr{R}(R^2 - I)}, -(\cdot, \cdot))$ 到 $(\overline{\mathscr{R}(I - T_2^*T_2)}, (\cdot, \cdot))$). 再注意到 $V^*T_1|_{\mathscr{N}(I - T_2^*T_2)} = 0$ (见引理 3.3 的 (ii))，就有

$$T_1T_1^* = VV^*T_1T_1^*VV^* = VK_2K_2^*V^* - VK_2T_2^*T_2K_2^*V^*.$$

由于

$$\mathscr{D}(A_1^1) = \overline{\mathscr{R}(A_2^*)} = \mathscr{R}(U_2),$$

并且

$$\mathscr{D}(U_2) = \overline{\mathscr{R}(I - T_2T_2^*)} \supset \mathscr{R}(T_2K_2^*),$$ [1]

所以

$$A_1^1A_1^{1*} = VK_2T_2^*U_2^*U_2T_2K_2^*V^* = VK_2T_2^*T_2K_2^*V^*.$$

这样，方程 (i)′ 化成

$$VK_2K_2^*V^* + A_1^0A_1^{0*} = V(R^2 - I)V^*.$$

根据推论 2.5, 2.6，上面方程是可解的，并且有如下解：

$$\begin{cases} A_1^{0*}V\,|_{\mathscr{N}(R^2-I)} = 0,\quad A_1^{0*}V\,|_{\mathscr{N}(R^2-I)^\perp} = V_1(I - KK^*)^{\frac{1}{2}}(R^2 - I)^{\frac{1}{2}}, \\ \overline{\mathscr{R}(A_1^{0*})} = \mathscr{R}(V_1)(\subset \mathscr{R}(U_2)^\perp). \end{cases} \tag{3.22}$$

此处 V_1 是 $(\overline{\mathscr{R}((I - KK^*)^{\frac{1}{2}}(R^2 - I)^{\frac{1}{2}})},\ -(\cdot,\ \cdot))$ 到 $(\mathscr{R}(U_2)^\perp,\ [\cdot,\ \cdot]_1)$ 的酉算子.

g) 解 (v). 根据 a), (v) 化成

$$-RV^*A_1 + (R^2 - I)^{\frac{1}{2}}U_4^*A_3 = 0;$$

再利用 (3.21), (3.22), 上式化成

$$\begin{aligned} -R[-K_2T_2^*U_2^* + (R^2 - I)^{\frac{1}{2}}(I - KK^*)^{\frac{1}{2}}V_1^*] \\ + (R^2 - I)^{\frac{1}{2}}U_4^*A_3 = 0. \end{aligned}$$

显然，上面方程中可以在左边消去因子 $(R^2 - I)^{\frac{1}{2}}$，得到

$$RKT_2^*U_2^* - R(I - KK^*)^{\frac{1}{2}}V_1^* + U_4^*A_3 = 0.$$

易知，上方程是可解的，并且有解如下.

$$\begin{cases} A_3 = A_3^0 + A_3^1,\quad A_3^1 = U_4R(R^2 - I)^{-\frac{1}{2}}V^*A_1(= U_4R[(I \\ \qquad\qquad - KK^*)^{\frac{1}{2}}V_1^* - KT_2^*U_2^*]), \\ \mathscr{R}(A_3^0) = \mathscr{N}(U_4^*),\ \mathscr{R}(A_3^1) \subset \mathscr{N}(U_4^*)^\perp(= \mathscr{R}(U_4)). \end{cases} \tag{3.23}$$

h) 解(vi)′. 应用已经部分被解出的 A_3 和已解出的 A_1 和 A_2^* 的表达式到方程 (vi)′，它被化成

$$T_2(A_5^{0*} + K_1^*RU_4^*) + (I - T_2T_2^*)^{\frac{1}{2}}U_2^*(A_5^{0*}$$

---

1) 因为 $K_2 = V^*T_1(I - T_2^*T_2)^{-\frac{1}{2}}$ 是有界的，所以对任何 $x \in (I - T_2^*T_2)^{-\frac{1}{2}}$, $y \in H_-$, $((I - T_2^*T_2)^{-\frac{1}{2}}x,\ T_1^*Vy) = -(V^*T_1(I - T_2^*T_2)^{-\frac{1}{2}}x,\ y) = (x,\ K_2^*y)$，即 $T_1^*Vy \in \mathscr{D}((I - T_2^*T_2)^{-\frac{1}{2}})$，并且 $(I - T_2^*T_2)^{-\frac{1}{2}}T_1^*Vy = K_2^*y$. 再根据引理 3.2, $T_2K^* = T_2(I - T_2^*T_2)^{-\frac{1}{2}}T_1^*V = (I - T_2T_2^*)^{-\frac{1}{2}}T_2T_1^*V$. 所以，$\overline{\mathscr{R}(I - T_2T_2^*)} \supset \mathscr{R}(T_2K_2^*)$.

$$+ A_1^* V(R^2 - I)^{-\frac{1}{2}} R U_4^*) = 0.$$

根据 e)，引理 3.2 以及 $\mathscr{R}(T_2 A_5^{0*}) \subset \mathscr{R}((I - T_2 T_2^*)^{\frac{1}{2}})$，上方程又被化成

$$T_2(I - K^*K)^{\frac{1}{2}} V_5^* + U_2^* A_3^{0*} = 0.$$

由此，可解得 A_3^0 的一般形式是

$$\begin{cases} A_3^0 = A_{30}^0 + A_{30}^1, \quad A_{30}^1 = -V_5(I - K^*K)^{\frac{1}{2}} T_2^* U_2^*, \\ \mathscr{D}(A_{30}^1) = \overline{\mathscr{R}(U_2)}, \quad \mathscr{D}(A_{30}^0) = \mathscr{R}(U_2)^{\perp}. \end{cases} \tag{3.24}$$

i) 解 (v)′. 应用 A_4^*，A_5^*，A_1 以及 A_3^* 已得的表达式代入 (v)′，我们得到

$$\begin{aligned} -VR(R^2 - I)^{\frac{1}{2}} U_4^* + T_1(T_1^* V R(R^2 - I)^{-\frac{1}{2}}) U_4^* \\ + A_5^{0*}) + A_1(A_1^* V R(R^2 - I)^{-\frac{1}{2}} U_4^* + A_3^{0*}) \\ = 0; \end{aligned}$$

利用 $-T_H T_{H_}^* + T_1 T_1^* + A_1 A_1^* = -I_{H_}$ 得到

$$T_1 T_1^* + A_1 A_1^* = V(R^2 - I) V^*,$$

代入上式就得到

$$T_1 A_5^{0*} + A_1 A_3^{0*} = 0,$$

它等价于下面的方程

$$(A_5^0 T_1^* + A_3^0 A_1^*) V = 0. \tag{3.25}$$

代入 A_5^0 和 A_1^* 的表达式，得到

$$\begin{aligned} V_5(I - K^*K)^{\frac{1}{2}}(I - T_2^* T_2)^{\frac{1}{2}} T_1^* V + A_3^0(-U_2 T_2 K_2^* V^* V \\ + V_1(I - KK^*)^{\frac{1}{2}}(R^2 - I)^{\frac{1}{2}}) = 0. \end{aligned} \tag{3.26}$$

由于 $\mathscr{D}(A_{30}^0) = \mathscr{R}(U_2)^{\perp}$，$\mathscr{R}(V_1) \subset \mathscr{R}(U_2)^{\perp}$，所以由 (3.26)，得到

$$\begin{aligned} V_5(I - K^*K)^{\frac{1}{2}}(I - T_2^* T_2)^{\frac{1}{2}} T_1^* V + V_5(I - K^*K)^{\frac{1}{2}} T_2^* T_2 K_2^* \\ + A_{30}^0 V_1(I - KK^*)^{\frac{1}{2}}(R^2 - I)^{\frac{1}{2}} = 0, \end{aligned}$$

即

$$[V_5(I - K^*K)^{\frac{1}{2}} K^* + A_{30}^0 V_1(I - KK^*)^{\frac{1}{2}}](R^2 - I)^{\frac{1}{2}} = 0. \tag{3.27}$$

利用 $(I - K^*K)^{\frac{1}{2}} K^* = K^*(I - KK^*)^{\frac{1}{2}}$，

$$\mathscr{D}(V_1) = \overline{\mathscr{R}((I - KK^*)^{\frac{1}{2}}(R^2 - I))},$$

$$\mathscr{D}(V_5) = \overline{\mathscr{R}((I-K^*K)(I-T_2^*T_2)^{\frac{1}{2}})},$$

易知上面方程的解的形式如下.

$$\begin{cases} A_{30}^0 = A_{300}^0 + A_{300}^1, \; A_{300}^1 = -V_5K^*V_1^*, \\ \mathscr{D}(A_{300}^1) = \mathscr{R}(V_1), \; \mathscr{D}(A_{300}^0) = \mathscr{R}(V_1)^{\perp}. \end{cases} \tag{3.28}$$

j) 解 (iii)'. 应用 A_3^0, A_3^1, A_4, A_5 的表达式到方程 (iii)', (iii) 就化成下列两个方程.

$$\begin{cases} -U_4(R^2-I)U_4^* + U_4(R^2-I)^{-\frac{1}{2}}T_{H_}^*T_1T_1^*T_{H_}(R^2-I)^{-\frac{1}{2}}U_4^* \\ + U_4(R^2-I)^{-\frac{1}{2}}T_{H_}^*A_1A_1^*T_{H_}(R^2-I)^{-\frac{1}{2}}U_4^* + A_5^0A_5^{1*} + A_3^0A_3^{1*} \\ \quad = I_{\mathscr{R}(U_4)}, & (3.29) \\ A_3^0A_3^{0*} + A_5^0A_5^{0*} + A_5^1A_5^{0*} + A_3^1A_3^{0*} = I_{\mathscr{R}(U_4)^{\perp}}. & (3.30) \end{cases}$$

基于方程 (i)', 易知 (3.29) 等价于

$$A_5^0A_5^{1*} + A_3^0A_3^{1*} = 0 \text{ (或 } A_5^1A_5^{0*} + A_3^1A_3^{0*} = 0). \tag{3.31}$$

用 A_5^1, A_3^1 表达式代入上面括号中的公式,即得

$$U_4R(R^2-I)^{-\frac{1}{2}}V^*T_1A_5^{0*} + U_4R(R^2-I)^{-\frac{1}{2}}V^*A_1A_3^{0*} = 0.$$

显然,因 (3.25) 成立, 上式也将自动成立. 再利用 (3.31) 成立, (3.30) 就化成

$$A_3^0A_3^{0*} + A_5^0A_5^{0*} = I_{\mathscr{R}(U_4)^{\perp}}. \tag{3.32}$$

由于 $\mathscr{D}(A_{30}^1)$ 与 $\mathscr{D}(A_{30}^0)$ 以及 $\mathscr{D}(A_{300}^0)$ 是 H_1 中相互直交的线性子空间, 所以方程 (3.32) 化成

$$V_5V_5^* + A_{300}^0A_{300}^{0*} = I_{\mathscr{R}(U_4)^{\perp}},$$

所以 A_{300}^{0*} 必是 $(\mathscr{N}(U_4^*)\ominus\mathscr{N}(V_5), \; [\cdot,\cdot]_2)$ 到 $(\mathscr{R}(A_2^*)^{\perp}\ominus\mathscr{R}(V_1), [\cdot,\cdot]_1)$ 的保距算子.

k) 解 (vi). 因为

$$V^*A_1 = -V^*T_1(I-T_2^*T_2)^{-\frac{1}{2}}T_2^*U_2^* + (R^2 \\ - I)^{\frac{1}{2}}(I-KK^*)^{\frac{1}{2}}V_1^*,$$

所以 $\mathscr{R}(V^*A_1)\subset\mathscr{D}((R^2-I)^{-\frac{1}{2}})$, 并且

$$\begin{aligned} T_1^*A_1 &= T_1^*VV^*A_1 = T_1^*V(R^2-I)^{-\frac{1}{2}}(R^2 \\ &\quad - I)(R^2-I)^{-\frac{1}{2}}V^*A_1 \\ &= K_1^*RU_4U_4^*(R^2-I)^{-\frac{1}{2}}RV^*A_1 \end{aligned}$$

$$-K_1^*(R^2-I)^{-\frac{1}{2}}V^*A_1$$

$$= A_5^1 A_5^1 - K_1^*(R^2-I)^{-\frac{1}{2}}V^*A_1. \tag{3.33}$$

另一方面,

$$T_2^*A_2 + A_5^{0*}A_5^0 = T_2^*A_2 + A_5^{0*}[-V_5(I-K^*K)^{\frac{1}{2}}T_2^*U_2^*$$

$$-V_5K^*V_1^* + A_{300}^0). \tag{3.34}$$

根据(3.33),(3.34)以及有关算子定义域的直交性,(vi) 化成下列方程组:

$$\begin{cases} A_5^{0*}A_{300}^0 = 0, & (3.35) \\ T_2^*A_2 - A_5^{0*}V_5(I-K^*K)^{\frac{1}{2}}T_2U_2^* - K_1^*KT_2^*U_2^* = 0, & (3.36) \\ -A_5^{0*}V_5K^*V_1^* + K_1^*(I-KK^*)^{\frac{1}{2}}V_1^* = 0. & (3.37) \end{cases}$$

根据 $V_5^*V_5$ 是 $\mathscr{R}((I-K^*K)^{\frac{1}{2}}(I-T_2^*T_2)^{\frac{1}{2}})$ 上单位算子,易知(3.36)自然成立. 再注意到 $V_5^*V_5$ 也是 $\mathscr{R}(K^*V_1^*)$ 上单位算子,易知(3.37)亦自然成立. 这样,我们仅需解方程(3.35). 根据(3.35),有

$$\overline{\mathscr{R}(A_{300}^0)} \subset \mathscr{R}(V_5)^{\perp}. \tag{3.38}$$

l) 解(iii). 将 A_1, A_2, A_3 的表达式代入(iii),并逐个将方程(iii)分别限制在 $\mathscr{R}(U_2)$ 和 $\mathscr{R}(U_2)^{\perp}$,于是(iii)化成两个方程式;然后,对每个方程式按值域是否属于 $\overline{\mathscr{R}(A_2^*)}$, $\mathscr{R}(A_2^*)^{\perp}$ 分成两个方程. 这样,(iii)被化成四个方程,但有一对是互相共轭的,所以实际上得到如下三个方程.

$$\begin{cases} I_{\overline{\mathscr{R}(A_2^*)}} - A_1^*V(R^2-I)^{-\frac{1}{2}}(R^2-I)^{-\frac{1}{2}}VA_1 - A_2^*A_2 \\ \qquad - A_{30}^{1*}A_{30}^1 = 0, & (3.39) \\ -A_1^{0*}V(R^2-I)^{-\frac{1}{2}}(R^2-I)^{-\frac{1}{2}}V^*A_1 \\ \qquad -(A_{300}^1+A_{300}^0)^*A_{30}^1 = 0, & (3.40) \\ I_{\mathscr{R}(A_2^*)^{\perp}} - A_1^{0*}V(R^2-I)^{-\frac{1}{2}}(R^2-I)^{-\frac{1}{2}}V^*A_1^0 \\ \qquad -(A_{300}^1+A_{300}^0)^*(A_{300}^1+A_{300}^0) = 0. & (3.41) \end{cases}$$

容易直接验证,(3.39),(3.40)自动地成立,因而仅须解(3.41). 由于

$$I_{\mathscr{R}(V_1)} - A_1^{0*}V(R^2-I)^{-\frac{1}{2}}(R^2-I)^{-\frac{1}{2}}V^*A_1^0 - A_{300}^{1*}A_{300}^1 = 0,$$

从而(3.41)化成

$$I_{\mathscr{R}(A_7^*)^\perp \ominus \mathscr{R}(V_1)} - A_{300}^{1*}A_{300}^{0} - A_{300}^{0*}A_{300}^{1} - A_{300}^{0*}A_{300}^{0} = 0, \quad (3.42)$$

但是$A_{300}^{1} = -V_5K^*V_1^*$, $A_{300}^{0*}A_{300}^{1} = 0$, 以及$A_{300}^{1*}A_{300}^{0} = 0$(见(3.28), (3.35)), 因此(3.42)等价于

$$I_{\mathscr{R}(A_7^*)^\perp \ominus \mathscr{R}(V_1)} = A_{300}^{0*}A_{300}^{0}, \quad (3.43)$$

因为 A_{300}^{0*} 已是保距算子（见 j)). 因此, A_{300}^{0} 是 $(\mathscr{R}(A_7^*)^\perp \ominus \mathscr{R}(V_1), [\cdot,\cdot]_1)$ 到 $(\mathscr{N}(U_4^*) \ominus \mathscr{N}(V_5), [\cdot,\cdot]_2)$ 的酉算子.

这样, 定理中所指出 $A_1, A_2, \cdots, A_7$ 的形式以及空间 H_1, H_2 的分解形式已全部被证得 $(W = A_{300}^{0}, \overline{\mathscr{R}(A_7^*)} = \mathscr{R}(U_2))$.

反之, 如果所给出的 $A_1, A_2, \cdots, A_7$ 满足定理的要求, 易知按定理所作的 U 必是酉算子, 并且是 T 的 Halmos 意义下的酉膨胀. 证毕.

定义 3.4 设 T 是完备的不定度规空间上的压缩算子,

$$\mathscr{D}(T) = \Pi.$$

(U, H_1, H_2) 是 T 的 Halmos 意义下的酉膨胀. 如果不存在 $(H_i, [\cdot,\cdot])$ $(i = 1, 2)$ 的非空闭线性子空间 $L_i (i = 1, 2)$, 使得 U 是 L_1 到 L_2 的酉算子, 那末称 (U, H_1, H_2) 是 T 的极小酉膨胀.

应用极小酉膨胀的概念, 由定理 3.8 立即得下列推论.

推论 3.9 设 T 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot,\cdot))$ 上正则压缩算子, 那末 T 必有 Halmos 意义下的酉膨胀, 而且 T 的极小酉膨胀必彼此酉等价, 即假如 $(U_1^{(i)}, H_1^{(i)}, H_2^{(i)})$ $(i = 1, 2)$ 是 T 的两个极小酉膨胀, 如果用 $[\cdot,\cdot]$ 表示正则分解 $\Pi = H_-\oplus H_+$ 所产生的内积, $H_i^{(j)} (i = 1, 2; j = 1, 2)$ 上内积分别为 $[\cdot,\cdot]_i^{(j)}$ $(i = 1, 2; j = 1, 2)$, 那末必有 $(H_i^{(1)}[\cdot,\cdot]_i^{(1)})$ 到 $(H_i^{(2)}, [\cdot,\cdot]_i^{(2)})$ 的酉算子 $W_i (i = 1, 2)$, 使得

$$U_1 = W_2^{-1}U_2W_1. \quad (3.44)$$

证 按定理 3.8, 对于满足 $TH_- = H_-$ 的正则压缩算子, (U, H_1, H_2) 为 T 的极小酉膨胀的充要条件显然是 $W = 0$, 即

$$H_1 = \mathscr{R}(U_2)\oplus\mathscr{R}(V_1), \quad H_2 = \mathscr{R}(U_4)\oplus\mathscr{R}(V_5).$$

从给出的一切酉膨胀的形式易知, 两个极小酉膨胀必有酉等价关

系(3.44).

对于一般的正则压缩算子，利用引理 3.7，也易知本推论成立．证毕．

下面讨论正则压缩算子在 Nagy 意义下的酉膨胀．为方便起见，我们将 U 写成 2×2 矩阵的形式，

$$U = \begin{matrix} \Pi \\ H_2 \end{matrix}\begin{pmatrix} T & B_1 \\ B_2 & A_3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \Pi \\ H_1 \end{matrix},\quad B_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix},\quad B_2 = (A_4,\ A_5)$$

定理 3.10 设正则压缩算子 T 在正则分解 $\Pi = H_-\oplus H_+$ 下，$T = \{T_{H_-}, T_1, T_2\}$．令 $\widetilde{U}$ 是 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上任何满足

$$\widetilde{U}TH_- = H_-$$

的酉算子．那末，T 的在 Nagy 意义下的酉膨胀的一般形式是

$$U = \begin{pmatrix} T & B_1 \\ B_2 & A_3 \end{pmatrix},\quad B_1 = \widetilde{U}^{-1}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix},\quad B_2 = (A_4,\ A_5). \tag{3.45}$$

此处 $A_1, \cdots, A_5$ 如定理 3.8，但是按正则压缩算子 $\widetilde{U}T$ 所给出的，并且 $H_1 = H_2$ 必表示成如下形式，

$$H_1 = \left[\bigoplus_{k=1}^{\infty} W^{k*}(\mathscr{R}(U_2)\oplus\mathscr{R}(V_1))\right]\oplus[\mathscr{R}(U_2)\oplus\mathscr{R}(V_1)]^{1)}$$

$$\oplus[\mathscr{R}(U_4)\oplus\mathscr{R}(V_5)]\oplus\left[\bigoplus_{k=1}^{\infty} W^{k}(\mathscr{R}(U_4)\right.$$

$$\left.\oplus\mathscr{R}(V_5))\right]\oplus H, \tag{4.46}$$

且 W 正是 H 上酉算子．

证 显然，方程（下面 P 是 $(\Pi\oplus H_2, (\cdot, \cdot)\oplus[\cdot, \cdot]_2)$ 在 Π 上的投影）

$$T^2 = PU^2|_\Pi$$

等价于

$$B_1B_2 = 0. \tag{4.47}$$

因为

1) 算子 W 见定理 3.8.

$$\mathscr{D}(A_1)=\mathscr{D}(A_2)=\mathscr{D}(A_3)=H_1,\ \mathscr{D}(A_4)=H_-\supset\mathscr{R}(A_1),$$
$$\mathscr{D}(A_5)=H_+\supset\mathscr{R}(A_2),\ H_2\supset\mathscr{R}(A_i)(i=3,4,5),$$
以及$\widetilde{U}$是 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上的酉算子,易知方程(4.47)等价于
$$A_1A_4=A_2A_4=0,\ A_1A_5=A_2A_5=0.$$
这样,就得到 $\mathscr{R}(V_1)$, $\mathscr{R}(V_5)$, $\mathscr{R}(U_4)$ 以及 $\mathscr{R}(U_2)$ 等彼此相互直交,即
$$H_1=[\mathscr{R}(U_4)\oplus\mathscr{R}(V_5)]\oplus[\mathscr{R}(U_2)\oplus\mathscr{R}(V_1)]\oplus H_2.$$
类似地,方程
$$T^3=P\widetilde{U}^3|_H$$
等价于 $B_1WB_2=0$. 显然,这又等价于 $A_iWA_j=0$, $i=1,2$, $j=4,5$. 也就是说,W必是如下形式,
$$H_1=[\mathscr{R}(U_2)\oplus\mathscr{R}(V_1)]\oplus[\mathscr{R}(U_4)\oplus\mathscr{R}(V_5)]\oplus H_2$$
$$\downarrow W$$
$$H_1=[\mathscr{R}(U_4)\oplus\mathscr{R}(V_5)]\oplus W[\mathscr{R}(U_4)\oplus\mathscr{R}(V_5)]$$
$$W\downarrow$$
$$\oplus[\overbrace{\mathscr{R}(U_2)\oplus\mathscr{R}(V_1)\oplus H_3}].$$
根据归纳法,我们有 $A_iW^{n-1}A_j=0$, $i=1,2$; $j=4,5$; $n=2,3,\cdots$. 这样就得到
$$H_1=[\mathscr{R}(U_2)\oplus\mathscr{R}(V_1)]\oplus\left[\bigoplus_{k=0}^{\infty}W^k(\mathscr{R}(U_4)\oplus\mathscr{R}(V_5))\right]\oplus H'$$
$$\downarrow W$$
$$H_1=[\mathscr{R}(U_4)\oplus\mathscr{R}(V_5)]\oplus\left[\bigoplus_{k=0}^{\infty}W^{k+1}(\mathscr{R}(U_4)\oplus\mathscr{R}(V_5))\right]$$
$$W\downarrow$$
$$\oplus[\overbrace{\mathscr{R}(U_2)\oplus\mathscr{R}(V_1)\oplus H'}].$$
如果再考虑到方程 $(A_iW^{n-1}A_j)^*=0$, $i=1,2$; $j=4,5$; $n=2,3,\cdots$, 则不难得到本定理的结论. 证毕.

我们再引入如下定义.

定义 设T是完备的不定度规空间 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上的压缩算子,$\mathscr{D}(T)=\Pi$. 如果 (U,H_1,H_1) 是T的 Nagy 意义下的酉

膨胀，并且不存在 H_1 的闭线性子空间是 U 的约化子空间，那末称 (U, H_1, H_1) 是极小的（Nagy 意义的）酉膨胀。

类似于推论 3.9，定理 3.10 有如下推论。

推论 3.11 设 T 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上正则压缩算子，那末 T 必有 Nagy 意义的酉膨胀，而且 T 的 Nagy 意义的极小酉膨胀必彼此酉等价。

证 按定理 3.10，正则压缩算子必有 Nagy 意义的酉膨胀。从一般形式可知，当(4.46)中 $H=\{0\}$ 时，定理 3.10 所得的酉膨胀是 Nagy 意义的极小酉膨胀。由此易知，它们彼此是酉等价的。

4. 具有酉膨胀的压缩算子 在第三小节中我们指出，正则压缩算子必有酉膨胀，而且给出了一切酉膨胀的形式。本节中我们将要证明具有酉膨胀的压缩算子必是正则的，而且正则压缩算子的共轭算子也是正则压缩的。

定理 3.12 设 T 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上有界线性算子，下列命题彼此等价。

(i) T 是正则压缩算子。

(ii) T 具有 Halmos 意义的酉膨胀。

(iii) $T^\dagger$ 是正则压缩算子。

证 由定理 3.8 和推论 3.9 可知，(i) 必可推出(ii)。

反之，如果命题 (ii) 成立，即 T 有 Halmos 意义的酉膨胀 (U, H_1, H_2)，那末对任何 $x\in\Pi$，由于 $(H_2, [\cdot,\cdot]_2)$ 是 Hilbert 空间，所以有

$$(Tx, Tx)=(PUx, PUx)\leqslant(Ux, Ux)_2=(x,x)_2{}^{1)},$$

因此 T 是压缩算子。下面证明 T 还是正则压缩算子。

事实上，因为 $\Pi\oplus H_1=H_-\oplus(H_+\oplus H_1)$ 是正则分解，因此

$$\Pi\oplus H_2=UH_-\oplus U(H_+\oplus H_1),$$

并且也是正则分解，因而 UH_- 是极大负的闭线性子空间。因而

1) 这里 $(\cdot,\cdot)_2=(\cdot,\cdot)\oplus[\cdot,\cdot]_2$.

存在 $(H_- - (\cdot,\cdot))$ 到 $(H_+\oplus H_2, (\cdot,\cdot)\oplus[\cdot,\cdot]_2)$ 压缩算子 A，$\mathscr{D}(A)=H_-$，$\|A\|<1$，使得 $UH_-=L_A$。令 P_+，P_{H_2} 是 $H_+\oplus H_2$ 分别在 H_+，H_2 上投影。显然，有

$$A=A_++A_2,\ A_+=P_+A,\ A_2=P_2A.$$

因为 $\mathscr{R}(A_+)\perp\mathscr{R}(A_2)$，所以

$$\max(\|A_+\|,\|A_2\|)\leqslant\|A\|<1. \tag{3.48}$$

从 (3.48) 以及下列等式

$$\begin{aligned}TH_-&=PUH_-=PL_A=\{\{x_-,PAx_-\}\mid x_-\in H_-\}\\&=\{\{x_-,A_+x_-\}\mid x_-\in H_-\},\end{aligned}$$

立即可知 TH_- 是极大负、闭线性子空间，并且是 Π 的完备子空间。从而 T 是正则压缩算子。

这样，就证明了 (i) 与 (ii) 的等价性。

显然，对有界线性算子，存在 (U,H_1,H_2)，使得

$$T=PU|_\Pi$$

成立的充要条件是

$$T^\dagger=PU^\dagger|_\Pi,$$

即 (U,H_1,H_2) 为 T 的 (Halmos 意义的) 酉膨胀的充要条件是，$(U^\dagger,H_2,H_1)$ 是 $T^\dagger$ 的 (Halmos 意义的)酉膨胀。

而 (i) 与 (ii) 的等价性已被证明，由此可知 (i) 与 (iii) 也是等价的。证毕。

5. Π_K 空间上压缩算子 这一小节中，我们要指出 Π_K 空间上任何稠定的压缩算子必是正则压缩的，从而本节中第一到第四小节有关正则压缩算子的结果对于 Π_K 上压缩算子 (定义在全 Π_K 上)成立。

定理 3.13 设 T 是 Π_K 上稠定压缩算子，那末 T 必是正则压缩算子。从而定义在全 Π_K 上的压缩算子有下列性质。

(i) T 必是有界的。

(ii) T 具有 Halmos 意义和 Nagy 意义下的酉膨胀，而且一切极小酉膨胀彼此酉等价。

(iii) $T^\dagger$ 必是压缩算子。

证 因为 $\overline{\mathscr{D}(T)} = \Pi_K$，所以在 $\mathscr{D}(T)$ 中必含有K维负的子空间N. 由于对任何 $n \in N$，

$$(Tn, Tn) \leqslant (n, n),$$

所以 TN 也是 Π_K 的K维负子空间，因而必有分解

$$\Pi_K = TN \oplus (TN)^{\perp},$$

这就是说，T 是 Π_K 上正则压缩算子.

利用定理 3.1，推论 3.9，推论 3.11，定理 3.12 立即得到本定理中的 (i)，(ii)，(iii). 证毕.

§4 亚正常算子

1. 亚正常算子 Hilbert 空间上亚正常算子已作了较多的研究，并且相当广泛地把亚正常算子的许多基本结果推广到半亚正常算子的情况(详见本书第一册). 然而，不定度规空间上"亚正常算子"还完全是空白区. 本节中仅给出这方面极初步的结果.

定义 4.1 设Q是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 上有界线性算子. 如果对任何 $x \in \Pi$，当 $Qx \neq 0$ 时，$(Qx, x) > 0$，则称Q为 Π 上正算子；设 u，v 是 Π 上两个有界自共轭算子，令

$$Q = i(uv - vu),$$

如果$Q = 0$ 或对每个 $x \in \Pi$，$(Qx, x) \geqslant 0$，或Q是正算子，那末相应地称 $T = u + iv$ 是正常算子，亚正常算子，强亚正常算子；如果T是 Π_K 上有界线性算子，$\frac{1}{2i}(T + T^{+})$ 是正算子，那末称T是耗散算子.

显然，Π 上正算子必是Π上自共轭算子. 如果T是 Π 上(强)亚正常算子，那末对任何复数 λ，$T - \lambda I$ 也是 Π 上(强)亚正常算子.

Π 空间上亚正常算子和 Hilbert 空间上亚正常算子的定义完全类似，但实质上是有本质区别的. 例如，有限维 Hilbert 空间中，不存在非正常的亚正常算子，然而在有限维不定度规空间上，存在

非正常的亚正常算子.

例 4.1 设 Π_1 是两维空间, e_-, e_+ 是负、正向量, 并

$$-(e_-, e_-) = 1 = (e_+, e_+), \quad (e_-, e_+) = 0.$$

在基 $\{e_-, e_+\}$ 下, 易知

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

是 Π_1 上两个自共轭算子, 而且

$$i(uv - vu) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

是 Π_1 上正算子, 即 $T = u + iv$ 是 Π_1 上亚正常算子. 但由于

$$uv \neq vu,$$

所以 T 不是 Π_1 上正常算子 (而且也不是 Π_1 的任何正则分解所产生的 Hilbert 空间上的正常算子).

2. 不变子空间

定理 4.1 设 $T = u + iv$ 是 Крейн 空间 Π 上耗散的强亚正常算子, 对于某个 $x \in \Pi$, 如果存在实数 α 和自然数 r, 使得

$$(u - \alpha I)^r x = 0,$$

那末 $Qx = 0 (Q = i(uv - vu))$; 如果记

$$\Phi_{\alpha r}(u) = \{x \mid (u - \alpha I)^r x = 0\},$$

那末 $v\Phi_{\alpha r}(u) \subset \Phi_{\alpha r}(u)$, 即 $\Phi_{\alpha r}(u)$ 是 u, v 的公共不变子空间. 从而 u, v 限制在 $\Phi_{\alpha r}(u)$ 上是可交换的.

证 对任何 $S > 0$, 由于

$$e^{-iSu} v e^{iSu} - v = -\int_0^S e^{-itu} Q e^{itu} dt, \tag{4.1}$$

所以对任何 $x \in \Pi$,

$$((e^{-iSu} v e^{iSu} - v)x, x) = -\int_0^S (Qe^{itu}x, e^{itu}x) dt \leqslant 0. \tag{4.2}$$

设 $\Pi = H_- \oplus H_+$ 是一个正则分解, 由它产生的内积、范数记为 $[\cdot, \cdot]$, $\|\cdot\|$. 令 $J = P_+ - P_-$, $P_\pm$ 是 Π 在 $H_\pm$ 上投影. 由 (4.2) 得到 Hilbert 空间 $(\Pi, [\cdot, \cdot])$ 上正算子 $Je^{-iSu} v e^{iSu}$ 的范数有如下估计,

$$\sup_{s>0}\|Je^{-isu}ve^{isu}\| \leqslant \|Jv\|.$$

将 $e^{it(u-\alpha I)}x$ 按 t 的幂级数展开，得到

$$(Qe^{it(u-\alpha I)}x, e^{it(u-\alpha I)}x) = \sum_{n=0}^{r-1}\sum_{m=0}^{r-1}\frac{i^{n-m}t^{n+m}}{n!m!}$$
$$\times(Q(u-\alpha I)^n x, (u-\alpha I)^m x). \tag{4.3}$$

利用

$$\int_0^\infty(Qe^{it(u-\alpha I)}x, e^{it(u-\alpha I)}x)dt = \int_0^\infty(Qe^{itu}x, e^{itu}x)dt < \infty,$$

对 (4.3) 逐项积分，就得到

$$(Q(u-\alpha I)^{r-1}x, (u-\alpha I)^{r-1}x) = 0.$$

根据 Q 的正性，$Q(u-\alpha I)^{r-1}=0$。从而 (4.3) 右边和式中最高次项为 $r-2$，重复上述讨论，则得到

$$Q(u-\alpha I)^j x = 0,\ j = r-2, \cdots, 0.$$

再利用

$$(u-\alpha I)^r v - v(u-\alpha I)^r = \sum_{n=0}^{r-1}(u-\alpha I)^n Q(u-\alpha I)^{r-n-1}, \tag{4.4}$$

立即得到对任何 $x\in\Phi_{\alpha r}(u)$，$vx\in\Phi_{\alpha r}(u)$。

因为 $Qx=0\ (x\in\Phi_{\alpha r}(u))$，所以 u，v 限制在 $\Phi_{\alpha r}(u)$ 上是可交换的。证毕。

推论 4.2 设 $T=u+iv$ 是 Крейн 空间 Π 上耗散的强亚正常算子。如果 $\sigma(U)\subset(-\infty,\infty)$，并且 u 的根子空间全体张成的闭线性子空间是 Π，那末 $Q=0$，即 T 是 Π 上正常的。

由此可知，在有限维不定度规空间中，不存在实部仅具有实谱的非正常的强亚正常算子。

下面将利用定理 4.1 给出 Π_K 空间上交换自共轭算子族必有公共的 K 维半负不变子空间定理的推广。

推论 4.3 设 $\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 是 Π_K 上一族仅具有实谱的自共轭

算子．如果对任何 $\alpha, \beta \in \Lambda$，$Q_{\alpha\beta} = i(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha)$ 或 $-Q_{\alpha\beta}$ 是Π_K上正算子，那末 $\{A_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 必有公共的K维半负不变子空间．

证 本推论可以仿交换情况证明．但这里将利用定理 4.1 给出它的直接证明．

任取非零算子 A_{α_0}，它有一个K维半负不变子空间 $\mathscr{T}_{\alpha_0}$，$A_{\alpha_0}|_{\mathscr{T}_{\alpha_0}}$ 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，相应的根子空间 $\Phi_{\lambda_j}(A_{\alpha_0})$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 对每个j，$\Phi_{\lambda_j}(A_{\alpha_0}) = N_j \oplus Z_j \oplus P_j$．显然，

$$\sum_{j=1}^{n} \dim(N_j \oplus Z_j) = K.$$

由于 $\Phi_{\lambda_j}(A_{\alpha_0})$ 中向量的最高阶数是有限的，根据定理 4.1，$\Phi_{\lambda_j}(A_{\alpha_0})$是一切 A_β 的不变子空间．因此，只要证明$\{A_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$在 $\Phi_{\lambda_j}(A_{\alpha_0})$ 中有公共的 $\dim(N_j \oplus Z_j)$ 维半负不变子空间即可．

由于 $\Phi_{\lambda_j}(A_{\alpha_0})$ 对一切 A_β 都不变，所以

$$Z_j = \Phi_{\lambda_j}(A_{\alpha_0}) \cap \Phi_{\lambda_j}(A_{\alpha_0})^\perp$$

也是一切 A_β 的不变子空间．由于 Z_j 是零性的，所以

$$(Q_{\alpha\beta} z, z) = 0 (z \in Z_j).$$

从 $Q_{\alpha\beta}$ 正性的假设，只有 $Q_{\alpha\beta}|_{Z_j} = 0$，即一切$A_\beta$在 Z_j 上是可交换的．

在分解 $\Phi_{\lambda_j}(A_{\alpha_0}) = N_j \oplus P_j \oplus Z_j$ 下，每个 A_β 可表示成

$$A_\beta = \{S_\beta, A_{\beta j}, F_{\beta j}\} (\beta \in \Lambda),$$

其中 $S_\beta = A_\beta|_{Z_j}$，$A_{\beta j} = P_{N_j \oplus P_j} A_\beta|_{N_j \oplus P_j}$，$F_{\beta j} = P_{Z_j} A_\beta|_{N_j \oplus P_j}$，这里 $P_{N_j \oplus P_j}$，P_{Z_j} 是在分解 $\Phi_{\lambda_j}(A_{\alpha_0}) = N_j \oplus P_j \oplus Z_j$ 在 $N_j \oplus P_j$，Z_j上的投影．类似地，$Q_{\alpha\beta} = \{0, Q_{\alpha\beta j}, F_{\alpha\beta j}\}$．根据假设，易知

$$i(A_{\alpha j} A_{\beta j} - A_{\beta j} A_{\alpha j}) = Q_{\alpha\beta j}, \qquad (4.5)$$

并且 $Q_{\alpha\beta j}$ 是 $N_j \oplus P_j$ 上正算子．如果 $\{A_{\beta j} | \beta \in \Lambda\}$ 在 Π_K 型空间 $N_j \oplus P_j$ 上有公共的 $\dim N_j$ 维半负不变子空间 $\mathscr{T}_{\alpha_0 j}$，那末 $\mathscr{T}_{\alpha_0 j} \oplus Z_j$ 便是 $\{A_\beta | \beta \in \Lambda\}$ 公共的 $\dim(N_j \oplus Z_j)$ 维半负不变子

空间了.

重复上述过程,不难知道可不妨假设一切 $A_\alpha(\alpha\in\Lambda)$ 在 Π_K 上都只有一个单点谱 $\sigma(A_\alpha)=\{\lambda_\alpha\}$, 并且 $\Pi_K=\Phi_{\lambda_\alpha}(A_\alpha)$ (即全 Π_K 空间是 A_α 的根子空间). 在这个假设下,由定理4.1可知, $\{A_\alpha\}$ 必是可交换的. 因此,它们存在公共的 K 维半负不变子空间. 证毕.

3. 谱分割

定理 4.4 设 $T=u+iv$ 是 Π_K 空间上亚正常算子, $C(u)$ 是(T 的实部) u 的广义临界点全体. 如果实数 $\alpha\in\sigma(u)-C(u)$, 那末必存在实数 β, 使得 $\alpha+i\beta\in\sigma(T)$.

证 设 $\{E_\lambda\}$ 是 u 在 Π_K 空间上的谱系,任取开区间 Δ, 使得 $\alpha\in\Delta$, $\bar{\Delta}\cap C(u)=\varnothing$. 在空间 $E_\Delta\Pi_K$ 上考察算子

$$T_\Delta=E_\Delta T|_{E_\Delta\Pi_K},\quad v_\Delta=E_\Delta v|_{E_\Delta\Pi_K}.$$

显然, $T_\Delta=u+iv_\Delta$ 是 Hilbert 空间 $(E_\Delta\Pi_K, (\cdot,\cdot))$ 上亚正常算子. 利用 Hilbert 空间上亚正常算子的性质不难得到本定理的结论. 证毕.

定义 4.2 设 $T=u+iv$, u,v 是完备的不定度规空间$(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上两个有界自共轭算子, $Q=i(uv-vu)$. 又设

$$\Pi=H_-\oplus H_+$$

是正则分解,由它产生的内积、范数分别为 $[\cdot,\cdot]$, $\|\cdot\|$. 如果存在常数 $M>0$, 使得

$$\|Q(T-\lambda I)^{-1}\|\leqslant M,\quad \lambda\in\rho(T), \tag{4.6}$$

则称 T 满足 M 压缩条件.

例 4.2 设 $\Pi=l^2$, 对任何

$$x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots),\ y=(y_1,\cdots,y_n,\cdots)\in l^2,$$

取 Π 上度规为

$$(x,y)=-x_1\bar{y}_1+\sum_{i=2}^{\infty}x_i\bar{y}_i.$$

作算子 T 如下

$$T:\ x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)\longmapsto(0,x_1,\cdots,x_n,\cdots).$$

显然,

$T^\dagger$: $x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)\longmapsto(-x_2,x_3,\cdots,x_{n+1},\cdots)$.
因为 $(T^\dagger T-TT^\dagger)x=(-x_1,\ 2x_2,\ 0,0,\cdots)$，所以$T$是 Π 上亚正常算子．下面验证它满足M压缩条件．

视 l^2 为 Hardy 空间H^2，算子T相应于H^2上算子$\tilde{T}$，

$$(\tilde{T}f)(z)=zf(z),\ f(z)\in H^2.$$

因为 $\sigma(\tilde{T})=\{\lambda\,|\,|\lambda|\leqslant 1\}$，所以当 $|\lambda|>1$ 时，

$$(\lambda I-\tilde{T})^{-1}=\frac{1}{\lambda-z}f(z).$$

由直接计算可知，

$$[(\tilde{T}^\dagger\tilde{T}-\tilde{T}\tilde{T}^\dagger)(\lambda I-\tilde{T})^{-1}f](z)=-\frac{f(0)}{\lambda}+2\left(\frac{f'(0)}{\lambda}+\frac{f(0)}{\lambda^2}\right)z.$$

由此，对 $x\in l^2$，

$$(T^\dagger T-TT^\dagger)(\lambda I-T)^{-1}x=\left(-\frac{x_1}{\lambda},\ 2\left(\frac{x_2}{\lambda}+\frac{x_1}{\lambda^2}\right),\ 0,\ 0,\ \cdots\right),$$

因此 $\|(T^\dagger T-TT^\dagger)(\lambda I-T)^{-1}x\|\leqslant 3\|x\|$ 对 $\lambda\in\rho(T)$ 成立，即T具有 3-压缩性质．

定理 4.5 设T是 Π 上具有M压缩条件的算子，如果T是紧算子，那末T必是 Π 上正常算子．

证 对 Banach 空间X上任何两个算子 A，B，如果存在常数 $M>0$，对一切 $\lambda\in\rho(A)$，

$$\|B(A-\lambda I)^{-1}\|\leqslant M. \tag{4.7}$$

又如果 $\sigma(A)$ 只有有限个极限点，由 (4.7) 可以除掉算子值解析函数 $B(A-\lambda I)^{-1}$ 的孤立非常点．再利用解析函数的 Liouville 定理，必可推出$B=0$．特别，当 $X=\Pi$，$A=T$，$B=Q$ 时，利用T是紧算子的假设，立即得到T是 Π 上正常算子．证毕．

定理 4.6 设 $T=u+iv$ 是Π_K空间上满足M压缩条件的亚

正常算子，并且 $\sigma(u)$, $\sigma(v)$ 仅具有实谱，那末对任何

$$\lambda=\alpha+i\beta\in\sigma(T),$$

必然有 $\alpha\in\sigma(u)$, $\beta\in\sigma(v)$.

证 显然，可不妨设 λ 是 $\sigma(T)$ 的边界 $\partial\sigma(T)$ 上的点.

(I) 设 $\lambda\in\partial\sigma(T)\cap\sigma_p(T)$. 令 $\Phi_{\lambda 1}(T)$ 是相应的特征子空间. 由于存在 $\lambda_n\in\rho(T)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda$. 所以，对 $x\in\Phi_{\lambda 1}(T)$, 由M压缩条件可以得到 $\|Qx\||\lambda_n-\lambda|^{-1}\leqslant M\|x\|$, 从而 $Qx=0$. 这样就有 $T^{\dagger}\Phi_{\lambda 1}(T)\subset\Phi_{\lambda 1}(T)$, 即 $\Phi_{\lambda 1}(T)$ 是 u, v 的公共的不变子空间，并且 u, v 在 $\Phi_{\lambda 1}(T)$ 上是可交换的.

设 $\Phi_{\lambda 1}(T)=N_\lambda\oplus Z_\lambda\oplus P_\lambda$. 如果 $\dim(N_\lambda\oplus Z_\lambda)\neq 0$, 易知 u, v 在 $\Phi_{\lambda 1}(T)$ 上必有公共特征向量 x, 因而 x 也是 T 的特征向量. 由假设，$\sigma(u)$, $\sigma(v)$ 是实的，则易知只有

$$(u-\alpha)x=0,\ (v-\beta)x=0.$$

如果 $\dim(N_\lambda\oplus Z_\lambda)=$, 那末$T$便是普通 Hilbert 空间 $(P,(\cdot,\cdot))$ 上的亚正常算子，根据已知的结果也有 $\alpha\in\sigma(u)$, $\beta\in\sigma(v)$.

(II) 设 $\lambda\in\partial\sigma(T)-\sigma_p(T)$. 由于 $\partial\sigma(T)$ 中点必是T的近似谱点，所以存在 $\{f_n\}$; $\|f_n\|=1$, $n=1,2,\cdots$,

$$\|(T-\lambda I)f_n\|\to 0(n\to\infty).$$

由于 $\lambda\bar{\in}\sigma_p(T)$, 所以 $\{f_n\}$ 中不存在收敛的子序列. 然而从

$$\|(T-\lambda I)f_n\|\to 0(n\to\infty)$$

得到

$$\begin{aligned}((u-\alpha I)(f_n-f_m),\ (u-\alpha I)(f_n-f_m))\\ +((v-\beta I)(f_n-f_m),(v-\beta I)(f_n-f_m))\\ +(Q(f_n-f_m),\ (f_n-f_m))\to 0\ (n,m\to\infty),\end{aligned}\tag{4.8}$$

即

$$\begin{aligned}\|P_+(u-\alpha I)(f_n-f_m)\|^2+\|P_+(v-\beta I)(f_n-f_m)\|^2\\ +(Q(f_n-f_m),\ (f_n-f_m))-\|P_-(u-\alpha I)(f_n\\ -f_m)\|^2-\|P_-(v-\beta I)(f_n-f_m)\|^2\to 0\\ (n,m\to\infty).\end{aligned}\tag{4.9}$$

因为 P_- 是有限秩算子，所以可从 $\{f_n\}$ 中抽出子序列，不妨设为

本身，使得

$$\|P_-(u-\alpha I)(f_n-f_m)\|^2+\|P_-(v-\beta I)(f_n-f_m)\|^2\to 0(n,m\to\infty).$$

由于 $\{f_n\}$ 是没有基本子序列的，所以存在某个 $\varepsilon>0$，和一个子序列 $\{f_{n_k}\}$：$\|f_{n_k}-f_{n_{k+1}}\|\geqslant\varepsilon(k=1,2,\cdots)$. 将(4.9)中 $\{f_n\}$ 用子序列 $\{f_{n_k}\}$ 代替，便知 $\alpha\in\sigma(u)$，$\beta\in\sigma(v)$. 证毕.

显然有下列推论.

推论 4.7 设 $T=u+iv$ 是 Π_K 上亚正常算子，$\sigma(u)$，$\sigma(v)$ 都是实数集，那末

(i) 对任何 $\lambda=\alpha+i\beta\in\sigma_a(T)-\sigma_p(T)$，必存在一列 $\{f_n\}$，$\|f_n\|=1$，$n=1,2,\cdots$，并且 $f_n\in E_\Delta\Pi_K$，使得 $n\to\infty$ 时，

$$(u-\alpha I)f_n\to 0,\ (v-\beta I)f_n\to 0,\ (T-\lambda I)f_n\to 0. \quad (4.10)$$

这里 $\{E_\lambda\}$ 是 u 在 Π_K 上的谱系，Δ 是含有 α 的开区间.

(ii) 如果 T 还满足 M 压缩条件，那末对任何

$$\lambda\in\sigma_a(T),\ \lambda=\alpha+i\beta,$$

必存在一列 $\{f_n\}$，$\|f_n\|=1$，$f_n\in E_\Delta\Pi_K$，$n=1,2,\cdots$，使(4.10)成立.

只要取定理 4.6 证明中的 $\{f_n\}$ 为 $\{E_\Delta f_n\|E_\Delta f_n\|^{-1}\}$，易知推论成立. 证毕.

注意 定理 4.6 中关于 $\sigma(u)$，$\sigma(v)$ 是实数集的假设是不能去掉的.

例 4.3 设 v 是 Π_K 上自共轭算子，$1\pm i\in\sigma_p(v)$，并且 v 不再有其它非实的特征值，又假设 $3\bar{\in}\sigma(v)$. $\Phi_{1+i}(v)$ 是 v 相应于 $1+i$ 的特征子空间. 令 $T=v^2+iv$. 这样，T 是 Π_K 上正常算子，并且 $\Phi_{1+i}(v)$ 是 T，v^2，v 相应于 $-1+3i$，$2i$，$1+i$ 的特征子空间. 易知 $-1\bar{\in}\sigma(v^2)$（否则将发生 $\pm i$ 是 v 的谱），根据假设有 $3\bar{\in}\sigma(v)$.

第五章 不定度规空间理论的某些应用

Hilbert 空间及其上的算子理论在分析数学的各个分支以及在随机过程、控制论、数学物理、近代物理等方面有着广泛的应用，这已是人们熟知的. 显然，凡是出现非正定双线性 Hermite泛函或它的变形(如条件正定函数)，并以此作为主要研究对象或出发点的地方，从原则上讲，那里就有可能需要不定度规空间及其上的算子理论. 相对论中的"时-空"就是典型的不定度规空间. 反映"观察者"的变更的数学形式——(齐次) Lorentz 群实质上就是"时-空"这个不定度规空间上的酉算子全体. 当然，由于"时-空"是有限维(空间三维，时间一维，计四维)的，所以它不是泛函分析的兴趣所在，至于对无限维的不定度规空间的研究，从历史本身来说，它也不是出于单纯数学上的定度规向不定度规的形式推广，甚至也不是直接因某个数学问题研究的需要而提出的. 正如引言中所提到的，最初是由理论物理学家 Dirac 因量子理论研究的需要而提出的；数学家 Понтрягин 也是从力学问题的研究需要而在数学上首先进行研究的. 可见不定度规空间理论是有着广泛而深厚的基础的. 近代许多物理学家、数学物理学家对它都感到兴趣就不足为奇了. 不定度规空间理论虽已获得一些很有价值的应用，但这仅仅是个开始. 本章中将仅限于介绍作者所作的某些应用.

§1 与不定度规有关的散射理论

1. 引言 李政道和 G. C. Wick 提出用不定度规来消除量子场论中发散困难的一种理论. 在本节中主要是给李-Wick 的理论以严格的数学论证，并给出散射算子的形式.

2. 散射算子的表达式和它的幺正性

设 $(H,[\cdot,\cdot])$ 是Hilbert 空间，$H_{\pm}$ 是H的两个闭线性子空间，并且 $H=H_{-}\oplus H_{+}$，$P_{\pm}$ 分别是H在 $H_{\pm}$ 上的投影，规定

$$J=P_{+}-P_{-},$$

$$(x,y)=[Jx,y],\ x,y\in H. \tag{1.1}$$

又设$\mathbf{H}$是 $(H,(\cdot,\cdot))$ 上自共轭算子(即 $\mathbf{H}^{\dagger}=\mathbf{H}$)，并且

$$\mathscr{D}(\mathbf{H})=(\mathscr{D}(\mathbf{H})\cap H_{-})\oplus(\mathscr{D}(\mathbf{H})\cap H_{+}).$$

如令

$$\mathbf{H}_{+}=P_{+}\mathbf{H}P_{+},\ \mathbf{H}_{-}=p_{-}\mathbf{H}p_{-},\ \Gamma=p_{-}\mathbf{H}p_{+},$$

显然，由于 $\mathbf{H}$ 是 $(H,(\cdot,\cdot))$ 自共轭的，所以 $\mathbf{H}_{\pm}$ 分别是 $(H_{\pm}(\cdot,\cdot))$ (或 $(H_{\pm},[\cdot,\cdot])$) 上自共轭算子，并且

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix}\mathbf{H}_{-} & \Gamma\\ -\Gamma^{*} & \mathbf{H}_{+}\end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

反之，如果 $\mathbf{H}_{\pm}$ 分别是 $(H_{\pm},[\cdot,\cdot])$ 上自共轭算子，Γ是 $(H_{+},[\cdot,\cdot])$ 到 $(H_{-},[\cdot,\cdot])$ 的稠定闭算子，且 $\mathscr{D}(\Gamma)\supset\mathscr{D}(\mathbf{H}_{+})$，$\mathscr{D}(\Gamma^{*})\supset\mathscr{D}(\mathbf{H}_{-})$，那末由(1.2)所定义的算子是 $(H,(\cdot,\cdot))$ 上的自共轭算子。

当 $\lambda\bar{\in}\sigma(\mathbf{H}_{+})$ 时，作 H_{-} 中算子

$$h(\lambda)=\lambda I-\mathbf{H}_{-}+\Gamma(\lambda I-\mathbf{H}_{+})^{-1}\Gamma^{*}\text{[1]}, \tag{1.3}$$

称算子值解析函数 $h(\cdot)$ 为 $\mathbf{H}$ 的特征函数。

下面用特征函数表达$\mathbf{H}$的预解式：设 $\lambda\in\sigma(\mathbf{H}_{+})$ 而且 $h(\lambda)^{-1}$ 存在，这时从 $(\lambda I-\mathbf{H})y=x$ 可得

$$\begin{cases}(\lambda I-\mathbf{H}_{-})y_{-}-\Gamma y_{+}=x_{-}, & (1.4)\\ \Gamma^{*}y_{-}+(\lambda I-\mathbf{H}_{+})y_{+}=x_{+}; & (1.5)\end{cases}$$

其中 $x=x_{-}+x_{+}$，$y=y_{-}+y_{+}(x_{\pm},\ y_{\pm}\in H_{\pm},\ y_{\pm}\in\mathscr{D}(\mathbf{H}_{\pm}))$，并且有

$$\begin{cases}y_{+}=(\lambda I-\mathbf{H}_{+})^{-1}x_{+}-(\lambda I-\mathbf{H}_{+})^{-1}\Gamma^{*}y_{-}, & (1.6)\\ y_{-}=h(\lambda)^{-1}x_{-}+h(\lambda)^{-1}\Gamma(\lambda I-\mathbf{H}_{+})^{-1}x_{+}, & (1.7)\end{cases}$$

---

1) 显然，此式中出现的两个单位算子 I 分别是在 H_{+}，H_{-} 空间的。

从而

$$(\lambda I-\mathrm{H})^{-1}\begin{pmatrix}x_-\\x_+\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h(\lambda)^{-1}x_-+h(\lambda)^{-1}\Gamma(\lambda I-\mathrm{H}_+)^{-1}x_+\\(\lambda I-\mathrm{H}_+)^{-1}\{[I-\Gamma^*h(\lambda)^{-1}\Gamma(\lambda I\\-\mathrm{H}_+)^{-1}]x_+-\Gamma^*h(\lambda)^{-1}x_-\}\end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

由于H是作为总 Hamilton 量，而在量子物理中我们只考虑这样的态(即向量)，它是相应于 H 的实本征值(即特征值)的本征向量(即特征向量)的叠加，因此记相应于 H 的实谱的谱子空间为 H_r，H 在 H_r 上的限制 $\mathrm{H}|_{H_r}$ 记作 H_r，按物理通常要求，H_r 是自共轭的。P_r 表示 $(H,[\cdot,\cdot])$ 在 H_r 上的投影。在量子物理学中就是要研究如下的算子 $U(t)(t\in(-\infty,\infty))$[1]：当 $x_+\in H_+$ 时，

$$U(t)x_+=e^{it\mathrm{H}_r}P_re^{-it\mathrm{H}_+}\begin{pmatrix}0\\x_+\end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

利用 (1.8) 式给出 $U(t)$ 的表达式如下：对任何 $\varepsilon>0$，作围道 $\gamma_\varepsilon=\gamma_{+,\varepsilon}+\gamma_{-,\varepsilon}$，其中

$\gamma_{+,\varepsilon}$：$z=x+i\varepsilon$，x 由 $+\infty$ 变到 $-\infty$；

$\gamma_{-,\varepsilon}$：$z=x-i\varepsilon$，x 由 $-\infty$ 变到 $+\infty$。

又设存在一系列 $\varepsilon\to0$，使得 $\lambda\in\gamma_\varepsilon$ 时，$h(\lambda)^{-1}$ 存在(显然，这时 $(\lambda I-\mathrm{H})^{-1}$ 存在)(见 (1.8))，那末(在对 $\sigma(\mathrm{H})$ 稍加限制的情形下)

$$e^{it\mathrm{H}_r}P_r=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\varepsilon}e^{i\lambda t}(\lambda I-\mathrm{H})^{-1}d\lambda. \tag{1.10}$$

由此可知，

$$U(t)x_+=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\varepsilon}e^{i\lambda t}(\lambda I-\mathrm{H})^{-1}e^{-it\mathrm{H}_+}\begin{pmatrix}0\\x_+\end{pmatrix}d\lambda$$

---

1) 当自由 Hamilton 是 H_+ 上自共轭算子 H_0 时，实际上应该考虑的是，

$$e^{it\mathrm{H}_r}P_re^{-it\mathrm{H}_0}=U(t)e^{it\mathrm{H}_+}e^{-it\mathrm{H}_0}.$$

但是因子 $e^{it\mathrm{H}_+}e^{-it\mathrm{H}_0}$ 不涉及到不定度规，故可按通常场论方法处理。如果记 $\hat{\Omega}_\pm=\lim_{t\to\mp\infty}e^{it\mathrm{H}_+}e^{-it\mathrm{H}_0}$，那末散射算子应为 $\hat{\Omega}_-^*S\hat{\Omega}_+$，而 S 是(1.20) (见后面)。但因子 $\hat{\Omega}_+$，$\hat{\Omega}_-^*$ 等是属通常讨论范围，故将略去。

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon}\begin{pmatrix} h(\lambda)^{-1}\Gamma(\lambda I-\mathbf{H}_+)^{-1}e^{i(\lambda I-\mathbf{H}_+)t}x_+ \\ (\lambda I-\mathbf{H}_+)^{-1}(I-\Gamma^*h(\lambda)^{-1}\Gamma(\lambda I \\ -\mathbf{H}_+)^{-1})e^{i(\lambda I-\mathbf{H}_+)t}x_+ \end{pmatrix}d\lambda. \tag{1.11}$$

在场论的问题中，一般可不妨假设 $(H_+[\cdot,\cdot]$ (甚至可假设 $(H_1[\cdot,\cdot]))$ 是可析的. 利用 $\mathbf{H}_+$ 的谱分解，可知不妨认为 H_+ 是取值于某个可析 Hilbert 空间 $(\varepsilon_+, [\cdot,\cdot])$ 的强可测并且平方可积的函数空间. 当 $\varphi(\cdot)\in H_+$ 时，

$$\|\varphi\|^2=\int_{\sigma(\mathbf{H}_+)}\|\varphi(\omega)\|^2d\omega,\ (\mathbf{H}_+\varphi)(\omega)=\omega\varphi(\omega).$$

由于在量子场论中所采用的$\mathbf{H}_+$大都是具有良好连续性的谱，所以这里的$d\omega$可认为是通常的 Lebesgue 测度. 对有离散谱(即出现束缚态)的情况可作类似讨论，这里不再赘述.

我们再假设有算子值函数 $\zeta(\omega)$ (也容许它是算子值广义函数)，当 $\omega\in\sigma(\mathbf{H}_+)$ 时，$\zeta(\omega)$ 是 ε_+ 到 H_- 的线性算子，并且

$$\Gamma\varphi=\int_{\sigma(\mathbf{H}_+)}\zeta(\omega)\varphi(\omega)d\omega. \tag{1.12}$$

那末，当$\beta\in\mathscr{D}(\Gamma^*)$时，

$$\begin{aligned}[\Gamma\varphi,\beta] &= \left[\int_{\sigma(\mathbf{H}_+)}\zeta(\omega)\varphi(\omega)d\omega,\beta\right]\\ &=\int_{\sigma(\mathbf{H}_+)}[\zeta(\omega)\varphi(\omega),\beta]d\omega\\ &=\int_{\sigma(\mathbf{H}_+)}[\varphi(\omega),\zeta(\omega)^*\beta]d\omega,\end{aligned}$$

因此

$$(\Gamma^*\beta)(\omega)=\zeta(\omega)^*\beta. \tag{1.13}$$

此时容易算出 (1.3) 的表达式：

$$h(\lambda)=\lambda I-H_-+\int_{\sigma(\mathbf{H}_+)}\frac{\zeta(\omega)\zeta(\omega)^*}{\lambda-\omega}d\omega; \tag{1.14}$$

以及当 $\varphi\in H_+$ 时的 $U(t)\varphi$ 表达式：

$$U(t)\varphi$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\varepsilon}\begin{pmatrix} h(\lambda)^{-1}\int_{\sigma(\mathbf{H}_+)}\frac{\zeta(\omega)\varphi(\omega)}{\lambda-\omega}e^{i(\lambda-\omega)t}d\omega \\ e^{i(\lambda-\omega)t}\varphi(\omega)-\zeta(\omega)^*h(\lambda)^{-1} \\ \times\int_{\sigma(\mathbf{H}_+)}\frac{\zeta(\omega_1)\varphi(\omega_1)e^{i(\lambda-\omega_1)t}}{\lambda-\omega_1}d\omega_1/\lambda-\omega_1\end{pmatrix}d\lambda. \tag{1.15}$$

现在再给出在上述一系列假设下的波算子和散射算子的表达式。

和 Hilbert 空间情况一样，称 H_+ 到 H_t 上的算子

$$\Omega_\pm = \lim_{t\to\mp\infty}U(t) \tag{1.16}$$

为波算子(这里是强极限)。由于 (1.15) 可以写成

$U(t)\varphi =$

$$\begin{pmatrix}\int_{\sigma(\mathbf{H}_+)}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(x-\omega)t}\left(\frac{h(x-i0)^{-1}}{x-i0-\omega}-\frac{h(x+i0)^{-1}}{x+i0-\omega}\right)\zeta(\omega)\varphi(\omega)dxd\omega \\ \varphi(\omega)-\zeta(\omega)^*\int_{\sigma(\mathbf{H}_+)}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{h(x-i0)^{-1}}{(x-i0-\omega_1)(x-i0-\omega)}-\frac{h(x+i0)^{-1}}{(x+i0-\omega_1)(x+i0-\omega)}\right]\zeta(\omega_1)\varphi(\omega_1)e^{i(x-\omega_1)t} \\ \times\, dxd\omega_1\end{pmatrix}, \tag{1.17}$$

根据 Titchmarsh 定理，当 f 是可积函数时，几乎处处有

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{i(x-\omega)t}}{x-i0-\omega}f(x)dx = f(\omega),$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{i(x-\omega)t}}{x+i0-\omega}f(x)dx = 0.$$

因此，当 $\|h(\omega-i0)^{-1}\|$ 可积时，就得到

$$\Omega_-\varphi = \begin{pmatrix}\int_{\sigma(\mathbf{H}_+)}h(\omega-i0)^{-1}\zeta(\omega)\varphi(\omega)d\omega \\ \varphi(\omega)-\zeta(\omega)^*\int_{\sigma(\mathbf{H}_+)}\frac{h(\omega_1-i0)^{-1}\zeta(\omega_1)\varphi(\omega_1)d\omega_1}{\omega_1-i0-\omega}\end{pmatrix}, \tag{1.18}$$

$$\Omega_+\varphi = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{\sigma(\mathbf{H}_+)} h(\omega + i0)^{-1}\zeta(\omega)\varphi(\omega)d\omega \\ \displaystyle\varphi(\omega) - \zeta(\omega)^* \int_{\sigma(\mathbf{H}_+)} \frac{h(\omega_1 + i0)^{-1}\zeta(\omega_1)\varphi(\omega_1)d\omega_1}{\omega_1 + i0 - \omega} \end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

和 Hilbert 空间情况一样，称算子

$$S = \Omega_-^\dagger \Omega_+ \tag{1.20}$$

为散射算子．先算出 $\Omega_-^\dagger$ 的表达式：记

$$\Omega_-^\dagger \begin{pmatrix} x_- \\ x_+ \end{pmatrix} = \psi,$$

那末，当 $\varphi \in H_+$ 时，

$$\begin{aligned}
[\psi, \varphi] &= \left[\Omega_-^\dagger \begin{pmatrix} x_- \\ x_+ \end{pmatrix}, \varphi\right] = \left(\Omega_-^\dagger \begin{pmatrix} x_- \\ x_+ \end{pmatrix}, \varphi\right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} x_- \\ x_+ \end{pmatrix}, \Omega_-\varphi\right) = \Bigg[x_+, \varphi(\cdot) - \zeta(\cdot)^* \\
&\quad \times \int_{\sigma(\mathbf{H}_+)} \frac{h(\omega_1 - \lambda_0)^{-1}\zeta(\omega_1)\varphi(\omega_1)d\omega_1}{\omega_1 - i0 - (\cdot)}\Bigg] \\
&\quad - \left[x_-, \int_{\sigma(\mathbf{H}_+)} h(\omega - i0)^{-1}\zeta(\omega)\varphi(\omega)d\omega\right] \\
&= [x_+, \varphi] \\
&\quad - \int_{\sigma(\mathbf{H}_+)} \Bigg[\int_{\sigma(\mathbf{H}_+)} \frac{\zeta(\omega_1)^* h(\omega_1 - i0)^{-1*}\zeta(\omega)x_+(\omega)}{\omega_1 - \omega + i0} \\
&\quad \times d\omega, \varphi(\omega_1)\Bigg] d\omega_1 \\
&\quad - \int_{\sigma(\mathbf{H}_+)} [\zeta(\omega)^* h(\omega - i0)^{-1*} x_-, \varphi(\omega)] d\omega.
\end{aligned} \tag{1.21}$$

从 (1.3) 可知，$h(\lambda)^* = h(\bar{\lambda})$，因此

$$h(\omega_1 - i0)^{-1*} = h(\omega_1 + i0)^{-1}.$$

这样，由 (1.21) 推知

$$\Omega_-^\dagger \begin{pmatrix} x_- \\ x_+ \end{pmatrix} = x_+(\cdot) - \zeta(\cdot)^* h(\cdot + i0)^{-1}$$

$$\times \int_{\sigma(\mathbf{H}_+)} \frac{\zeta(\omega_1)x_+(\omega_1)d\omega_1}{(\cdot) - \omega_1 + i0} - \zeta(\cdot)^* h(\cdot + i0)^{-1} x_-. \tag{1.22}$$

现在导出 S 的表达式。把(1.19)，(1.22)代入(1.20)，立即得到

$$\begin{aligned}
(S\varphi)(\omega) &= Q_-^\dagger \begin{pmatrix} \int_{\sigma(\mathbf{H}_+)} h(\omega + i0)^{-1}\zeta(\omega)\varphi(\omega)d\omega \\ \varphi(\omega) - \zeta(\omega)^* \int_{\sigma(\mathbf{H}_+)} \frac{h(\omega_1 + i0)^{-1}\zeta(\omega_1)\varphi(\omega_1)d\omega_1}{\omega_1 - \omega + i0} \end{pmatrix} \\
&= \varphi(\omega) - \zeta(\omega)^* \int_{\sigma(\mathbf{H}_+)} \frac{h(\omega_1 + i0)^{-1}\zeta(\omega_1)\varphi(\omega_1)d\omega_1}{\omega_1 - \omega + i0} \\
&\quad - \zeta(\omega)^* h(\omega + i0)^{-1} \int_{\sigma(\mathbf{H}_+)} h(\omega_1 + i0)^{-1}\zeta(\omega_1)\varphi(\omega_1)d\omega_1 \\
&\quad - \zeta(\omega)^* h(\omega + i0)^{-1} \int_{\sigma(\mathbf{H}_+)} \frac{\zeta(\omega_1)\varphi(\omega_1)}{\omega - \omega_1 + i0} d\omega_1 \\
&\quad + \zeta(\omega)^* h(\omega + i0)^{-1} \int_{\sigma(\mathbf{H}_+)} \frac{\zeta(\omega_1)\zeta(\omega_1)^*}{\omega - \omega_1 + i0} \\
&\quad \times \int_{\sigma(\mathbf{H}_+)} \frac{h(\omega_2 + i0)^{-1}\zeta(\omega_2)\varphi(\omega_2)d\omega_2}{\omega_2 - \omega_1 + i0} d\omega_1,
\end{aligned} \tag{1.23}$$

由(1.14)可知

$$\frac{h(\lambda) - h(\lambda_1)}{\lambda - \lambda_1} = I - \int \frac{\zeta(\omega_1)\zeta(\omega_1)^*}{(\lambda - \omega_1)(\lambda_1 - \omega_1)} d\omega_1.$$

以 $\lambda = \omega + i0$，$\lambda_1 = \omega_2 + i0$ 代入上式，并利用它改写(1.23)的末项为

$$\begin{aligned}
&- \zeta(\omega)^* h(\omega + i0)^{-1} \int_{\sigma(\mathbf{H}_+)} \frac{1}{\omega - \omega_1} (h(\omega + i0) \\
&\qquad - h(\omega_1 + i0)) h(\omega_1 + i0)^{-1}\zeta(\omega_1)\varphi(\omega_1)d\omega_1 \\
&\qquad + \zeta(\omega)^* h(\omega + i0)^{-1} \int_{\sigma(\mathbf{H}_+)} h(\omega_1 + i0)^{-1} \\
&\qquad \times \zeta(\omega_1)\varphi(\omega_1)d\omega_1,
\end{aligned}$$

从而

$$(S\varphi)(\omega)=\varphi(\omega)-\zeta(\omega)^*\Big\{\int_{\sigma(\mathrm{H}_+)} h(\omega_1+i0)^{-1}\zeta(\omega_1)\varphi(\omega_1)$$
$$\times\left[\frac{1}{\omega_1-\omega+i0}-\frac{1}{\omega_1-\omega}\right]d\omega_1$$
$$+h(\omega+i0)^{-1}\int_{\sigma(\mathrm{H}_+)}\zeta(\omega_1)\varphi(\omega_1)\left[\frac{1}{\omega-\omega_1+i0}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\omega+\omega_1}\right]d\omega_1\Big\}. \tag{1.24}$$

利用下面广义函数论中公式(或 Cauchy 型积分公式)

$$\frac{1}{x-(a\pm i0)}=\pm\pi i\delta(x-a)+\frac{1}{x-a}$$

对(1.24)进行化简,就得到本节主要结果之一,即散射算子的表达式:

$$(S\varphi)(\omega)=(I+2\pi i\zeta(\omega)^*h(\omega+i0)^{-1}\zeta(\omega))\varphi(\omega),$$

即 S 是下列算子

$$S(\omega)=I+2\pi i\zeta^*(\omega)h(\omega+i0)^{-1}\zeta(\omega). \tag{1.25}$$

由于散射算子的么正性(即是不是酉算子)等价于 $S(\omega)$ 的么正性,下面证明 S 的么正性,即证明

$$S(\omega)^*S(\omega)=S(\omega)S(\omega)^*=I. \tag{1.26}$$

从(1.25)易知 $S(\omega)^*=I-2\pi i\zeta(\omega)^*h(\omega-i0)^{-1}\zeta(\omega)$, 因此

$$S(\omega)^*S(\omega)=I+2\pi i\zeta^*(\omega)(h(\omega+i0)^{-1}-h(\omega-i0)^{-1})\zeta(\omega)$$
$$-(2\pi i)^2\zeta(\omega)^*h(\omega-i0)^{-1}\zeta(\omega)\zeta(\omega)^*$$
$$\times h(\omega+i0)^{-1}\zeta(\omega).$$

但从(1.14)可知, $h(\omega+i0)-h(\omega-i0)=-2\pi i\zeta(\omega)\zeta(\omega)^*$, 将它代入上式最后一项,立即可得 $S(\omega)^*S(\omega)=I$. 同理可得

$$S(\omega)S(\omega)^*=I.$$

3. 李-Wick 模型 现在将以李-Wick 模型为例子来说明第2小节中各种算子. 在李-Wick 模型中,总 Hamilton 算子是

$$\mathrm{H}=m_0^2V^*V+\int\omega(\boldsymbol{k})a^*(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})d^3k$$
$$+\int\varphi_0(\boldsymbol{k})(V^*Na(\boldsymbol{k})+VN^*a^*(\boldsymbol{k})d^3k, \tag{1.27}$$

其中 $\varphi_0(\boldsymbol{k})$ 是实函数，m_V^0 是 V 粒子的静止质量，

$$\omega(\boldsymbol{k})=\sqrt{\mu^2+\boldsymbol{k}^2}$$

$(\boldsymbol{k}=(k^1,k^2,k^3),\ \boldsymbol{k}^2=(k^1)^2+(k^2)^2+(k^3)^2,\ d^3k=dk^1dk^2dk^3)$，$\mu>0$，而 V，N，a 和 V^*，N^*，a^* 分别是 V 粒子，N 粒子，θ 粒子的湮灭和产生算子，而且满足交换关系和反交换关系

$$[a(\boldsymbol{k}),a^*(\boldsymbol{k}')]=\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'), \tag{1.28}$$

$$\{N,N^*\}=I,\{V,V^*\}=-I. \tag{1.29}$$

这里 $[A,B]$，$\{A,B\}$ 分别表示 $AB-BA$，$AB+BA$. 由(1.29)中的 $\{V,V^*\}=-I$ 立即可知，出现 V 粒子的态是负度规. 事实上，如果 Φ_0 表示真空态，那末 $[\Phi_0,\Phi_0]=1$，并且按物理意义，Φ_0 必是任何粒子的湮灭算子的零向量. 从而由反交换关系

$$\{V,V^*\}=-I$$

有

$$[V^*\Phi_0V^*\Phi_0]=[VV^*\Phi_0,\Phi_0]=-1+[-V^*V\Phi_0,\Phi_0]=-1,$$

即单 V 粒子态 $V^*\Phi_0$ 是负度规. 更确切地说，反映反交换关系

$$\{V,V^*\}=-I$$

的数学框架不能用 Hilbert 空间，而只能用负度规空间. 但描述粒子 N，a 仍是 Hilbert 空间，因而描述 V，N，a 相互作用体系的数学框架只能是不定度规空间. 为此，用 $(\cdot,\cdot)$ 表示物理态之间的不定内积，而用 $V^\dagger$，$N^\dagger$，$a^\dagger$ 分别代替 V^*，N^*，a^*，从而(1.28)，(1.29)分别成为

$$[a(\boldsymbol{k}),a^\dagger(\boldsymbol{k}')]=\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'), \tag{1.28$'$}$$

$$\{N,N^\dagger\}=I,\{V,V^\dagger\}=-I. \tag{1.29$'$}$$

容易看出，形如 $\begin{pmatrix}V+(n-1)\theta\\ N+n\theta\end{pmatrix}$ 的态(即含有 $(n-1)$ 个 θ 粒子和一个 V 粒子，以及含有 n 个 θ 粒子和一个 N 粒子的合成态）全体所成的态空间 $H^{(n)}$ 是 $\mathbf{H}$ 的约化子空间. 现在来表出 $H^{(n)}$，及 $\mathbf{H}|_{H^{(n)}}$.

设 $\varphi(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n)$ 是 $\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n$ 的平方可积函数，而且关于 $\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n$ 是对称的. 作 $N+n\theta$ 型态向量.

$$\Phi_\varphi = N^*\int\cdots\int \varphi(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n)a^\dagger(\boldsymbol{k}_1)\cdots a^\dagger(\boldsymbol{k}_n)$$
$$\times d^3k_1\cdots d^3k_n\Phi_0. \tag{1.30}$$

我们把态 Φ_φ 和 φ 一致化，这种态(或 φ) 全体记为 $H_+^{(n)}$，这时由交换关系 (1.28)′, (1.29)′ 容易算出

$$(\Phi_\varphi, \Phi_\varphi) = n!\int\cdots\int|\varphi(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n)|^2 d^3k_1\cdots d^3k_n, \tag{1.31}$$

记 $(\Phi_\varphi, \Phi_\varphi)$ 为 $[\varphi, \varphi]$. 同样设 $\phi(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_{n-1})$ 是 $\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_{n-1}$ 的平方可积函数，并且关于 $\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_{n-1}$ 对称(当 $n=1$ 时，ϕ 是常数)，作态向量

$$\Psi_\phi = V^\dagger\int\cdots\int \phi(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_{n-1})a^\dagger(\boldsymbol{k}_1)\cdots$$
$$\times a^\dagger(\boldsymbol{k}_{n-1})d^3k_1\cdots d^3k_{n-1}\Phi_0. \tag{1.32}$$

这种态全体记为 $H_-^{(n)}$ (当 $n=1$ 时，$H_-^{(1)}$ 只是一维复数空间)，这时

$$(\Psi_\phi, \Psi_\phi) = -(n-1)!\int\cdots\int|\phi(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_{n-1})|^2$$
$$\times d^3k_1\cdots d^3k_{n-1}, \tag{1.33}$$

将它记为 $-[\phi, \phi]$. 那末，显然有

$$H^{(n)} = H_-^{(n)} \oplus H_+^{(n)},$$

$H^{(n)}, H_-^{(n)}, H_+^{(n)}$ 就是上一小节中的 H, H_-, H_+.

用函数对 $\begin{pmatrix}\phi\\ \varphi\end{pmatrix}$ 表示态 $\Phi_\varphi + \Psi_\phi$，把 $\mathbf{H}$ 在 $\mathbf{H}^{(n)}$ 上表示成 (1.2)，这时，

$$\mathbf{H}_-\phi = \left(m_V^0 I + \sum_{\nu=1}^{n-1}\omega(\boldsymbol{k}_\nu)\right)\phi(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_{n-1}), \tag{1.34}$$

$$\mathbf{H}_+\varphi = \sum_{\nu=1}^{n}\omega(\boldsymbol{k}_\nu)\varphi(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n), \tag{1.35}$$

$$(\Gamma\varphi)(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_{n-1}) = n\int\varphi(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_{n-1}, \boldsymbol{k}_n)\varphi_0(\boldsymbol{k}_n)d^3k_n, \tag{1.36}$$

$$(\Gamma^*\phi)(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_{n-1}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\phi(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{k}}_j, \cdots, \boldsymbol{k}_n) \times \varphi_0(\boldsymbol{k}_j). \tag{1.37}$$

这里 $\hat{\boldsymbol{k}}_j$ 表示变元 $\boldsymbol{k}_j$ 不出现。容易算出，Γ, Γ^*关于内积互为共轭算子，因此对它们可采用第 2 小节的方法。

今后简记 $\omega(\boldsymbol{k}_j)$ 为 ω_j，记 $\omega = \omega_1 + \cdots + \omega_n$. 用 τ_j 表示单位向量，$d\tau_j$ 表示单位球面的面积元素。令 $\boldsymbol{k}_j = |\boldsymbol{k}_j|\tau_j$,

$$t_j = \omega_j/\omega, \quad \nu = (t_1, \cdots, t_{n-1}, \tau_1, \cdots, \tau_n),$$

$$d\nu = \prod_{j=1}^{n-1} dt_j \prod_{k=1}^{n} d\tau_k, \quad k = (\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n), \quad dk = \prod_{j=1}^{n} d^3k_j,$$

在变数变换 $k \to (\nu, \omega)$ 下的函数行列式记为 J. 那末，

$$dk = J d\nu d\omega,$$

这时 $\varphi(k)J^{\frac{1}{2}}$ 可视为 ν 和 ω 的函数，记之为 $\hat{\varphi}(\nu, \omega)$. 取 $\mathfrak{G}_+$ 为关于 $d\nu$ 平方可积的以 ν 为变元的函数空间，当 $g \in \mathfrak{G}_+$ 时，规定

$$\|g\| = n!\int |g(\nu)|^2 d\nu,$$

那末 $\hat{\varphi}(\nu, \omega)$ 又可以看成取值于 $\mathfrak{G}_+$ 的函数 $\varphi(\omega)$，那末 $H_+^{(n)}$ 就是取值于 $\mathfrak{G}_+$ 的向量值函数空间，而且

$$\|\varphi\|^2 = \int_{\sigma_n} \|\varphi(\omega)\|^2 d\omega = n!\int\cdots\int|\varphi(k)|^2 dk,$$

$$(\mathrm{H}_+\varphi)(\omega) = \omega\varphi(\omega),$$

此处 σ_n 为 H_+ 的谱集 $[n\mu, \infty)$. 再作出相应于(1.12)中的$\zeta(\omega)$：记

$$q = (\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_{n-1}), \quad dq = \prod_{j=1}^{n-1} d^3q_j,$$

作广义函数

$$\zeta(q, k) = \frac{1}{(n-1)!}\mathscr{P}_{\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n}\{\delta(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{q}_1)\cdots\delta(\boldsymbol{k}_{n-1} - \boldsymbol{q}_{n-1})\varphi_0(\boldsymbol{k}_n)J^{\frac{1}{2}}\},$$

这里$\mathscr{P}_{\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n}\{\cdots\}$表示关于 $\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n$ 对称化后所得各项之和。由于 k 是 ν 和 ω 的函数，上述 $\zeta(q, k)$ 可以看成 q, ν, ω 的函数，记之为 $\mathring{\zeta}(q, \nu, \omega)$。作算子值函数如下：

$$\zeta(\omega)\varphi(\omega) = \int \mathring{\zeta}(q, \nu, \omega)\mathring{\varphi}(\nu, \omega)d\nu. \tag{1.38}$$

由 (1.36) 容易验证 (1.38) 所定义的 $\zeta(\omega)$ 满足 (1.12)，并且

$$\zeta^*(\omega)\phi = \frac{1}{n}\int \mathring{\zeta}(q, \nu, \omega)\phi(q)dq. \tag{1.39}$$

设这时 $h(\omega + i0)^{-1}$ 是如下的积分算子，

$$h(\omega + i0)^{-1}(q) = \int h(\omega; q, q')\phi(q')dq', \tag{1.40}$$

这里积分核 $h(\omega; q, q')$ 可以是广义函数. 那末，由 (1.25)，(1.38)—(1.40) 就得到

$$\begin{aligned}(S\varphi)(\omega) &= \mathring{\varphi}(\nu, \omega) + \frac{2\pi i}{n}\int \mathring{\zeta}(q, \nu, \omega)h(\omega; q, q') \\ &\quad \times \mathring{\zeta}(q', \nu', \omega)\mathring{\varphi}(\nu', \omega)d\nu' dq' dq \\ &= \mathring{\varphi}(\nu, \omega) + \frac{2\pi i}{n}\int \mathring{\zeta}(q, \nu, \omega)h(\omega; q, q') \\ &\quad \times \mathring{\zeta}(q', \nu', \omega')\mathring{\varphi}(\nu', \omega')\delta(\omega - \omega')d\nu' dq' dq d\omega.\end{aligned}$$

再把它们化成 k 的函数，则上式变成

$$\begin{aligned}(S\varphi)(k) &= \varphi(k) + \frac{2\pi i}{n}\int \zeta(q, k)h(\omega; q; q') \\ &\quad \times \zeta(q', k')\varphi(k)\delta(\omega - \omega')dk' dq' dq,\end{aligned} \tag{1.41}$$

又令

$$\delta(k, k') = \frac{1}{n!}\mathscr{P}_{\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n}\{\delta(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_1')\cdots\delta(\boldsymbol{k}_n - \boldsymbol{k}_n')\},$$

$$\begin{aligned}S(k, k') &= \delta(k; k') + \frac{2\pi i}{n}\delta(\omega - \omega') \\ &\quad \times \int \zeta(q, k)h(\omega; q, q')\zeta(q', k')dq' dq \\ &= \delta(k; k') + \frac{2\pi i}{n}\delta(\omega - \omega')\sum_{j,l=1}^{n}\varphi_0(\boldsymbol{k}_j)\varphi_0(\boldsymbol{k}_l')\end{aligned}$$

$$\times h(\omega;\ \boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_j, \cdots, \boldsymbol{k}_n,$$
$$\boldsymbol{k}_1', \cdots, \boldsymbol{k}_l', \cdots, \boldsymbol{k}_n'),$$

由 (1.41) 可知

$$(S\varphi)(k) = \int S(k;\ k')\varphi(k')dk'.$$

因此，散射算子的计算就化成计算 $S(k;\ k')$，而关键是计算 $h(\omega;\ q, q')$. 但由 (1.40) 推知，$h(\omega;\ q, q')$ 是方程

$$h(\omega + i0)h(\omega; q, q') = \delta(q, q') \tag{1.42}$$

的解. 又由 (1.3), (1.34)—(1.38), 应该有

$$h(\lambda)\phi(q) = \left(\lambda - m_V^0 - \sum_{j=1}^{n-1}\omega(\boldsymbol{q}_j)\right)\phi(q)$$
$$+ \sum_{j=1}^{n}\int \frac{\phi(\boldsymbol{q}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{q}}_j, \cdots, \boldsymbol{q}_n)\varphi_0(\boldsymbol{q}_j)\varphi_0(\boldsymbol{q}_n)d^3q}{\lambda - \sum_{j=1}^{n}\omega(\boldsymbol{q}_j)}. \tag{1.43}$$

下面我们假设 $\varphi_0(\boldsymbol{k})$ 只是 $|\boldsymbol{k}|$ 的函数，也就是

$$\omega = \sqrt{\mu^2 + |\boldsymbol{k}|^2}$$

的函数，并记为 $\alpha(\omega)$. 又记

$$\tau = (\tau_1, \cdots, \tau_{n-1}),\ \tilde{\omega} = (\omega_1, \cdots, \omega_n),$$

那末 k 的函数成为 τ 与 $\tilde{\omega}$ 的函数. 在这样的变数变换下，

$$S(k;\ k') = \delta(\tau;\ \tau')S(\tilde{\omega};\ \tilde{\omega}'),$$

又因为

$$S(\tilde{\omega};\ \tilde{\omega}') = \delta(\tilde{\omega};\tilde{\omega}') + \frac{2\pi i}{n}\delta(\omega - \omega')\sum_{j,l=1}^{n}\alpha(\omega_j)\alpha(\omega_l')$$
$$\times h(\omega', \omega_1, \cdots, \hat{\omega}_j, \cdots, \omega_n,$$
$$\omega_1', \cdots, \hat{\omega}_l', \cdots, \omega_n'),$$

由 (1.42), (1.43) 可知函数

$$y = y(\omega_1, \cdots, \omega_{n-1}) = h(\omega;\ \omega_1, \cdots, \omega_{n-1}, \omega_1', \cdots, \omega_{n-1}')$$

应是奇性积分方程

$$\left(\omega - m_V^0 - \sum_{\nu=1}^{n-1} \omega_\nu\right) y$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_{\mu}^{\infty} \frac{y(\omega_1, \cdots, \hat{\omega}_j, \cdots, \omega_n)\alpha(\omega_j)\alpha(\omega_n) d\omega_n}{\omega + i0 - \sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu} \qquad (1.44)$$

的解. 因此 S 矩阵元的计算就化为解上述积分方程.

李政道和 Wick 求出了 $n = 1$ (即 $N\theta$ 节)和 $n = 2$ (即 $N\theta Q$ 节)时散射矩阵的元. 当 $n = 1$ 时,只要解函数方程;当 $n = 2$ 时,问题归结为解单个变数的奇性积分方程. 对于 $n \geqslant 3$ 时, 解多个变数函数的奇性积分方程, 将有本质上困难. 对于 $n = 3$ (即 $N\theta\theta\theta$ 节)我们给出奇性积分方程 (1.44) 的解(此方法原则上可应用于 $n > 3$ 的情况),由于求解积分方程问题已与不定度空间理论无关,故这里从略.

4. 带不定度规或带中间系统的散射问题 上面所粗略讨论的带不定度规的散射问题和 Лившиц 所研究过的带中间系统的散射问题有着十分密切的联系. 然而 Лившиц 的理论论证中有些地方是暧昧不清的. 自本小节以后的各小节将以严格的定理形式将它和带不定度规的散射问题统一地加以论证.

问题的提法:

带不定度规散射问题 设 $(H, (\cdot, \cdot))$ 是不定度规空间,

$$H = H_- \oplus H_+$$

是正则分解, $\dim H_- = \dim H_+ = \aleph_0$, 由分解 $H = H_- \oplus H_+$ 产生的内积为 $[\cdot, \cdot]$. $P_\pm$ 是 H 在 $H_\pm$ 上的投影, $J = P_+ - P_-$, $\mathbf{H}$ 是 $(H, (\cdot, \cdot))$ 上自共轭算子, H' 是 $\mathbf{H}$ 的约化子空间,记 $\mathbf{H}' = \mathbf{H}|_{H'}$, $\mathbf{H}'$ 在 H' 上只有实谱(这是物理上对能量算子的要求). 考察的是以 H' 为散射系统的物理态空间, $\mathbf{H}'$ 为 (Hamilton) 算子(注意,在下面的数学论证中,必要时规定 $\mathbf{H}'$ 在 $H'^\perp$ 上是零) 的如下散射问题: 是否对一切 $\phi \in H'$, 有 $\phi_{进}$, $\phi_{出} \in H_0$, 使得

$$\lim_{t\to+\infty} \|e^{-it\mathbf{H}'}\phi - e^{-it\mathbf{H}_0}\phi_{出}\| = 0,$$

$$\lim_{t\to-\infty}\|e^{-itH'}\phi - e^{-itH_0}\phi_{进}\| = 0, \tag{1.45}$$

其中 $\mathbf{H}_0$ 是自由 Hamilton 算子，它是在某个闭子空间 H_0 上关于 $[\cdot,\cdot]$ 的自共轭算子．如果 (1.45) 满足，定义波算子

$$W_+\phi_{进} = \phi,\ W_-\phi_{出} = \phi.$$

当 $e^{-itH'}$ 一致有界时，显然有

$$W_\pm = (强)\lim_{t\to\mp\infty} e^{itH'}e^{-itH_0}.$$

如果 $W_\pm$ 是 H_0 到 H' 的双射，定义散射算子 $S = W_-^{-1}W_+$（显然这与 (1.20) 是一致的），即 $S\phi_{进} = \phi_{出}$．散射问题就是决定 S 的存在性，酉性及其表达式．

本文考察如下两种情况：(一)假定 H_0 是正性完备子空间，这时取 H_+ 就是 H_0，因而

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_- & \Gamma \\ -\Gamma^* & \mathbf{H}_+ \end{pmatrix} \tag{1.46}$$

（有关 Γ 的假设将放在下一小节）．再假设(强)

$$\lim_{t\to\mp\infty} e^{itH_+}e^{-itH_0} = \hat{\Omega}_\pm$$

存在，并且是 $H_+ = H_0$ 上酉算子．这在通常散射理论中是熟知的，并且与不定度规无关，可按通常办法处理，因而可撇开不管．记 $V(t) = e^{-itH'}$，$V_0(t) = e^{-itH_+}$，因此散射问题化为求如下波算子

$$\Omega_\pm = (强)\lim_{t\to\mp\infty} V(t)V_0(-t). \tag{1.47}$$

由此可见，散射问题化为 $\Omega_-^{-1}\Omega_+$ 的存在性、酉性及其表达式．下面不妨认为 $S = \Omega_-^{-1}\Omega_+$（只要不误解真实的散射算子是 $\hat{\Omega}_-^{-1}S\hat{\Omega}_+$）．

(二) $H_0 = H$，这时仍作分解 (1.46)．记

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_- & O \\ O & \mathbf{H}_+ \end{pmatrix},$$

假设

$$(强)\lim_{t\to\mp\infty} e^{itH_1}e^{-itH_0} = \check{\Omega}_\pm$$

存在，并且是酉算子．撇开它，记 $V_1(t) = e^{-itH_1}$，散射问题化为求如下波算子

$$\Omega_{\pm} = (\text{强})\lim_{t\to\mp\infty} V(t)V_1(-t), \tag{1.48}$$

以及散射算子 $S = \Omega_-^{-1}\Omega_+$ 的存在性、酉性与它的表达式.

关于 H' 再作如下说明. 设 $x\in H$, 如有上、下开半平面上取值于H的解析函数 $x(\lambda)$, 使得 $(\mathbf{H}-\lambda I)x(\lambda)=x$ 成立,就称 x 关于 $\mathbf{H}$ 是实谱的, $x(\cdot)$ 是 x 的预解函数. H中关于$\mathbf{H}$是实谱的向量的全体记为 H_r (未必是闭的), 称为 $\mathbf{H}$ 的实谱子空间, 显然 $H'\subset H_r$. 如果 (1.47) (或 (1.48)) 中的 $\Omega_\pm$ 存在, 且为 H_+ (或 H) 到H' 的有界的双射,易知

$$\mathbf{H}' = \Omega_+\mathbf{H}_+\Omega_+^{-1}\ (\text{或}\ \mathbf{H}' = \Omega_+\mathbf{H}_1\Omega_+^{-1}). \tag{1.49}$$

由于我们只考察 $\mathbf{H}_+$ (或 $\mathbf{H}_1$) 是具有全连续谱的情况, 所以当 $x\in H_+$ 时,$(\mathbf{H}_+-\lambda I)^{-1}x$ 作为 λ 的向量值解析函数必是C类[1)]的. H_r中C类全体记为 H_r', 由此可知, $H'\subset H_r'$. 今后均假定

$$H' = H_r'.$$

带中间系统的散射问题 设 H_+ 是弹性或非弹性碰撞的渐近态(例如粒子 a_1, a_2 碰撞). 把碰撞过程看成先形成中间系统 $\hat{c}$ (复合粒子),再由中间系统 $\hat{c}$ 衰变为碰撞渐近态(例如 $a_1+a_2\to\hat{c}\to a_1+a_2$). 设中间系统的态向量空间是 Hilbert 空间 $(H_-,[\cdot,\cdot])$, 其自由 Hamilton 算子是 $\mathbf{H}_+((H_+,[\cdot,\cdot])$ 上自共轭算子),整个系统的态空间便是 $H=H_-\oplus H_+$, Hamilton 算子形式为

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix}\mathbf{H}_- & \Gamma\\ \Gamma^* & \mathbf{H}_+\end{pmatrix}, \tag{1.50}$$

其中 Γ, Γ^* 分别描述中间系统的形成和衰变的机制. 我们有时也研究物理态空间为H的子空间 H_r' (即 H'), 而 Hamilton 算子为 $\mathbf{H}|_{H_r'}$ 的情况. 对于带中间系统散射问题, 我们也只考察两种情

---

1) $f(\lambda)$ 是定义在上、下开半平面上的向量值解析函数. 如果对任何向量 a, 函数 $[f(\lambda),a]$ 可表示成 Cauchy 型积分, 即有 $f_a(\omega)\in L^1$, 对一切 $\lambda(I_m\lambda\neq 0)$, $[f(\lambda),a]=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f_a(\omega)}{\omega-\lambda}d\omega$, 就称 $f(\cdot)$ 是C类. 如果 $f(\cdot)$ 满足如下条件: $\sup_{y\neq 0}\int\|f(x+iy)\|^p dx<\infty$, 就称 f 是 H^p 类.

况：（一）中间系统在碰撞前不出现，在碰撞后被衰变掉这种弹性散射情况，渐近态为 H_+. 记 $V(t)=e^{-it\mathbf{H}}$, $V_0(t)=e^{-it\mathbf{H}_+}$ ($\mathbf{H}_+$ 是自由 Hamilton)，这时要求对一切 $\phi\in H$，有 $\phi_{进}$, $\phi_{出}\in H_+$ 使 (1.45) 成立. 记 $\Omega_\pm$ 为

$$\Omega_+\phi_{进}=\phi,\ \Omega_-\phi_{出}=\phi.$$

对 $\Omega_\pm$ 仍有公式 (1.47)，仍可定义散射算子 $S=\Omega_-^{-1}\Omega_+$. （二）以 H 为渐近态空间（这时包括弹性和非弹性散射），仍可引入 $\mathbf{H}_1$（自由 Hamilton 算子）以及 $V_1(t)=e^{-it\mathbf{H}_1}$，按 (1.48) 定义波算子等.

可见带不定度规和带中间系统散射问题是可以统一的，今后对带不定度规的，规定 $\eta=-1$；带中间系统的，规定 $\eta=1$. 又令 $\Gamma_1=\eta\Gamma^*$. 那末，(1.46)，(1.50) 统一成

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix}\mathbf{H}_- & \Gamma\\ \Gamma_1 & \mathbf{H}_+\end{pmatrix}. \tag{1.51}$$

下面和第2小节一样，对 (1.51) 引入算子（称为特征函数），

$$h(\lambda)=\lambda I-\mathbf{H}_-+\Gamma(\mathbf{H}_+-\lambda I)^{-1}\Gamma_1(\lambda\bar{\in}\sigma(\mathbf{H}_+)), \tag{1.52}$$

它是 H_- 到 H_- 算子. 根据 (1.8)，对任何

$$x=\begin{pmatrix}x_-\\ x_+\end{pmatrix},$$

$$(\lambda I-\mathbf{H})^{-1}\begin{pmatrix}x_-\\ x_+\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h(\lambda)^{-1}x_-+h(\lambda)^{-1}\Gamma(\lambda I-\mathbf{H}_+)^{-1}x_+\\ (\lambda I-\mathbf{H}_+)^{-1}\{[I+\Gamma_1h(\lambda)^{-1}\Gamma(\lambda I\\ -\mathbf{H}_+)^{-1}]x_++\Gamma_1h(\lambda)^{-1}x_-\}\end{pmatrix}, \tag{1.53}$$

上式对使得其中每个式子都有意义的 λ 成立. 由此易知，

$$h(\lambda)^{-1}=P_-(\lambda I-\mathbf{H})^{-1}P_-. \tag{1.54}$$

5. 渐近态空间为 $\mathbf{H}_+$ 的情况 显然，散射算子的存在性、酉性等是要有条件的. 由于量子场论中真实的相互作用场的 Hamilton 算子迄今无法完全知道，因而很难说应对 $\mathbf{H}$ 加什么条件是恰当的，而下面所加的条件只能说从物理上是合理的（至少对李-Wick 模型是可以的）.

设 $\mathbf{H}_+$ 的谱具有全连续性，因而可不妨认为 H_+ 就是取值于可析 Hilbert 空间 $(\varepsilon_+, [\cdot, \cdot])$ 的 $\sigma(\mathbf{H}_+)$ 上平方可积函数 $\varphi(\cdot)$ 的全体，并且

$$\|\varphi\|^2 = \int_{\sigma(\mathbf{H}_+)} \|\varphi(\omega)\|^2 d\omega, \quad (\mathbf{H}_+\varphi)(\omega) = \omega\varphi(\omega).$$

为方便起见，设 $\mathbf{H}_-$ 是有界的，又设 $\zeta(\omega)$ 当 $\omega \in \sigma(\mathbf{H}_+)$ 时，是 $(\varepsilon_+, [\cdot, \cdot])$ 到 $(H_-, [\cdot, \cdot])$ 的有界线性算子，并且 $\zeta(\cdot)$ 是在 $\sigma(\mathbf{H}_+)$ 上强可测的算子值函数，而

$$\Gamma\varphi = \int_{\sigma(\mathbf{H}_+)} \zeta(\omega)\varphi(\omega) d\omega,$$

并且 Γ 是有界线性算子，这等价于

$$\int_{\sigma(\mathbf{H}_+)} \|\zeta(\omega)\|^2 d\omega < \infty. \tag{1.55}$$

再设有 $q > 2$，使得

$$\int_{\sigma(\mathbf{H}_+)} \|\zeta(\omega)\|^q d\omega < \infty. \tag{1.56}$$

记 $\zeta_1(\omega) = \eta\zeta(\omega)^*$，那末易知，当 $\beta \in H_-$ 时，

$$(\Gamma_1\beta)(\omega) = \zeta_1(\omega)\beta.$$

因此，当 $\lambda \bar{\in} \sigma(\mathbf{H}_+)$ 时，

$$h(\lambda) = \lambda I - \mathbf{H}_- + \int_{\sigma(\mathbf{H}_+)} \frac{\zeta(\omega)\zeta_1(\omega)}{\omega - \lambda} d\omega. \tag{1.57}$$

对上、下开半平面上的算子值(向量值)解析函数 $f(\lambda)$，当 ω 是实数时，记 $f_\pm(\omega) = f(\omega \pm i0)$. 由 (1.57)，根据 Cauchy 型积分公式知道，如果对几乎所有实数 $\omega \bar{\in} \sigma(\mathbf{H}_+)$，算子 $h_\pm(\omega)$ 存在，则

$$h_+(\omega) - h_-(\omega) = 2\pi i\zeta(\omega)\zeta_1(\omega), \quad \omega \in \sigma(\mathbf{H}_+). \tag{1.58}$$

令 $\mathscr{F}$ 表示 Fourier 变换：

$$(\mathscr{F}\varphi)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{i\omega x}\varphi(\omega) d\omega.$$

$P_{\langle a,b\rangle}$ 表示 $L^2(-\infty, \infty)$ 上的投影算子：

$$P_{\langle a,b\rangle}\varphi = \chi_{\langle a,b\rangle}\varphi,$$

其中 $\chi_{\langle a,b\rangle}$ 是区间 $\langle a, b\rangle$ 的特征函数. 当 $p \geqslant 1$ 时，作 $L^p(-\infty,$

∞) 上算子

$$Q_{\pm}:\ \phi \longmapsto \frac{\pm 1}{2\pi i}\int \frac{\phi(t)dt}{t-(\omega \pm i0)}.$$

易知,当 $1 \leqslant p < \infty$ 时,

$$Q_+ = \mathscr{F}^{-1}P_{(-\infty,0)}\mathscr{F},\ Q_- = \mathscr{F}^{-1}P_{(0,\infty)}\mathscr{F}.$$

因此,$Q_{\pm}$ 都是 $L^p(-\infty,\infty)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ 上投影(即有界,幂等算子),而且

$$Q_+ + Q_- = I.$$

定理 1.1 设对 $\sigma(\mathrm{H}_+)$ 外的一切实数ω, $h^{-1}(\omega)$ 存在,而且对几乎所有 ω, $h_{\pm}(\omega)$, $h_{\pm}(\omega)^{-1}$ 都存在,对每个 $a \in H_-$,

$$(\text{强})\lim_{\lambda \to \omega \pm i0} h(\lambda)^{-1}a = h_{\pm}(\omega)^{-1}a$$

对几乎所有 ω 成立. 又设 $h_{\pm}(\omega)^{-1}\zeta(\omega)$ 是有界算子,

$$\int \|h_{\pm}(\omega)^{-1}\zeta(\omega)\|^2 d\omega < \infty, \tag{1.59}$$

又有数 $q' > 2$, 使得

$$\int \|h_{\pm}(\omega)^{-1}\zeta(\omega)\|^{q'} d\omega < \infty, \tag{1.60}$$

那末有 H_+ 到 H'_r 上的线性算子 $\Omega_{\pm}$ 满足

$$\Omega_{\pm}\varphi = \begin{pmatrix} \int h_{\pm}^{-1}(\omega)\zeta(\omega)\varphi(\omega)d\omega \\ \varphi \mp 2\pi i\zeta_1 Q_{\mp}h_{\pm}^{-1}\zeta\varphi \end{pmatrix}; \tag{1.61}$$

它的共轭算子 $\Omega_{\pm}^{\dagger}$ (当 $\eta = 1$ 时, $\Omega_{\pm}^{\dagger}$ 即 $\Omega_{\pm}^{*}$) 是有界线性算子且满足

$$\Omega_{\pm}^{\dagger}\begin{pmatrix} a \\ \varphi \end{pmatrix} = \varphi \pm 2\pi i\zeta_1 h_{\mp}^{-1}Q_{\mp}\zeta\varphi + \zeta_1 h_{\mp}^{-1}a, \tag{1.62}$$

并且适合

$$\Omega_{\pm}^{\dagger}\Omega_{\pm} = I_{H_+},\quad \Omega_{\pm}\Omega_{\pm}^{\dagger} = P_r, \tag{1.63}$$

$\Omega_{\pm}$ 是 H_+ 到 H'_r 的酉算子 ($\eta = -1$ 时, H'_r 按不定度规), P_r是H 到 H'_r 的投影算子 ($\eta = -1$ 时, $P_r^{\dagger} = P_r$). 当 $\eta = -1$ 时,不定度规在 H'_r 上是正定的,而且

$$\mathrm{H}|_{H'_r} = \Omega_{\pm}\mathrm{H}_+\Omega_{\pm}^{-1},\ V(t) = \Omega_{\pm}V_0(t)\Omega_{\pm}^{-1}. \tag{1.64}$$

$\Omega_\pm$ 就是散射问题的波算子：

$$\lim_{t\to\mp\infty}\|V(t)\Omega_\pm\varphi - V_0(t)\varphi\| = 0,\quad \varphi\in H_+,\qquad (1.65)$$

$$\lim_{t\to\mp\infty}\|V(t)x - V_0(t)\Omega_\pm^\dagger x\| = 0,\quad x\in H'_r,\qquad (1.66)$$

而整个渐近态空间就是 H_+。散射算子 $S=\Omega_-^{-1}\Omega_+$ 的形式是

$$S:\varphi(\cdot)\longmapsto S(\cdot)\varphi(\cdot),\quad S(\omega)=I-2\pi i\zeta_1(\omega)h_+(\omega)^{-1}\zeta(\omega),\qquad (1.67)$$

S 是 H_+ 到 H_+ 的酉算子。

此外，如果满足条件A，即当 $\eta=-1$ 时，有一正数列 $\{\varepsilon_n\}$，$\varepsilon_n\to 0$，使得 $h(\omega+i\varepsilon_n)^{-1}$，而且不管 $\eta=\pm1$，有数 r，有

$$1<r<\frac{2q}{q+2},$$

且

$$\sup_n\int\left(\|h(\omega+i\varepsilon_n)^{-1}\|^{\frac{2qr}{2q-qr-2r}}+\|h(\omega+i\varepsilon_n)^{-1}\|^r\right)d\omega<\infty,$$

那末 $H'_r=H_r$（当 $\eta=1$ 时，即 $H'_r=H$）。

证 分成七步来证明本定理。

(I) 关于$\Omega_\pm$的有界和保距性。简记 $h_\pm(\omega)^{-1}\zeta(\omega)$ 为 $L_\pm(\omega)$。令 $\mathscr{M}=\{\varphi|\varphi\in H_+,\ \mathrm{supp}\varphi$ 有界，$L_+\varphi\in L^{\frac{2q}{q-2}}(-\infty,\infty)\}$。由 (1.59) 可知，当 $\varphi\in H_+$ 时，$L_+\varphi\in L^r(-\infty,\infty)$，因此

$$\varphi\longmapsto\int L_+\varphi d\omega$$

是$H_+\to H_-$ 的有界线性算子。设 $\varphi\in\mathscr{M}$，那末

$$(\omega I-\mathrm{H}_-)L_+\varphi(\omega)\in L^{\frac{2q}{q-2}}(\sigma(\mathrm{H}_+);\ H_-),$$

且

$$Q(\omega I-\mathrm{H}_-)L_+\varphi=(\omega I-\mathrm{H}_-)Q_-L_+\varphi-\frac{1}{2\pi i}\int L_+\varphi d\omega.\qquad (1.68)$$

由于 $h_+L_+=\zeta$，所以

$$Q_-(h_+-\omega I+\mathrm{H}_-)L_+\varphi=Q_-\zeta\varphi-Q_-(\omega I-\mathrm{H}_-)L_+\varphi.\qquad (1.69)$$

由 (1.68—1.69) 以及 Q_- 的"自共轭"性得到

$$
\begin{aligned}
&I_m[Q_-(h_+ - \omega I + \mathrm{H}_-)L_+\varphi,\ L_+\varphi] \\
&\quad = I_m[Q_-\zeta\varphi,\ L_+\varphi] - I_m[Q_-(\omega I - \mathrm{H}_-)L_+\varphi,\ L_+\varphi] \\
&\quad = I_m[Q_-\zeta\varphi,\ L_+\varphi] - \frac{1}{4\pi}\left\|\int L_+\varphi(\omega)d\omega\right\|^2.
\end{aligned}
\tag{1.70}
$$

由于 $Q_+L_+\varphi$ 是上半开平面上 $H^{\frac{2q}{q-2}}$ 类函数的境界值函数，由 (1.57) 和条件 (1.56)，$h_+ - \omega I + \mathrm{H}_- = 2\pi i Q_+\zeta\zeta_1$ 也是上半开平面上 $H^{\frac{q}{2}}$ 类中函数的境界值函数，所以 $f = (h_+ - \omega I + \mathrm{H}_-)$ 是 $H^{\frac{2q}{q+2}}$类中函数境界值函数。由于 $\frac{2q}{q+2} > 1$，利用 $H^{\frac{2q}{q+2}}$ 类函数的 Cauchy 积分公式得到

$$
Q_-(h_+ - \omega I + \mathrm{H}_-)Q_+L_+\varphi = -\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\omega_1)d\omega_1}{\omega_1 - (\omega - i0)} = 0.
\tag{1.71}
$$

合并 (1.70—1.71) 并利用 $Q_+ + Q_- = I$，立即得到

$$
\begin{aligned}
I_m[Q_-(h_+ - \omega I + \mathrm{H}_-)Q_-L_+\varphi,\ L_+\varphi] &= I_m[Q_-\zeta\varphi,\ L_+\varphi] \\
&\quad - \frac{1}{4\pi}\left\|\int L_+\varphi d\omega\right\|^2.
\end{aligned}
\tag{1.72}
$$

类似于上述讨论可知，

$$
(h_+ - \omega I + \mathrm{H}_-)Q_-L_+\varphi \in L^{\frac{2q}{q+2}}(-\infty,\infty),
$$

利用 Q_- 的"自共轭"性以及 (1.58) 又得到

$$
\begin{aligned}
&I_m[Q_-(h_+ - \omega I + \mathrm{H}_-)Q_-L_+\varphi,\ L_+\varphi] \\
&\quad = I_m[(h_+ - \omega I + \mathrm{H}_-)Q_-L_+\varphi,\ Q_-L_+\varphi] \\
&\quad = \frac{1}{2i}[\{(h_+ - \omega I + \mathrm{H}_-) - (h_- - \omega I \\
&\qquad + \mathrm{H}_-)\}Q_-L_+\varphi,\ Q_-L_+\varphi] \\
&\quad = \eta\pi\|\zeta_1 Q_-L_+\varphi\|^2.
\end{aligned}
\tag{1.73}
$$

合并 (1.72—1.73)，当 $\varphi \in \mathscr{M}$ 时，由Ω_+的定义 (1.61) 得到

$$
\|\Omega_+\varphi\|^2 = \left\|\int L_+\varphi d\omega\right\|^2 + \|\varphi\|^2 - 2Re[2\pi i
$$

$$\times Q_-L_+\varphi,\ \varphi] + 4\pi^2\|\zeta_1 Q_- L_+\varphi\|^2$$

$$= \|\varphi\|^2 + (1-\eta)\left\|\int h_1^{-1}\zeta\varphi d\omega\right\|^2. \qquad (1.74)$$

再证 (1.74) 对 $\varphi \in H_+$ 也成立．任取 $\varphi \in H_+$，必有 $\varphi_n \in \mathscr{M}$，使得 $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$（事实上，只要取

$$\varphi_n(\omega) = \chi_{(-n,n)}(\omega)\varphi(\omega)\Big/\Big(1 + \frac{1}{n}\|L_+(\omega)\varphi(\omega)\|$$

$$+ \frac{1}{n}\|\varphi(\omega)\|\Big)$$

就可以了）．由于 (1.74) 成立，算子 $\Omega_+' = \Omega_+|_{\mathscr{M}}$ 在 $\mathscr{M}$ 上是有界的，所以 Ω_+' 可唯一地延拓成 H_+ 上有界线性算子，延拓后仍记为 Ω_+'，只要证明 $\Omega_+ = \Omega_+'$，就可知 Ω_+ 是有界的了，而且由于 (1.74) 右边也是 φ 的连续泛函，从而 (1.74) 对一切 $\varphi \in H_+$ 成立．为证

$$\Omega_+' = \Omega_+,$$

对 $\varphi \in H_+$，取 $\varphi_n \in \mathscr{M}$，使得 $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$．作

$$\mathscr{M}' = \{\phi \mid \zeta^*\phi \in L^{\frac{2q'}{q'-2}}(-\infty, \infty),\ \phi \in H_+\},$$

任取 $\phi \in \mathscr{M}'$，$\alpha \in H_-$，那末从 (1.60)，$L_+^* Q_- \zeta_1^* \phi \in L^2(-\infty, \infty)$，因此

$$\left[\Omega_+'\varphi, \begin{pmatrix}\alpha\\ \phi\end{pmatrix}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\Omega_+'\varphi_n, \begin{pmatrix}\alpha\\ \phi\end{pmatrix}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\{[\textstyle\int L_+\varphi_n d\omega,\ \alpha] + [\varphi_n,\ \phi]$$

$$- 2\pi i[\zeta_1 Q_- L_- \varphi_n,\ \phi]\}$$

$$= \left[\int L_+\varphi d\omega, \alpha\right] + [\varphi, \phi]$$

$$- 2\pi i[\varphi,\ L_+^* Q_- \zeta_1^* \phi].$$

然而 $[\varphi, L_+^* Q_- \zeta_1^* \phi] = [\zeta_1 Q_- L_+ \varphi, \phi]$，而且 $\overline{\mathscr{M}'} = H_+$，由此可知 $\Omega_+'\varphi = \Omega_+\varphi$，因此 Ω_+ 是有界算子，而且对一切 φ，(1.74) 成立．当 $\eta = 1$ 时，(1.74) 表明 Ω_+ 是保距算子；当 $\eta = -1$ 时，由

$$(\Omega_+\varphi, \Omega_+\varphi) = \|\Omega_+\varphi\|^2 - 2\left\|\int h_+^{-1}\zeta\varphi d\omega\right\|^2$$

立即可知 $(\Omega_+\varphi, \Omega_+\varphi) = \|\varphi\|^2$，即 Ω_+ 是保持度规不变的．对 Ω_-

可一样讨论。

(II) 令 $G_\pm = \Omega_\pm H_+$，由 $\Omega_\pm$ 保持度规不变性立即知道，$\Omega_\pm$ 是 H_+ 到 $G_\pm$ 上的酉算子. 当 $\eta = -1$ 时,因为 $G_\pm$ 是 Hilbert 空间 $(H_+, [\cdot, \cdot])$ 经保距算子 $\Omega_\pm$ 映射后的像，所以 $(G_\pm, (\cdot, \cdot))$ 是 Hilbert 空间,并且易知 $G_\pm$ 在 $(H, (\cdot, \cdot))$ 上闭包 $\bar{G}_\pm$ 中必不含非零零性向量（事实上，如果有非零零性向量 $z \in \bar{G}_\pm$，必存在 $y_n \in G_\pm$，使得 $(y_n - z, y_n - z) \to 0$，从而 $\{y_n\}$ 按 $(\cdot, \cdot)$ 为基本的;但 $\Omega_\pm$ 是保距的,并且是单射,所以 $\Omega_\pm^{-1} y_n$ 成为 $(H_+[\cdot, \cdot])$ 上基本列点,从而存在极限 $x_0 \in H_+$，因而

$$(y_n - \Omega_\pm x_0, \ y_n - \Omega_\pm x_0) = (\Omega_\pm(\Omega_\pm^{-1} y_n - x_0), \\ \Omega_\pm(\Omega_\pm^{-1} y_n - x_0)) \to 0.$$

由于 $y_n \to z$，所以 $(y_n, y_n) \to (z, z) = 0$，从而 $\Omega_\pm^{-1} y_n \to 0$，再根据 $\Omega_\pm$ 的连续性可知，$y_n = \Omega_\pm(\Omega_\pm^{-1} y_n) \to 0$，显然这与假设 $y_n \to z \neq 0$ 相矛盾）.根据第一章 § 3 引理 3.16,$G_\pm$ 是$(H,(\cdot,\cdot))$ 上完备子空间,所以相应于 $G_\pm$ 有投影算子 $P_{G\pm}$. 显然,

$$\Omega_\pm^\dagger \Omega_\pm = I_{H_+}, \quad \Omega_\pm \Omega_\pm^\dagger = P_{G\pm}. \tag{1.75}$$

以后将证明 $G_\pm = H_r'$.

另外,可仿本节的第 2 小节的证明方法可以证明 (1.62) 式.

(III) 今证

$$\mathbf{H}\Omega_\pm \supset \Omega_\pm \mathbf{H}_+. \tag{1.76}$$

任取 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{H}_+)$，由 $\varphi \in H_+$，$\omega\varphi \in H_+$，易知函数

$$\begin{aligned} \omega P_+ \Omega_+ \varphi &= \omega(\varphi - 2\pi i \zeta_1 Q_- L_+ \varphi) \\ &= \omega\varphi - 2\pi i \zeta_1 Q_- L_+ \omega\varphi - \zeta_1 \int L_+ \varphi d\omega \\ &= P_+ \Omega_+ \omega\varphi - \zeta_1 \int L_+ \varphi d\omega \end{aligned} \tag{1.77}$$

属于 $L^2(-\infty, \infty)$，所以 $P_+ \Omega_+ \varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{H}_+)$，因此 $\Omega_+ \varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{H})$.
又由 (1.77) 及 (1.61) 立即可知

$$\mathbf{H}\Omega_+ \varphi = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_- \int L_+ \varphi d\omega + \int \zeta \varphi d\omega - 2\pi i \int \zeta \zeta_1 Q_- L_+ \varphi d\omega \\ P_+ \Omega_+ \omega\varphi \end{pmatrix},$$

然而

$$\mathbf{H}_-\int L_+\varphi d\omega+\int\zeta\varphi d\omega-2\pi i\int\zeta\zeta_1 Q_-L_+\varphi d\omega$$

$$=\int(\mathbf{H}_-L_+\varphi+\zeta\varphi-2\pi i(Q_+\zeta\zeta_1)L_+\varphi)d\omega.$$

利用

$$h_+=\omega I-\mathbf{H}_-+2\pi iQ_+\zeta\zeta_1,$$

即知

$$P_-\mathbf{H}\Omega_+\varphi=\int[(\omega I-h_+)L_+\varphi+\zeta\varphi]d\omega$$

$$=\int L_+\omega\varphi d\omega,$$

这样就有

$$\mathbf{H}\Omega_+\varphi=\Omega_+\mathbf{H}_+\varphi,\quad \varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{H}_+),$$

立即得到 (1.76). 由于

$$\|(\lambda I-\mathbf{H}_-)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{|I_m\lambda|},$$

且 Γ 是有界算子,因此,当 $|I_m\lambda|$ 充分大时,

$$(\lambda I-\mathbf{H})=(\lambda I-\mathbf{H}_1)\left(I-(\lambda I-\mathbf{H}_1)^{-1}\begin{pmatrix}O&\Gamma\\ \Gamma_1&O\end{pmatrix}\right)$$

具有有界的逆算子 $(\lambda I-\mathbf{H})^{-1}$. 又由 (1.76), 有

$$(\lambda I-\mathbf{H})\Omega_\pm\supset\Omega_\pm(\lambda I-H_+),$$

因此当 $|I_m\lambda|$ 充分大时,

$$\Omega_\pm(\lambda I-\mathbf{H}_+)^{-1}\supset(\lambda I-\mathbf{H})^{-1}\Omega_\pm,$$

然而上式两边都是有界算子,因此

$$\Omega_\pm(\lambda I-\mathbf{H}_+)^{-1}=(\lambda I-\mathbf{H})^{-1}\Omega_\pm.$$

由此得到 $\Omega_\pm(\lambda I-\mathbf{H}_+)=(\lambda I-\mathbf{H})\Omega_\pm$, 因此

$$\Omega_\pm\mathbf{H}_+=\mathbf{H}\Omega_+.\tag{1.78}$$

所以,只要证明 $H_r'=\Omega_\pm H_+$ 就得到 (1.64) 了.

(IV) 今证 $H_r'=\Omega_\pm H_+$. 由 (1.78), 当 λ 是非实数时,

$$(\lambda I-\mathbf{H})\Omega_\pm(\lambda I-\mathbf{H}_+)^{-1}=\Omega_\pm,$$

因此对任何向量 $x = \Omega_\pm\varphi$, $\varphi \in H_+$, 有预解式

$$x(\lambda) = \Omega_\pm(\lambda I - \mathbf{H}_+)^{-1}\varphi.$$

由于 $(\lambda I - \mathbf{H}_+)^{-1}\varphi \in C$, 易知 $\Omega_\pm(\lambda I - \mathbf{H}_+)^{-1}\varphi \in C$, 立即得到 $x = \Omega_\pm\varphi \in H'_r$, 所以 $G_\pm = \Omega_\pm H_+ \subset H'_r$.

再证 $H'_r \subset \Omega_\pm H_r$. 任取 $v \in H'_r$, 则由 $\Omega_+\Omega_+^\dagger v \in H'_r$ 可知,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} = (I - \Omega_+\Omega_+^\dagger)v \in H'_r, \tag{1.79}$$

再由 (1.75) 可知

$$\Omega_+^\dagger \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} = 0. \tag{1.80}$$

由上式和 $\Omega_+^\dagger$ 的表达式 (1.62) 得到

$$\varphi(\omega) - \zeta_1(\omega)h_-(\omega)^{-1}\left[\alpha + \int_{\sigma(\mathbf{H}_+)} \frac{\zeta(\omega_1)\varphi(\omega_1)}{\omega - (\omega_1 + i0)}\, d\omega_1\right] = 0,$$

$$\omega \in \sigma(\mathbf{H}_+). \tag{1.81}$$

令

$$\Phi(\lambda) = \alpha + \int_{\sigma(\mathbf{H}_+)} \frac{\zeta(\omega_1)\varphi(\omega_1)}{\lambda - \omega_1}\, d\omega_1,$$

并用 $2\pi i\zeta(\omega)$ 左乘 (1.81) 两边,有

$$\Phi_-(\omega) - \Phi_+(\omega) + (h_+(\omega) - h_-(\omega))h_-(\omega)^{-1}\Phi_-(\omega) = 0,$$

即

$$h_+(\omega)^{-1}\Phi_+(\omega) = h_-(\omega)^{-1}\Phi_-(\omega), \omega \in \sigma(\mathbf{H}_+). \tag{1.82}$$

另一方面,从 (1.79) 可知,有解析函数 $\begin{pmatrix} \beta(\cdot) \\ y(\cdot) \end{pmatrix} \in C$, 使得

$$(\lambda I - \mathbf{H}) \begin{pmatrix} \beta(\lambda) \\ y(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix},$$

根据第 2 小节 (1.4—1.8) 的算法可得

$$h(\lambda)\beta(\lambda) = \Phi(\lambda). \tag{1.83}$$

任取 $a \in H_-$, 由上式我们得到

$$[\beta(\lambda), a] = [\Phi(\lambda), h(\lambda)^{-1*}a],$$

令 $\lambda \to \omega \pm i0$, 得到

$$\lim_{\lambda\to\omega\pm i0}[\beta(\lambda),\ a]=[\Phi_\pm(\omega),\ h_\pm(\omega)^{-1*}a]$$
$$=[h_\pm(\omega)^{-1}\Phi_\pm(\omega),\ a],$$

即 $h_\pm(\omega)\beta_\pm(\omega)=\Phi_\pm(\omega)$. 再结合 (1.82) 就得知，当 $\omega\in\sigma(\mathrm{H}_+)$ 时，几乎处处成立

$$\lim_{\lambda\to\omega+i0}[\beta(\lambda),\ a]=\lim_{\lambda\to\omega-i0}[\beta(\lambda),\ a].$$

然而，当 ω 是 $\sigma(\mathrm{H}_+)$ 外的实数时，$h(\omega)^{-1}$ 存在，所以 ω 是 $\beta(\cdot)$ 的正则点。因此，对几乎所有的实数 ω, $\beta_+(\omega;a)=\beta_-(\omega;a)$, 这里

$$\beta_\pm(\omega;\ a)=\lim_{\lambda\to\omega\pm i0}[\beta(\lambda),\ a],$$

由于 $\beta(\cdot)\in C$, 有函数 $f_a(\cdot)\in L^1(-\infty,\infty)$, 使得

$$[\beta(\lambda),\ a]=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f_a(\omega)}{\omega-\lambda}d\omega,$$

因此 $\beta_+(\omega;a)-\beta_-(\omega;a)=f_a(\omega)$, 由此立即可知 $f_a(\omega)=0$, 从而 $\beta(z)\equiv0$, 即 $\Phi(z)\equiv0$. 再将此事实代入 (1.81), 立即得 $\varphi=0,\alpha=0$. 再从 (1.79) 得到 $v=\Omega_+\Omega_+^\dagger v\in\Omega_+H_+$, 因此

$$H_r'\subset\Omega_+H_+.$$

类似地讨论 Ω_-, 则可有 $\Omega_\pm H_+=H_r'$.

(V) 设条件 A 被满足，现证 $H_r=H_{r'}$ (当 $\eta=1$ 时，即 $H=H_r'$). 和 (IV) 情况相仿，但任取 $v\in H_r$, 这时

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \varphi\end{pmatrix}=(I-\Omega_+\Omega_+^\dagger)v\in H_r,$$

易知 (1.83) 成立。关键在于证明 $\beta(\cdot)\in C$. 只要证明了这一点，就仍有

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \varphi\end{pmatrix}=0,$$

而 $v\in\Omega_+H$, 即 $H_r=H_r'$. 下面证 $\beta(\cdot)\in C$.

由于 $\zeta\in L^{q/2}(-\infty,\infty)$, 所以

$$h(\lambda)-\lambda I+\mathrm{H}_-=\int\frac{\zeta(\omega)\zeta_1(\omega)}{\omega-\lambda}d\omega$$

属于 $H^{q/2}$, 因此由 $H^{q/2}$ 的性质 (见 Hoffman 的 [1], p 125), 对任

何 $\delta > 0$,

$$\lim_{|I_m\lambda|\geq\delta,\lambda\to\infty} \|h(\lambda)-\lambda I+\mathrm{H}_-\|=0,$$

因此有正数 R_δ, 使得当 λ 在集

$$D_\delta=\{\lambda\,|\,|I_m\lambda|\geq\delta,\ |Re\lambda|\geq R_\delta \text{ 或 } |I_m\lambda|\geq R_\delta\}$$

中时, $h(\lambda)^{-1}$ 存在而且

$$A_\delta=\sup_{\lambda\in D_\delta}\|\lambda h(\lambda)^{-1}\|<\infty.$$

然而 $\zeta\varphi\in L^{\frac{2q}{q+2}}(-\infty,\infty)$, 所以 $\Phi(z)-\alpha\in H^{\frac{2q}{q+2}}$, 因此根据 Hoffman[1] 的 p.122 的方法可以证得

$$B_\delta=\sup_{|I_m\lambda|\geq\delta}\|\Phi(\lambda)\|<\infty.$$

这样, 当 $|y|\geq\delta$ 时, 由 (1.83) 得到

$$\int_{x+iy\in D_\delta}\|\beta(x+iy)\|^r dx=\int_{x+iy\in D_\delta}\|h(x+iy)^{-1}\Phi(x+iy)\|^r dx\leq A_\delta^r B_\delta^r\int_{x+iy\in D_\delta}\frac{1}{|x+iy|^r}dx$$

$$\leq C_r\frac{A_\delta^r B_\delta^r}{|y|^{r-1}}. \tag{1.84}$$

此处 C_r 是仅与 r 有关的常数. 由于条件 A 成立, 就有

$$\sup_n\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\|\beta(x+i\varepsilon_n)\|^r dx\right\}^{\frac{1}{r}}$$

$$\leq\sup_n\left(\int_{-\infty}^{\infty}\|h(x+i\varepsilon_n)^{-1}\|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}\|\alpha\|$$

$$+\sup_n\left(\int_{-\infty}^{\infty}\|h(x+i\varepsilon_n)^{-1}\|^{\frac{2rq}{2q-r(2+q)}}dx\right)^{\frac{2q-(2+q)r}{2qr}}$$

$$\times\left(\int_{-\infty}^{\infty}\|\Phi(x+iy)-\alpha\|^{\frac{2q}{q+2}}dx\right)^{\frac{q+2}{2q}}<\infty;$$

再用 Hoffman 文献 [1] p.125 的方法, 由上式及 (1.84) 先得到 $|I_m\lambda|\geq\delta$ 中当 $|\lambda|\to\infty$ 时 $\beta(\lambda)$ 一致趋于 0, 再利用 Hoffman 文献 [1] p. 127, 128 的方法就得到 $\beta(\cdot)\in H^r\subset C$. 其余就和 (IV) 相仿, 可得 $H_r=H_r'$.

(VI) 证明 (1.65), (1.66). 由 (1.64) 可知, 只需证当 $\varphi\in H_+$

时，

$$\lim_{t\to\mp\infty}\|(\Omega_\pm - I)V_0(t)\varphi\| = 0. \tag{1.85}$$

今以 $t\to-\infty$ 为例来证. 由 (1.61)，当 $\varphi\in H_+$ 时，

$$(\Omega_+ - I)V_0(t)\varphi = \begin{pmatrix}\int_{\sigma(\mathbf{H}_+)} e^{-i\omega t}L_+(\omega)\varphi(\omega)d\omega \\ -2\pi i\zeta_1 Q_- L_+ e^{-i\omega t}\varphi\end{pmatrix},$$

由 Riemann-Lebesgue 引理，从 $L_+\varphi\in L^1(-\infty,\infty)$ 易知，

$$\lim_{t\to-\infty}\left\|\int_{\sigma(\mathbf{H}_+)} e^{-i\omega t}L_+(\omega)\varphi(\omega)d\omega\right\| = 0;$$

不容易算出

$$Q_-(\psi e^{-i\omega t}) = e^{-i\omega t}\mathscr{F}^{-1}P_{(-t,\infty)}\mathscr{F}(\psi).$$

当 $\varphi\in\mathscr{M}$ 时，从 $L_+\varphi\in L^{\frac{2q}{q-2}}(-\infty,\infty)$ 得 $\mathscr{F}(L_+\varphi)\in L^{\frac{2q}{q+2}}$，所以

$$\lim_{t\to-\infty}\|P_{(-t,\infty)}\mathscr{F}(L_+\varphi)\| = 0$$

(按 $L^{\frac{2q}{q+2}}(-\infty,\infty)$ 范数). 因为

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{t\to-\infty}}\|-2\pi i\zeta_1 Q_- L_+ e^{-i\omega t}\varphi\| \\
&\leqslant 2\pi\,\overline{\lim_{t\to-\infty}}\|\zeta\|_{L^q}\|\mathscr{F}P_{(-t,\infty)}\mathscr{F}(L_+\varphi)\|_{L^{\frac{2q}{q-2}}} \\
&\leqslant 2\pi c\|\zeta\|_{L^q}\,\overline{\lim_{t\to-\infty}}\|P_{(-t,\infty)}\mathscr{F}(L_+\varphi)\|_{L^{\frac{2q}{q-2}}} = 0,
\end{aligned}$$

所以在 $\varphi\in\mathscr{M}$ 时，(1.85) 成立. 然而由于

$$\|(\Omega_\pm - I)V_0(t)\| \leqslant 1 + \|\Omega_\pm\|$$

是一致有界的，$\overline{\mathscr{M}} = H_+$，所以 (1.85) 对一切 $\varphi\in H_+$ 成立. 这样，就证得 (1.65). (1.66) 是 (1.63) 和 (1.65)的推论.

(VII) 证明散射算子的形式为 (1.67). 显然，只要证明由 (1.67) 定义的 S 满足 $\Omega_- S = \Omega_+$ 即可.

由于 (1.67) 中的 $S(\omega)$ 具有下列性质:

$$\begin{aligned}
\zeta(\omega)S(\omega) &= (I - 2\pi i\zeta(\omega)\zeta_1(\omega)h_+(\omega)^{-1})\zeta(\omega) \\
&= [I - (h_+(\omega) - h_-(\omega))h_+(\omega)^{-1}]\zeta(\omega) \\
&= h_-(\omega)h_+(\omega)^{-1}\zeta(\omega),
\end{aligned} \tag{1.86}$$

因此 S 满足 $L_-S = L_+$，所以

$$Q_-S\varphi = \begin{pmatrix} \int L_+\varphi d\omega \\ S\varphi + 2\pi i\zeta_1 Q_+L_+\varphi \end{pmatrix}.$$

但是，

$$\begin{aligned} S\varphi + 2\pi i\zeta_1 Q_+L_+\varphi &= S\varphi + 2\pi i\zeta_1 L_+\varphi - 2\pi i\zeta_1 Q_-L_+\varphi \\ &= \varphi - 2\pi i\zeta_1 Q_-L_+\varphi, \end{aligned}$$

所以有 $Q_-S = Q_+$.

至于 S 的酉性可以仿第 2 小节进行直接计算，并可从

$$S = Q_-^{-1}Q_+$$

推出．证毕．

我们曾分析过，当 $\mathbf{H}$ 形如 (1.51)，又 $Q_\pm$ 满足 (1.49) 时，由 $\mathbf{H}$ 的基本形式可以定出 $Q_\pm$ 的形式 (1.61)．利用第 2 小节的方法经过直接计算可以得到 H_- 到 H_r' 的投影算子 P_r 的表达式．

推论 1.2 $P_r = Q_+Q_+^\dagger = Q_-Q_-^\dagger$ 具有下列表达式：

$$P_r\begin{pmatrix}\alpha \\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\sigma(\mathbf{H}_+)} [(h_-(\omega)^{-1} - h_+(\omega)^{-1})\alpha + Q(\omega)\zeta(\omega)\varphi(\omega)]d\omega \\ \varphi(\omega) + \zeta_1(\omega)\int_{\sigma(\mathbf{H}_+)}\left[\frac{Q(\omega_1) - Q(\omega)}{\omega_1 - \omega}\zeta(\omega_1)\varphi(\omega_1) \right. \\ \left. + Q(\omega_1)\alpha\right]d\omega_1 \end{pmatrix},$$

其中 $Q(\omega) = (Q_+h_-^{-1})(\omega) - (Q_-h_+^{-1})(\omega)$.

下面对定理 1.1 中的某些条件作一定的说明．

当 $\sup_\omega\|\zeta(\omega)\| < \infty$，$\sup_\omega\|h_\pm(\omega)^{-1}\zeta(\omega)\| < \infty$ 成立时，只要 (1.57) 中积分有意义并满足 (1.59)，则定理 1.1 的结论就成立．当然，对现有的定理 1.1 中的条件 (1.56) 和 (1.60) 是否可以去掉，尚不知道．另外，定理 1.1 中假设“对 $\sigma(\mathbf{H}_+)$ 外的实数 ω，$h(\omega)^{-1}$ 存在”这个条件是不能除去的．例如，当 $\zeta = 0$，$H_- = L^2(\sigma(\mathbf{H}_-))$，又设 $(\mathbf{H}_-\phi)(\omega) = \omega\phi(\omega)$，$\phi \in L^2(\sigma(\mathbf{H}_-))$．那末，

$$h(\lambda) = \lambda I - \mathbf{H}_-,$$

而当 $\lambda \in \sigma(\mathbf{H}_-)$ 时，$h(\omega)^{-1}$ 不存在；但是当 $\omega \in \sigma(\mathbf{H}_+)$ 时，$h(\omega)^{-1}$ 存在，而且定理 1.1 中其余条件都满足，然而这时 $Q_\pm = P_+$，因此

$$H'_r \neq \Omega_\pm H_+.$$

所以，定理 1.1 并不包括这样的简单情况，因为这时渐近态空间为整个 H，所以要讨论渐近态为 H 的情况。这将放在第 6 小节讨论。

另一个在数学上比较简洁的特殊情况，是当 $\zeta(\omega)$ 与 ω 无关而且 $\sigma(\mathbf{H}_+)=(-\infty,\infty)$ 时的情况. 这时仍记 $\zeta(\omega)$ 为 ζ，并假设它是有界算子（Γ 仍是无界的），这时 (1.55)，(1.56) 并不满足，然而仍再假设 (1.57) 中积分按 Cauchy 意义是存在的，而且

$$h(\lambda)=\begin{cases}\lambda I-\mathbf{H}_-+\pi i\zeta\zeta_1, & I_m\lambda>0\\ \lambda I-\mathbf{H}_--\pi i\zeta\zeta_1, & I_m\lambda<0\end{cases}$$

这时只要定理 1.1 中条件满足，即对实数 ω，$h(\omega)^{-1}$ 存在而且 (1.59)，(1.60) 满足，那末定理 1.1 的结论仍成立（只要对定理 1.1 的证明作小的改动即知）. 如记 $S(\omega)$ 为 $S_{(\eta)}(\omega)$，则

$$\begin{aligned}S_{(1)}(\omega)&=I-2\pi i\zeta^*(\omega I-\mathbf{H}_-+\pi i\zeta\zeta^*)^{-1}\zeta,\\ S_{(-1)}(\omega)&=I+2\pi i(\omega I-\mathbf{H}_--\pi i\zeta\zeta^*)^{-1}\zeta,\end{aligned}\tag{1.87}$$

因此 $S_{(1)}(\omega)=S_{(-1)}(\omega)^*$. 这时散射阵函数相应于 Лившиц 所引进的关于非自共轭算子 $\mathbf{H}_-\pm\pi i\zeta\zeta^*$ 的特征阵函数（见 Бродский 和 Лившиц 文献[1]）.

特别，当 $\eta=1$ 时，记

$$\mathscr{H}_\pm=\mathbf{H}_-\mp\pi i\zeta\zeta^*,\tag{1.88}$$

那末 (1.87) 可写成

$$S(\omega)=I-2\pi i\zeta^*(\omega I-\mathscr{H}_+)^{-1}\zeta.\tag{1.89}$$

在这种特殊情况下，Лившиц（[1]，[2]）所得的关于中间系统的散射阵公式与 (1.89) 一致. 但这种情况在物理上难以出现，因为它要求 $\mathbf{H}_+$ 的谱充满全直线. 然而一般说来，作为能量，$\mathbf{H}_+$ 是下半有界的. 但当 $\sigma(\mathbf{H}_+)\neq(-\infty,\infty)$ 时，如果我们取 H_+ 为 $L^2(-\infty,\infty)$，令 $H'_+=P_{\sigma(\mathbf{H}_+)}H_+$（此处是乘以集 $\sigma(\mathbf{H}_+)$ 上特征函数所相应的投影算子），那末物理上要求的渐近态空间即为 H'_+，而真实的物理态空间就是 $\Omega_\pm H'_+$. 易知这时 $\Omega_+H'_+=\Omega_-H'_+$，而真实的 Hamilton 算子应为 $\mathbf{H}|_{\Omega_+H'_+}$. 这样的模型有可能近似

于某种真实的物理过程。

下面再回过来讨论一般情况。当 $\eta=1$ 时，记

$$\mathscr{H}_{\pm}(\omega)=\mathrm{H}_{-}\mp\pi i\zeta(\omega)\zeta^{*}(\omega)+\int'\frac{\zeta(\omega_1)\zeta(\omega_1)^{*}d\omega_1}{\omega-\omega_1}^{1)},\quad(1.90)$$

那末 $h_{+}(\omega)=\omega I-\mathscr{H}_{+}(\omega)$，根据定理 1.1，应有

$$S(\omega)=I-2\pi i\zeta(\omega)^{*}(\omega I-\mathscr{H}_{+}(\omega))^{-1}\zeta(\omega),\quad(1.91)$$

散射算子的形式(1.91)是 Лившиц 公式(见 Лившиц 文献[1]，Бродский 和 Лившиц 文献[1])的改正和推广。

再考察中间系统的态向量随时间变化的情况。设 $f\in H_{-}$，如果中间系统在 $t=0$ 时处于状态 f，在时刻 t 的态向量为 T_tf，那末 T_tf 应为

$$T_tf=P_{-}e^{-it\mathrm{H}}\begin{pmatrix}f\\O\end{pmatrix}.\quad(1.92)$$

利用类似于(1.8)，(1.11)或(1.53)式可得

$$T_tf=-\frac{1}{2\pi i}\int e^{-i(\omega+i\varepsilon)t}h(\omega+i\varepsilon)^{-1}fd\omega,\quad t\geq 0,\quad(1.93)$$

$$T_tf=\frac{1}{2\pi i}\int e^{-i(\omega-i\varepsilon)t}h(\omega-i\varepsilon)^{-1}fd\omega,\quad t<0,\quad(1.94)$$

其中 ε 是任一正数。特别当 $\zeta(\omega)\equiv\zeta$，$\sigma(\mathrm{H}_{+})=(-\infty,\infty)$ 时可得

$$T_tf=e^{-i\mathscr{H}_{\pm}t},\quad t\gtrless 0.\quad(1.95)$$

推论 1.3 在定理 1.1 的假设下，对一切 $f\in H_{-}$，

$$\lim_{t\to\pm\infty}\|T_tf\|=0.\quad(1.96)$$

证 从(1.92)得到

$$\|T_tf\|^2=\|e^{it\mathrm{H}}\begin{pmatrix}f\\0\end{pmatrix}\|^2-\|P_{+}e^{-it\mathrm{H}}\begin{pmatrix}f\\0\end{pmatrix}\|^2$$

$$=\|f\|^2-\|e^{-it\mathrm{H}_{+}}P_{+}e^{-it\mathrm{H}}\begin{pmatrix}f\\0\end{pmatrix}\|^2.$$

1) $\int'$ 表示 Cauchy 主值积分。

在上式中令 $t\to\pm\infty$，由于

$$\Omega_{\pm}^{*}=\lim_{t\to\pm\infty}P_{+}e^{-it\mathbf{H}_{+}}e^{it\mathbf{H}},$$

所以

$$\lim_{t\to\pm\infty}\|T_{t}f\|^{2}=\|f\|^{2}-\left\|\Omega_{\mp}^{*}\begin{pmatrix}f\\0\end{pmatrix}\right\|^{2}=0.$$

证毕.

(1.96)的物理意义是参加散射过程的中间系统在作用前不存在，而作用后全部衰变掉．这是非弹性散射的特点.

下面作为例子，考察只有有限个通道的情况(但 $\eta=\pm1$)，即假设一切 $\zeta(\omega)$ 的值域张成的空间 ε 是有限维的，为方便起见，仅考察离散谱的情况．令 Q 为 H_{-} 到 ε 的投影算子，作矩阵函数

$$\Xi(\lambda)=Q(\mathbf{H}_{-}-\lambda I)^{-1}Q;$$

又因为 $\zeta(\omega)\zeta_{1}(\omega)$ 可以视为 ε 到 ε 的算子(因而是有限阶方阵)，作矩阵值函数

$$Z(\lambda)=\int\frac{\zeta(\omega)\zeta_{1}(\omega)}{\omega-\lambda}\,d\omega.$$

记 $h_{+}(\omega)^{-1}\zeta(\omega)$ 为 $\varphi(\omega)$，那末方程 $h_{+}(\omega)\varphi(\omega)=\zeta(\omega)$ 可写成

$$(\omega I-\mathbf{H}_{-}+QZ_{+}(\omega)Q)\varphi(\omega)=\zeta(\omega).$$

当 $\omega\bar{\in}\sigma_{p}(\mathbf{H}_{-})$ 时，由上式解得

$$\varphi(\omega)=(\omega I-\mathbf{H}_{-})^{-1}\zeta(\omega)-(\omega I-\mathbf{H}_{-})^{-1}QZ_{+}(\omega)Q\varphi(\omega).$$

用 Q 左乘上式两边，即得

$$Q\varphi(\omega)=-(I-\Xi(\omega)Z_{+}(\omega))^{-1}\Xi(\omega)\zeta(\omega),$$

因此

$$S(\omega)=I+2\pi i\zeta(\omega)^{*}(I-\Xi(\omega)Z_{+}(\omega))^{-1}\Xi(\omega)\zeta(\omega).\quad(1.97)$$

当 $a\perp\zeta(\omega)^{*}\varepsilon$ 时，由上式易知 $S(\omega)a=a$．因此，只要考察 $S(\omega)\zeta(\omega)^{*}$ 就可以了．由(1.97)容易算得

$$S(\omega)\zeta(\omega)^{*}=\zeta(\omega)^{*}\hat{S}(\omega),\quad(1.98)$$

$$\hat{S}(\omega)=(I-\Xi(\omega)Z_{+}(\omega))^{-1}(I-\Xi(\omega)Z_{-}(\omega)),\quad(1.99)$$

$\hat{S}(\omega)$ 是 ε 空间上散射阵．由于当 ω 不是 $\mathbf{H}_-$ 的谱点时，$\Xi(\omega)$ 是自共轭阵，由此易知 $\hat{S}(\omega)$ 是酉阵；当 ω 是 $\mathbf{H}_-$ 的特征值而且 $Z_+(\omega)^{-1}$ 存在时，$\hat{S}(\omega)=Z_+(\omega)^{-1}Z(\omega)$．当 $\eta=1$ 时，(1.99) 类似于著名的 Wigner-Eisenbud 公式(见 Бродский 和 Лившиц 文献[1])．

6. 渐近态空间为 H 的情况　记 $\sigma(\mathbf{H}_\pm)=\sigma_\pm$．在这一小节中我们对 $\mathbf{H}_\pm$ 将作如下假设：设 $H_\pm$ 是 $\sigma_\pm$ 上取值于可析 Hilbert 空间 $\varepsilon_\pm$ 上强可测平方可积函数全体所成的 Hilbert 空间 $L^2(\sigma_\pm;\varepsilon_\pm)$，$(\mathbf{H}_\pm f)(\omega)=\omega f(\omega), f\in H_\pm$．又设有辅助的可析 Hilbert 空间 ε，以及 $\sigma_\pm$ 上取值为 $\varepsilon_\pm$ 到 ε 的有界线性算子值函数 $\mu(\omega)$，$\nu(\omega)$，而

$$\int_{\sigma_+}\|\mu(\omega)\|^2 d\omega<\infty,\quad \int_{\sigma_-}\|\nu(\omega)\|^2 d\omega<\infty,\tag{1.100}$$

使当 $\varphi\in H_+$ 时，

$$(P\varphi)(\omega)=\nu(\omega)^*\int_{\sigma_+}\mu(\omega_1)\varphi(\omega_1)d\omega_1.\tag{1.101}$$

这里实质上是假定 $\mathbf{H}_\pm$ 的谱具有某种连续性（不考虑束缚态情况）．

作 $\varepsilon_-\oplus\varepsilon_+$ 和 $\varepsilon\oplus\varepsilon$ 上矩阵

$$\zeta(\omega)=\begin{pmatrix}\nu(\omega) & 0\\ 0 & \mu(\omega)\end{pmatrix},\quad \zeta_1(\omega)=\begin{pmatrix}\nu(\omega)^* & 0\\ 0 & \mu_1(\omega)\end{pmatrix},$$

这里 $\mu_1(\omega)=\mu(\omega)^*\eta$．又作算子值解析函数

$$Z(\lambda)=\int\frac{\mu(\omega)\mu_1(\omega)}{\omega-\lambda}d\omega,\ (I_m\lambda\neq 0)$$

$$\Xi(\lambda)=\int\frac{\nu(\omega)\nu(\omega)^*}{\omega-\lambda}d\omega,$$

这两个函数定义在上、下开半平面上．再作算子值解析函数

$$g(\lambda)=\begin{pmatrix}\Xi(\lambda) & I\\ I & Z(\lambda)\end{pmatrix},$$

在渐近态空间是 H 的情况下，g 的作用和渐近态是 H_+ 的情况下 h 的作用一样，下面先给出 g 的三个性质．

引理 1.4　$g(\lambda)^{-1}$ 存在的充要条件是

$$\xi(\lambda) = (I - Z(\lambda)\Xi(\lambda))^{-1}$$

存在。当 $\xi(\lambda)$ 存在时，

$$g(\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} -\xi(\lambda)Z(\lambda) & \xi(\lambda) \\ \xi(\bar{\lambda})^* & -\Xi(\lambda)\xi(\lambda) \end{pmatrix}. \qquad (1.102)$$

证 先设 $\xi(\lambda)$ 存在，证 (1.102) 成立. 先注意等式

$$\begin{pmatrix} -\xi(\lambda)Z(\lambda) & \xi(\lambda) \\ \xi(\bar{\lambda})^* & -\Xi(\lambda)\xi(\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Xi(\lambda) & I \\ I & Z(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \xi(\lambda)(I - Z(\lambda)\Xi(\lambda)) & O \\ \xi(\bar{\lambda})^*\Xi(\lambda) - \Xi(\lambda)\xi(\lambda) & \xi(\bar{\lambda})^* - \Xi(\lambda)\xi(\lambda)Z(\lambda) \end{pmatrix}, \qquad (1.103)$$

并容易推出下面的关系式：当 $\xi(\lambda) = (I - Z(\lambda)\Xi(\lambda))^{-1}$ 存在时，

$$\xi(\bar{\lambda})^* = (I - \Xi(\lambda)Z(\lambda))^{-1}, \ \xi(\bar{\lambda})^*\Xi(\lambda) = \Xi(\lambda)\xi(\lambda),$$

$$I + \Xi(\lambda)\xi(\lambda)Z(\lambda) = \xi(\bar{\lambda})^*.$$

由此可知，(1.103) 右边是单位阵，所以 (1.102) 右边的阵是 $g(\lambda)$ 的左逆. 相仿可证它又是 $g(\lambda)$ 的右逆.

反之，如果 $g(\lambda)^{-1}$ 存在，那末对任一 $\varphi \in \mathfrak{s}$，有唯一 $\begin{pmatrix} \beta \\ \phi \end{pmatrix} \in \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{s}$，使得

$$\begin{pmatrix} \Xi(\lambda) & I \\ I & Z(\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix},$$

即 $\Xi(\lambda)\beta + \phi = 0, \beta + Z(\lambda)\phi = \varphi$. 因此，

$$(I - Z(\lambda)\Xi(\lambda))\beta = \varphi.$$

从而 $\mathscr{R}(I - Z(\lambda)\Xi(\lambda)) = \mathfrak{s}$. 如果又有 β_1，使得

$$(I - Z(\lambda)\Xi(\lambda))\beta_1 = \varphi,$$

那末令 $\phi_1 = -\Xi(\lambda)\beta_1$；此时

$$\begin{pmatrix} \Xi(\lambda) & I \\ I & Z(\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix}.$$

由于 $g(\lambda)^{-1}$ 存在，所以 $\beta_1 = \beta$. 因此 $(I - Z(\lambda)\Xi(\lambda))^{-1}$ 存在，且定义域是 $\mathfrak{s}$. 证毕.

今后还要用到 $g(\lambda)^{-1}$ 在实轴上的境界值.

引理 1.5 当 $\eta=1$ 时,设 $\int\nu(\omega)\nu^*(\omega)d\omega$ 具有有界逆,那末对非实数 λ, $g(\lambda)$ 必具有定义在 ε 上的有界逆.

证 首先证明当 $I_m\lambda\neq 0$ 时, $\Xi(\lambda)^{-1}$ 存在且有界. 作正算子 R,使得

$$R^2=\int\nu(\omega)\nu(\omega)^*d\omega.$$

因为假设 R^{-1} 有界,所以 $\varepsilon=R\varepsilon$. 作 σ_- 上半正算子值测度 τ 如下: 对任何 σ_+ 中 Borel 可测集 E,

$$\tau(E)=\int_E R^{-1}\nu(\omega)\nu(\omega)^*R^{-1}d\omega.$$

由 Наймарк 延拓定理, 必有 Hilbert 空间 ε_0 和 ε_0 到 ε 的投影算子 Q, ε_0 中谱测度 τ_0, 使得 $\tau(E)=Q\tau_0(E)|_\varepsilon$. 令 K 是 ε_0 中的自共轭算子:

$$K=\int_{\sigma_-}\omega\tau_0(d\omega),$$

那末 $R^{-1}\Xi(\lambda)R^{-1}=Q(K-\lambda I)^{-1}Q$.

记 $A=QKQ$, $B=(I-Q)K(I-Q)$, $C=QK(I-Q)$. 分别视 A, B, C 为第 4 小节中的H_-, H_+, Γ. 作相应于 (1.52) 的

$$h_1(\lambda)=\lambda I-A+C(B-\lambda I)^{-1}C^*,$$

那末仿 (1.54), 有 $h_1(\lambda)^{-1}=Q(\lambda I-K)^{-1}Q$. 因此, $R^{-1}\Xi R^{-1}$ 具有有界逆 $-h_1(\lambda)$. 所以, $\Xi(\lambda)^{-1}=-R^{-1}h_1(\lambda)R^{-1}$ 是 ε 上有界线性算子.

再证 $(I-Z(\lambda)\Xi(\lambda))^{-1}$ 存在且为 ε 上的有界线性算子. 这时, (1.52) 中的 $h(\lambda)$ 形如

$$h(\lambda)=\lambda I-\mathrm{H}_-+\nu^*Z(\lambda)\int\nu(\omega)d\omega.$$

根据第 4 小节末的结论, 当 $I_m\lambda\neq 0$ 时, $h(\lambda)^{-1}$存在,且定义域为 H_-, 因此,任取 $a\in\varepsilon$, 必有 $a(\lambda)\in H_-$, 使得

$$h(\lambda)a(\lambda)=\nu^*a,$$

即

$$((\lambda I - \mathrm{H}_-) + \nu^* Z(\lambda)\int \nu(\omega)d\omega)a(\lambda) = \nu^* a.$$

两边以 $\int \nu(\omega)d\omega(\mathrm{H} - \lambda I)^{-1}$ 作用，即得

$$(I - \Xi(\lambda)Z(\lambda))\int \nu(\omega)d\omega a(\lambda) = \Xi(\lambda)a.$$

由于 $\mathscr{R}(\Xi(\lambda)) = \varepsilon$，因此 $\mathscr{R}(I - \Xi(\lambda)Z(\lambda)) = \varepsilon$，从而共轭算子 $(I - Z(\bar{\lambda})\Xi(\bar{\lambda}))$ 不以零为特征值. 换 λ 为 $\bar{\lambda}$ 即知，

$$0\bar{\in}\sigma_p(I - Z(\lambda)\Xi(\lambda)).$$

但是，

$$I - Z(\lambda)\Xi(\lambda) = \Xi(\lambda)^{-1}(I - \Xi(\lambda)Z(\lambda))\Xi(\lambda),$$

因此 $I - Z(\lambda)\Xi(\lambda)$ 的值域是 ε，所以 $I - Z(\lambda)\Xi(\lambda)$. 具有有界逆. 再由引理 1.4，立即可知 $g(\lambda)$ 具有有界逆. 证毕.

由于 Γ 的表达式 (1.101) 并不是唯一地决定着 ν, μ，所以我们以后总挑选 ν，使 $\int \nu(\omega)\nu(\omega)^* d\omega$ 具有有界逆. 今后这作为一个假设. 在这个假设下，当 $\eta = 1$ 时，$g(\lambda)$ (和 $h(\lambda)$ 一样)具有定义在 ε 上的有界逆. 但是当 $\eta = -1$ 时，就不能做到了. 事实上，此时 $g(\lambda)^{-1}$ 可能有非实数极点.

引理 1.6 对于 $I_m\lambda \neq 0$ 的 λ，有

$$g(\lambda)\begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix}\int \zeta(\omega)d\omega = \int \zeta(\omega)(\lambda I - \mathrm{H}_1)^{-1}(\lambda I - \mathrm{H})d\omega \tag{1.104}$$

证 由于

$$\Xi(\lambda) = \int \nu(\omega)(\mathrm{H}_- - \lambda I)^{-1}\nu(\omega)^* d\omega,$$

$$Z(\lambda) = \int \mu(\omega)(\mathrm{H}_+ - \lambda I)^{-1}\mu_1(\omega)d\omega,$$

所以

$$g(\lambda) = \begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix} + \int \zeta(\omega)(\mathrm{H}_1 - \lambda I)^{-1}\zeta_1(\omega)d\omega,$$

由此可得

$$g(\lambda)\begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix}\int \zeta(\omega)d\omega = \int \zeta(\omega)d\omega + \int \zeta(\omega)(\mathbf{H}_1$$

$$- \lambda I)^{-1}\zeta_1(\omega)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\int \zeta(\omega_1)d\omega_1 d\omega.$$

由于

$$\Gamma = \nu(\omega)^* \int \mu(\omega_1)d\omega_1,$$

$$\Gamma_1 = \mu_1(\omega)\int \nu(\omega_1)d\omega_1,$$

所以

$$\zeta_1\begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix}\int \zeta(\omega)d\omega = \begin{pmatrix} O & \Gamma \\ \Gamma_1 & O \end{pmatrix},$$

由此可得

$$g(\lambda)\begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix}\int \zeta(\omega)d\omega = \int \zeta(\omega)d\omega$$

$$+ \int \zeta(\omega)(\mathbf{H}_1 - \lambda I)^{-1}\begin{pmatrix} O & \Gamma \\ \Gamma_1 & O \end{pmatrix}d\omega,$$

即 (1.104) 成立。证毕。

由于在渐近态空间为H的情况下，当$\eta = -1$时会出现S是非酉的，因此我们分$\eta = 1$和$\eta = -1$两种情况讨论。

定理 1.7 设 $\eta = 1$，而且对几乎所有的实 ω，存在境界值 $g_\pm(\omega)$。又设 $g(\cdot)^{-1}$ 有境界值 $g_\pm(\omega)^{-1}$，则它们都是 $\mathfrak{E}$ 上有界线性算子，而且有数 $q > 2$，$q' > 2$，使得

$$\int \|\zeta(\omega)\|^q d\omega < \infty, \quad \int \|g_\pm(\omega)^{-1}\zeta(\omega)\|^{q'} d\omega < \infty. \tag{1.105}$$

那末，算子

$$\Omega_\pm = I \mp 2\pi i \zeta^* \Omega_\mp g_\pm^{-1}\zeta \tag{1.106}$$

是H到H_r'上的酉算子，而且

$$\mathbf{H}|_{H_r'} = \Omega_\pm \mathbf{H}_1 \Omega_\pm^{-1}, \quad V(t) = \Omega_\pm V_1(t)\Omega_\pm^{-1}. \tag{1.107}$$

所以，$\Omega_\pm$ 是波算子，即

$$\lim_{t\to\mp\infty}\|V(t)\Omega_\pm x - V_1(t)x\| = 0, \quad x \in H, \tag{1.108}$$

而且散射算子 $S=\Omega_-^{-1}\Omega_+$ 的形式是 $S: x(\cdot)\longmapsto S(\cdot)x(\cdot)$，其中

$$S(\omega)=I-2\pi i\zeta(\omega)^*g_+(\omega)^{-1}\zeta(\omega), \qquad (1.109)$$

S 是 H 到 H_r' 上的酉算子．如果

$$g(\cdot)^{-1}-\begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix}\in H^{\frac{2q}{q-2}},^{1)}$$

那末 $H_r'=H$．

证 (I) 先证 Ω_+ 的保距性．和定理 1.1 的情况相仿，取

$$\mathscr{M}=\{x\,|\,x\in H,\ g_+^{-1}\zeta x\in L^{\frac{2q}{q-2}}(-\infty,\infty)\},$$

那末 $\bar{\mathscr{M}}=H$．任取 $x\in\mathscr{M}$，那末 $Q_+g_+^{-1}\zeta x$ 是 $H^{\frac{2q}{q-2}}$ 中函数的境界值函数．但是，由 (1.105)，

$$g(\cdot)-\begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix}\in H^{\frac{q}{2}},\ f=\left(g_+-\begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix}\right)\Omega_+g_+^{-1}\zeta x$$

是 $H^{\frac{2q}{q+2}}$ 中函数的境界值函数；因为

$$\frac{2q}{q+2}>1,$$

所以从 $H^{\frac{2q}{q+2}}$ 中函数的 Cauchy 积分公式得到

$$Q_-\left(g_+-\begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix}\right)Q_+g_+^{-1}\zeta x$$

$$=\frac{-1}{2\pi i}\int\frac{f(\omega_1)d\omega_1}{\omega_1-(\omega-i0)}=0.$$

因此，由 $Q_-=I-Q_+$ 得到

---

1) $g(\lambda)^{-1}$ 在上、下开半平面是解析的 (见引理 1.5)，但 $\lim\limits_{I_m\lambda\to\infty}g(\lambda)=\begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix}$，所以 $\lim\limits_{I_m\lambda\to\infty}g(\lambda)^{-1}=\begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix}$，因此 $g(\lambda)^{-1}$ 不属于任何 H^p，但

$$g(\cdot)^{-1}-\begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix}$$

却属于某个 H^p．

$$Q_-\left(g_+-\begin{pmatrix}O & I\\ I & O\end{pmatrix}\right)Q_-g_+^{-1}\zeta x$$

$$=Q_-\zeta x-\begin{pmatrix}O & I\\ I & O\end{pmatrix}Q_-g_+^{-1}\zeta x;$$

再由$\left(g_+-\begin{pmatrix}O & I\\ I & O\end{pmatrix}\right)Q_-g_+^{-1}\zeta x\in L^{\frac{2q}{q+2}}(-\infty,\infty)$，$g_+^{-1}\zeta x\in L^{\frac{2q}{q-2}}$得到

$$\left[\left(g_+-\begin{pmatrix}O & I\\ I & O\end{pmatrix}\right)Q_-g_+^{-1}\zeta x,\ Q_-g_+^{-1}\zeta x\right]$$

$$=\left[Q_-\left(g_+-\begin{pmatrix}O & I\\ I & O\end{pmatrix}\right)Q_-g_+^{-1}\zeta x,\ g_+^{-1}\zeta x\right]$$

$$=[Q_-\zeta x,\ g_+^{-1}\zeta x]-\left[\begin{pmatrix}O & I\\ I & O\end{pmatrix}Q_-g_+^{-1}\zeta x,\ g_+^{-1}\zeta x\right].$$

取上式的虚部后再利用 $g_+-g_-=2\pi i\zeta\zeta^*$ 得

$$\pi\|\zeta^*(Q_-g_+^{-1}\zeta x\|^2=I_m[Q_-\zeta x,\ g_+^{-1}\zeta x]$$

$$-I_m\left[\begin{pmatrix}O & I\\ I & O\end{pmatrix}Q_-g_+^{-1}\zeta x,\ g_+^{-1}\zeta x\right]$$

$$=I_m[Q_-\zeta x,\ g_+^{-1}\zeta x].$$

(上式中用到 $Q_-^2=Q_-$). 其余和定理1.1的(I)一样，可知 $\Omega_+|_{\mathscr{A}}$ 是保距的，进而 Ω_+ 在H上是保距的，而且在整个H上(1.106)的表达式有意义. 对 Ω_- 也可一样地处理.

(II) 设 $x=\begin{pmatrix}\alpha\\ \varphi\end{pmatrix}\in\mathscr{D}(\mathrm{H}_1)$，易知 $\Omega_+x\in\mathscr{D}(\mathrm{H}_1)$，而且

$$\mathrm{H}_1\Omega_+x=\Omega_+\mathrm{H}_1x-\zeta^*\int g_+^{-1}\zeta d\omega. \tag{1.110}$$

另一方面，若记 $y=g_+^{-1}\zeta x$，

$$\xi(\omega)=\begin{pmatrix}\mu(\omega)^* & O\\ O & \nu(\omega)^*\end{pmatrix},$$

由于

$$\begin{pmatrix}O & \Gamma\\ \Gamma^* & O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O & I\\ I & O\end{pmatrix}\xi\int\zeta\Omega_+xd\omega$$

$$= \begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix} \xi \left(\int \zeta x d\omega - 2\pi i \int \zeta \zeta^* Q_- y d\omega \right)$$

$$= \begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix} \xi \left(\int \zeta x d\omega - \int \begin{pmatrix} \Xi_+ & O \\ O & Z_+ \end{pmatrix} y d\omega \right)$$

$$= \begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix} \xi \int \left(\zeta x - g_+ y + \begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix} y \right) d\omega$$

$$= \zeta^* \int y d\omega, \tag{1.111}$$

把 (1.110) 和 (1.111) 合并就得到 $\mathbf{H}\Omega_+ x = \Omega_+ \mathbf{H}_1 x$. 对于 Ω_- 也可同样讨论. 因此, $\mathbf{H}\Omega_\pm = \Omega_\pm \mathbf{H}_1$, $V(t)\Omega_\pm = \Omega_\pm V_1(t)$.

至于 (1.108) 可和定理 1.1 相仿地证明,从略.

(III) 证 $\Omega_\pm H = H'_r$. 显然, $\Omega_\pm H \subset H'_r$. 由 $\Omega_\pm$ 的保距性,只要证明 $\Omega_\pm^* y = 0$ 在 H'_r 中的解 $y = 0$, 即可设 $y \in H'_r$, 而且 $\Omega_\mp^* y = 0$, 那末由

$$\Omega_\pm^* y = y \pm 2\pi i \zeta^* g_\mp^{-1} Q_\mp \zeta y, \tag{1.112}$$

即得

$$y(\omega) - \zeta(\omega)^* g_-(\omega)^{-1} \int \frac{\zeta(\omega_1) y(\omega_1)}{\omega_1 - (\omega - i0)} d\omega_1 = 0. \tag{1.113}$$

作向量值解析函数

$$\Phi(\lambda) = \int \frac{\zeta(\omega_1) y(\omega_1)}{\omega_1 - \lambda} d\omega_1,$$

对 (1.113) 两边左乘以 $2\pi i \zeta(\omega)$, 即得

$$g_+(\omega)^{-1} \Phi_+(\omega) = g_-(\omega)^{-1} \Phi_-(\omega). \tag{1.114}$$

但是,在 (1.104) 的两边右乘 $(\lambda I - \mathbf{H})^{-1} y$ 就得到

$$\Phi(\lambda) = g(\lambda) \beta(\lambda),$$

其中

$$\beta(\lambda) = \begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix} \int \zeta (\lambda I - \mathbf{H})^{-1} y d\omega.$$

由于假设 $y \in H'_r$, 所以 $(\lambda I - \mathbf{H})^{-1} y \in C$, 因此 $\beta(\cdot) \in C$. 其余和定理 1.1 的 (IV) 中的证明方法一样, 得到 $\beta(\cdot) = 0$, 即

$\Phi(\cdot)=0$，从而 $y=0$. 这样就得到 $H_r'=\Omega_\pm H$.

当 $g(\cdot)-\begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix}\in H^{\frac{2q}{q-2}}$ 时，我们任取 $\Omega_\pm^* y=0$ 的解 $y\in H$，并和前面一样可以得到 (1.113). 由于

$$\zeta(\cdot)\in L^q(-\infty,\infty),\ y(\cdot)\in L^2(-\infty,\infty),$$

所以 $\zeta y\in L^{\frac{2q}{q+2}}(-\infty,\infty)$. 因此，$\Phi(\cdot)\in H^{\frac{2q}{q+2}}$，从而

$$\beta(\cdot)=g(\cdot)^{-1}\Phi(\cdot)=\left(g(\cdot)^{-1}-\begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix}\right)\Phi(\cdot)$$
$$+\begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix}\Phi(\cdot)$$

为 H' 与 $H^{\frac{2q}{q+2}}$ 中函数的和. 对这个函数 $\beta(\cdot)$，Cauchy 积分公式仍成立，仍可由 (1.113) 推出 $\beta(\cdot)=0$，因此 $y=0$，所以

$$\Omega_\pm H=H.$$

(IV) 计算S. 作出用 (1.109) 定义的算子 S. 今只需证

$$\Omega_-S=\Omega_+ \tag{1.115}$$

就可以了. 由于

$$\Omega_-S=(I+2\pi i\zeta^*Q_+g_-^{-1}\zeta)(I-2\pi i\zeta^*g_+^{-1}\zeta), \tag{1.116}$$
$$g_-^{-1}\zeta(I-2\pi i\zeta^*g_+^{-1}\zeta)=g_-^{-1}\zeta-g_-^{-1}2\pi i\zeta\zeta^*g_+^{-1}\zeta$$
$$=g_-^{-1}\zeta-g_-^{-1}(g_+-g_-)g_+^{-1}\zeta=g_+^{-1}\zeta,$$

以及 $Q_+=I-Q_-$，所以 (1.116) 化成

$$\Omega_-S=I-2\pi i\zeta^*g_+^{-1}\zeta+2\pi i\zeta^*Q_+g_+^{-1}\zeta$$
$$=I-2\pi i\zeta^*Q_-g_+^{-1}\zeta=\Omega_+,$$

即得 (1.115)，又 $S=\Omega_-^{-1}\Omega_+$ 作为酉算子的积，自然也是酉算子. 证毕.

对于带中间系统的散射问题，颇感兴趣的是考察参加碰撞过程的粒子的渐近态空间 H_+ 上的散射算子 $S_1=P_+SP_+$，并考察何时 S_1 为 H_+ 上酉算子(即非弹性碰撞).

推论 1.8 在定理 1.7 的假设下

$$(S_1\varphi)(\omega)=S_1(\omega)\varphi(\omega), \tag{1.117}$$

而

$$S_1(\omega)=I+2\pi i\mu(\omega)^*\Xi_+(\omega)(I-Z_+(\omega)\Xi_+(\omega))^{-1}\mu(\omega). \tag{1.118}$$

当 $\omega\bar{\in}\sigma_-$ 时，$S_1(\omega)$ 是 ε_+ 上酉算子，而 S_1 为 H_+ 上酉算子的充要条件是对几乎所有 $\omega\in\sigma_+$，成立着

$$\nu(\omega)^*(I-Z_\pm(\omega)\Xi_\pm(\omega))^{-1}\mu(\omega)=0. \tag{1.119}$$

特别，当 $\sigma_-\cap\sigma_+$ 的 Lebesgue 测度是零时，S_1 是 H_+ 上酉算子。

证 根据(1.102)，(1.109)立即可得 $S(\omega)=$

$$\begin{pmatrix} I+2\pi i\nu(\omega)^*\xi_+(\omega)Z_+(\omega)\nu(\omega) & -2\pi i\nu(\omega)^*\xi_+(\omega)\mu(\omega) \\ -2\pi i\mu(\omega)^*\xi_-(\omega)^*\nu(\omega) & I+2\pi i\mu(\omega)^*\Xi_+(\omega)\xi_+(\omega)\mu(\omega) \end{pmatrix}. \tag{1.120}$$

如果记

$$S(\omega)=\begin{pmatrix} S_{-1}(\omega) & A(\omega) \\ B(\omega) & S_1(\omega) \end{pmatrix}, \tag{1.121}$$

那末(1.118)，(1.117)成立。由于

$$S(\omega)S(\omega)^*=S(\omega)^*S(\omega)=I,$$

有

$$S_1(\omega)^*S_1(\omega)=I-A(\omega)^*A(\omega)=I-(2\pi)^2\mu(\omega)^*\times\xi_+(\omega)^*\nu(\omega)\nu(\omega)^*\xi_+(\omega)\mu(\omega), \tag{1.122}$$

$$S_1(\omega)S_1(\omega)^*=I-B(\omega)B(\omega)^*=I-(2\pi)^2\mu(\omega)^*\times\xi_-(\omega)^*\nu(\omega)\nu(\omega)^*\xi_-(\omega)\mu(\omega). \tag{1.123}$$

从上两式即知．$S_1(\omega)$ 为酉算子的充要条件是(1.119)成立．其余部分是显然的．证毕．

注意 当 φ 直交于 μ^*H_+ 时，$\mu\varphi=0$，因此 $S_1\varphi=\varphi$．所以，只要对 μ^*H_+ 中向量 $\psi=\mu^*\varphi$ 来表达 $S_1(\omega)\phi(\omega)$ 就好了，这时由(1.118)得到

$$S_1(\omega)\mu(\omega)^*=\mu(\omega)^*(I-\Xi_+(\omega)Z_+(\omega))^{-1}\times(I-\Xi_+(\omega)Z_-(\omega)). \tag{1.124}$$

这个公式与(1.99)类似，是 Wigner-Eisenbud 公式的推广。

推论 1.9 在定理 1.7 的假设（包括假设 $g(\cdot)^{-1}-\begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix} \in H^{\frac{2q}{q-2}}$）下，当 $f\in H_-$ 时，中间系统的渐近态有公式：

$$\lim_{t\to\pm\infty}\|T_t f\|^2 = \|f\mp 2\pi i\nu^*\xi_\mp Z_\mp Q_\mp \nu f\|^2$$
$$= \|f\|^2 - \|2\pi\mu^*\xi_\pm^* Q_\mp \nu f\|^2. \qquad (1.125)$$

证 由于

$$\|T_t f\| = \left\| e^{itH_-}P - e^{-itH}\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}\right\|,$$

所以由 (1.108)，(1.112) 得

$$\lim_{t\to\pm\infty}\|T_t f\|^2 = \left\|P_-\Omega_\pm^*\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}\right\|^2 = \left\|\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}\right.$$
$$\left.\pm 2\pi i\begin{pmatrix} \nu^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} g_\mp^{-1} Q_\mp \begin{pmatrix} \nu f \\ 0 \end{pmatrix}\right\|^2$$
$$= \left\|\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}\right\|^2 - \left\|P_+\Omega_\pm^*\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}\right\|^2$$
$$= \|f\|^2 - \left\|2\pi\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu^* \end{pmatrix} g_\mp^{-1} Q_\mp \begin{pmatrix} \nu f \\ 0 \end{pmatrix}\right\|^2,$$

再利用 (1.102) 就得到 (1.125)。 证毕。

对 $\eta=-1$ 的情况，也有相应于定理 1.7 和推论 1.8 的结果。

定理 1.10 设 $\eta=-1$。又设对几乎所有的实数ω，存在境界值 $g_\pm(\omega)$，又 $g_\pm(\omega)^{-1}$ 存在并且都是 ε 上有界线性算子，而且有数 $q>2$，$q'>2$，使得

$$\int\|\zeta(\omega)\|^q d\omega<\infty,\quad \operatorname*{ess\ sup}_{\omega}^{\omega}\|\zeta(\omega)\|<\infty,$$
$$\int\|g_\pm(\omega)^{-1}\zeta(\omega)\|^{q'}d\omega<\infty.$$

那末，必有H到 H_r' 的有界线性算子

$$\Omega_\pm = I\mp 2\pi i\zeta_1 Q_\mp g_\pm^{-1}\zeta,$$

它按不定度规是酉算子，并且

$$\Omega_{\pm}^{\dagger} = I \pm 2\pi i \zeta_1 g_{\mp}^{-1} Q_{\pm} \zeta$$

也是有界线性算子，而且

$$\Omega_{\pm}^{\dagger}\Omega_{\pm} = I, \quad \Omega_{\pm}\Omega_{\pm}^{\dagger} = P_r,$$

P_r 是 H_r 到 H_r' (按不定度规自共轭)的投影算子，又有

$$\mathbf{H}|_{H_r'} = \Omega_{\pm}\mathbf{H}\Omega_{\pm}^{-1}, \quad V(t)|_{H_r'} = \Omega_{\pm}V_1(t)\Omega_{\pm}^{-1},$$

而且

$$\lim_{t\to\mp\infty} \|V(t)\Omega_{\pm}x - V_1(t)x\| = 0, \quad x \in H,$$

$$\lim_{t\to\mp\infty} \|V(t)x - V_1(t)\Omega_{\pm}^{\dagger}x\| = 0, \quad x \in H_r',$$

如果对几乎所有 ω，

$$v(\omega)^*\xi_{\pm}(\omega)^{-1}\mu(\omega) = 0, \tag{1.126}$$

那末散射算子 $S = \Omega_{-}^{\dagger}\Omega_{+}$ 按H上内积是R上酉算子，而且

$$S\begin{pmatrix}\alpha\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I + 2\pi i v^*\xi_+ Z_+ v\alpha\\ I - 2\pi i \mu^* \Xi_+ \xi_+ \mu\varphi\end{pmatrix}.$$

本定理的证明和定理 1.7 以及推论 1.8 的证明相仿，所以从略。

§2 条件正定广义函数的表示

正如用 Hilbert 空间及其上的算子理论可以研究正定广义函数的表示问题一样，用不定度规空间及其上的算子理论也可以讨论条件正定广义函数的表示. 在这一节中将以K空间作为典型，研究它上面的条件正定广义函数的表示.

1. 条件正定广义函数 设 $\mathbf{K}_m$ 是具有有界支集的m个实变元

$$x = (x_1, \cdots, x_m)$$

的无限次可微函数全体. 所谓 $\mathbf{K}_m$ 上序列 $\{\varphi_n\}$ 收敛于 0 是指 (i) $\bigcup_n \operatorname{supp}\varphi_n$ 是有界集；(ii) φ_n 的各阶偏导数一致收敛于 0. $\mathbf{K}_m'$ 表示 $\mathbf{K}_m$ 上连续线性泛函全体，称 $\mathbf{K}_m'$ 是 $\mathbf{K}_m$ 上广义函数空间. $\mathbf{K}_m'$ 中每个元F就称作 $\mathbf{K}_m$ 上广义函数. 当 $\varphi \in \mathbf{K}_m$ 时，令

$$\varphi^*(t) = \overline{\varphi(-x)}.$$

$\mathbf{K}_m$上卷积运算$*$定义为

$$(\varphi * \phi)(x) = \int \varphi(x-t)\phi(t)dt, \ \varphi, \ \phi \in \mathbf{K}_m,$$

其中 $dt = dt_1 \cdots dt_m$.

设 $F \in \mathbf{K}'_m$. 如果对任何 $\varphi \in \mathbf{K}_m$, 有

$$\overline{F(\varphi)} = F(\varphi^*),$$

称F是 Hermite 型的.

设H是$\mathbf{K}_m$的一个子集，如果对任何 $a = (a_1, \cdots, a_m)$，当 $\varphi \in H$ 时，$\varphi(x+a) \in H$，则称H是平移不变的.

作为正定广义函数概念的自然推广，引入如下两种条件正定广义函数.

定义 2.1 设H是$\mathbf{K}_m$中平移不变的闭线性子空间. 如果有n个不属于H的线性无关的 $\varphi_i \in \mathbf{K}_m$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 使得

$$\mathbf{K} = \operatorname{span}\{\varphi_i\} \dotplus H,$$

则称n为H的亏维数. 设 $F \in \mathbf{K}'_m$，并且是 Hermite 型的，当 $\varphi \in H$ 时，$F(\varphi * \varphi^*) \geqslant 0$，就称$F$是$\mathbf{K}_m$上的亏维数为$n$的平移不变子空间$H$上正定的条件正定广义函数.

定义 2.2 设 $F \in \mathbf{K}'_m$，并且是 Hermite 型的. 如果对$\mathbf{K}_m$中任何一组 $\{\varphi_\mu | \mu = 1, 2, \cdots, l\}$，二次型 $\sum_{\mu,\nu} F(\varphi_\mu * \varphi_\nu^*)\xi_\mu\bar{\xi}_\nu$ 的正规形式中所含的负二次式不超过n，而且确实存在某个l和一组 $\{\varphi_\mu | \mu = 1, 2, \cdots, l\}$，使得上述二次型中含有$n$个负二次式，就称$F$是$\mathbf{K}_m$上的具有$n$个负二次式的条件正定广义函数.

这两种条件正定广义函数有着密切的关系. 下面先给出一个定理.

定理 2.1 如果F是具有n个负二次式的条件正定广义函数，那末它必是在某个亏维数为n的平移不变子空间上正定.

证 在$\mathbf{K}_m$上引入度规 $(\varphi, \phi) = F(\varphi * \phi^*)$. 记

$$K_0 = \{\varphi | (\varphi, \phi) = 0, \ \phi \in \mathbf{K}_m\}.$$

作 $\mathbf{K} = \mathbf{K}_m / K_0$. 由$(\cdot, \cdot)$在$\mathbf{K}$上导出的度规为$(\cdot, \cdot)_1$. 由于

F 具有 n 个负二次式，易知必存在一组

$$\{\tilde{\varphi}_\mu | \mu = 1, 2, \cdots, l\} \subset \mathbf{K},$$

使得

$$\sum_{\mu, \nu} (\tilde{\varphi}_\mu, \tilde{\varphi}_\nu) \xi_\mu \xi_\nu$$

的正规形式中含有 n 个负二次式，从而存在

$$\{\psi_\mu | \mu = 1, 2, \cdots, n\},$$

它们都是 $\{\tilde{\varphi}_\mu | \mu = 1, 2, \cdots, l\}$ 的线性组合，使得

$$-(\tilde{\psi}_\mu, \tilde{\psi}_\nu)_1 = \delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, 2, \cdots, n.$$

对任何 $\tilde{\varphi} \in \mathbf{K}$，显然有分解

$$\tilde{\varphi} = \sum_{\mu=1}^{n} -(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}_\mu)_1 \tilde{\psi}_\mu + \left(\tilde{\varphi} + \sum_{\mu=1}^{n} (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}_\mu)_1 \tilde{\psi}_\mu \right). \tag{2.1}$$

记

$$\tilde{\varphi}_0 = \tilde{\varphi} + \sum_{\mu=1}^{n} (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}_\mu)_1 \tilde{\psi}_\mu,$$

显然，$(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_\mu)_1 = 0 (\mu = 1, 2, \cdots, n)$。令

$$K_- = \text{span}\{\tilde{\psi}_\mu | \mu = 1, 2, \cdots, n\},$$

由 (2.1) 可知，有分解

$$\mathbf{K} = K_- \oplus K_+, \tag{2.2}$$

并且 K_+ 是 $\mathbf{K}$ 的正子空间.

按分解 (2.2)，对任何 $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in \mathbf{K}$，有唯一分解 $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_- + \tilde{\xi}_+$，$\tilde{\eta} = \tilde{\eta}_- + \tilde{\eta}_+$，$\tilde{\xi}_-, \tilde{\eta}_- \in K_-$，$\tilde{\xi}_+, \tilde{\eta}_+ \in K_+$。在 $\mathbf{K}$ 上引入内积

$$[\tilde{\xi}, \tilde{\eta}] = -(\tilde{\xi}_-, \tilde{\eta}_-)_1 + (\tilde{\xi}_+, \tilde{\eta}_+)_1, \tag{2.3}$$

然后将 $\mathbf{K}$ 按 $[\cdot, \cdot]$ 完备化得到 Π_n。显然，$\mathbf{K}$ 在 Π_n 中稠密.

对 $\tilde{\varphi} \in \mathbf{K}$，任取 $\varphi \in \tilde{\varphi}$，对任何 $t = (t_1, \cdots, t_m)$，定义

$$(U_t \tilde{\varphi})(x) = \widetilde{\varphi(x - t)},$$

由于 $\varphi \in K_0$ 时，$\varphi(x - t) \in K_0$，所以上述规定是确当的。由定义可知

$$(U_t \tilde{\varphi}, U_t \tilde{\varphi})_1 = (\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi})_1,$$

即 U_t 是 Π_n 上保距的。又因为

$$\overline{\mathscr{D}(U_t)} = \overline{\mathscr{R}(U_t)} = \Pi_n,$$

所以 U_t 是连续的，因而 U_t 可以唯一地延拓成 Π_n 上酉算子（延拓后的算子仍记为 U_t）. 显然，$\{U_t\}$ 是 Π_n 上 m 参数的酉算子群，且 $\{U_t\}$ 是可交换的，因此存在 $\{U_t\}$ 的公共的 n 维的半负不变子空间，$N\oplus Z$，其中 N, Z 分别是负、零性子空间. 令

$$(N\oplus Z)^{\perp} = Z\oplus P,$$

因为 $Z\oplus P$ 是 $\{U_t\}$ 的公共的半正不变子空间，因此 $Z\oplus P$ 在 $\mathbf{K}_m$ 中的原象 $\mathscr{H}$ 是 $\mathbf{K}_m,(\cdot,\cdot))$上 半正的且平移不变的. 下面证它是亏维数为 n 的闭线性子空间.

在 $N\oplus Z$ 中取一组线性基 $\{e_i|i=1,2,\cdots,n\}$，做

$$f_i(x) = (\tilde{x}, e_i)_1,\ x\in\tilde{x}\in\mathbf{K},\ i=1,2,\cdots,n.$$

显然，每个 f_i 是 $\mathbf{K}_m$ 上线性泛函. 由于对任何 $x, y\in\mathbf{K}_m$，

$$|f_i(x)-f_i(y)| = |(\tilde{x}-\tilde{y}, e_i)_1| \leqslant \|e_i\|\|\tilde{x}-\tilde{y}\|,$$

并注意到 $[\cdot,\cdot]$ 在 $\mathbf{K}_m$ 上是二元连续的，因此 $f_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\mathbf{K}_m$ 上广义函数（这里 $\|\cdot\|$ 是由内积 (2.3) 所导出的范数. 易知

$$\mathscr{H} = \bigcap_{i=1}^{n}\{x|f_i(x)=0\}, \tag{2.4}$$

因此 $\mathscr{H}$ 是 $\mathbf{K}_m$ 的闭线性子空间.

注意到 $\{f_i\}$ 是线性无关的，由 (2.4) 可知，$\mathscr{H}$ 的亏维数是 n. 证毕.

2. 条件正定广义函数的积分表示(单变元情况) 为了得到条件正定广义函数的积分表示，我们先给出 $\mathbf{K}$ 空间中具有有限亏维数且平移不变的闭线性子空间的一般形式.

定理 2.2 设 H 是 $\mathbf{K}_1$ 的闭线性子空间，那末 H 具有亏维数 n 且平移不变的充要条件是存在 n 次多项式 $Q(\lambda)$，使得

$$H = Q\left(\frac{d}{dx}\right)\mathbf{K}_1^{1)},$$

1）因为研究的是单变元情况，所以这里是导数运算，不是偏导数运算.

这里 $Q\left(\frac{d}{dx}\right)\mathbb{K}_1$ 是 $\mathbf{K}_1$ 中所有函数经算子 $Q\left(\frac{d}{dx}\right)$ 作用后的象。

证 设H是 $\mathbf{K}_1$ 的平移不变的闭线性子空间，并具有亏维数 n。H_1 是它的一个亏空间，$\dim H_1=n$。在 H_1 中取一组线性基 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$，那末对任何 $\varphi\in\mathbf{K}_1$，必有一组复数 $L_\nu(\varphi)$，使得

$$\varphi-\sum_{\nu=1}^{n} L_\nu(\varphi)\varphi_\nu\in H.$$

因为 $\mathbf{K}_1=H_1\dot{+}H$，因此 $L_\nu(\cdot)$ 是 $\mathbf{K}_1$ 上线性泛函。令

$$H^{(\nu)}=\operatorname*{span}_{\mu\neq\nu}\{\varphi_\mu\},$$

显然 $\mathscr{N}(L_\nu)=H\dot{+}H^{(\nu)}$ 是闭线性子空间，所以 L_ν 是连续的，即 $L_\nu\in\mathbf{K}_1'$。

当$\varphi\in H$时，$\dfrac{\varphi(x+a)-\varphi(x)}{a}\in H$，因此 $\varphi'\in H$。这样就有

$$\left(\frac{d}{dx}L_\nu\right)(\varphi)=-L_\nu\left(\frac{d}{dx}\varphi\right)=0,$$

所以

$$\frac{d}{dx}L_\nu\Big|_H=0.$$

因此，$\dfrac{d}{dx}L_\nu$ 必是 $L_1, \cdots, L_n$ 的线性组合。从而存在常数 $C_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu=1, 2, \cdots, n)$，使得

$$\frac{d}{dx}L_\nu=\sum_{\mu=1}^{n}c_{\nu\mu}L_\mu,\quad \nu=1, 2, \cdots, n. \tag{2.5}$$

作 λ 的多项式 $Q(\lambda)=\det(C+\lambda I)$，其中$C$是矩阵 $(c_{\mu\nu})$。由 (2.5) 容易推出

$$Q\left(-\frac{d}{dx}\right)L_\nu=0,\quad \nu=1, 2, \cdots, n.$$

这就是说

$$L_\nu\left(Q\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi\right)=0$$

对任何 $\varphi \in \mathbf{K}_1$ 成立，所以

$$H \supset Q\left(\frac{d}{dx}\right)\mathbf{K}_1.$$

又因为 Q 是 n 次多项式，$\left\{\omega \ Q\left(-\frac{d}{dx}\right)\omega = 0\right\}$ 中有一组线性无关解 $\{\omega_\nu(x) \mid \nu = 1, 2, \cdots, n\}$. 当 $\psi \in \mathbf{K}_1$ 时，

$$Q\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi = \psi$$

在 $\mathbf{K}_1$ 中有解的充要条件是

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega_\nu(x)\psi(x)dx = 0.$$

所以，$Q\left(\frac{d}{dx}\right)\mathbf{K}_1$ 的亏维数是 n，与 H 的亏维数相同。这样，必有

$$H = Q\left(\frac{d}{dx}\right)\mathbf{K}_1.$$

因为如果

$$H \neq Q\left(\frac{d}{dx}\right)\mathbf{K}_1,$$

则 $Q\left(\frac{d}{dx}\right)\mathbf{K}_1$ 在 H 中的亏维数至少为 1，因而 $Q\left(\frac{d}{dx}\right)\mathbf{K}_1$ 的亏维数将至少是 $n+1$，这是不可能的。必要性证得。

又从上面的证明可知，充分性是显然的。证毕。

下面建立 $\mathbf{K}_1$ 上两种条件正定广义函数的积分表达式，而且将两种条件正定广义函数统一起来。

设 $Q(z) = z^n + \cdots$ 是一个 n 次多项式，

$$H = Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\mathbf{K}_1,$$

$F \in \mathbf{K}_1'$，并且在 H 上是正定的。令

$$P(z) = Q(z)\overline{Q(\bar{z})}, \quad G = P\left(i\frac{d}{dx}\right)F.$$

由于

$$\left(\frac{d}{dx}F\right)(\phi)=-F\left(\frac{d}{dx}\phi\right),$$

所以对任何 $\varphi\in\mathbf{K}_1$,

$$G(\varphi*\varphi^*)=\left(P\left(i\frac{d}{dx}\right)F\right)(\varphi*\varphi^*)$$

$$=F\left(P\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)(\varphi*\varphi^*)\right)$$

$$=F\left(Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\varphi*\left(Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\varphi\right)^*\right)\geqslant 0.$$

因此,G是 $\mathbf{K}_1$ 上正定广义函数,利用正定广义函数的 Bochner 定理,存在正整数N及唯一的正测度 $\alpha(\lambda)$,并适合下列条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha(\lambda)}{1+|\lambda|^N}<\infty,$$

使得当 $\varphi\in\mathbf{K}_1$ 时,

$$G(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(\lambda)d\alpha(\lambda),$$

这里 $\tilde{\varphi}(\lambda)$ 是 $\varphi(x)$ 的 Fourier 变换 $\left(\tilde{\varphi}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}\varphi(x)dx\right)$.

下面的任务是要解微分方程

$$P\left(i\frac{d}{dx}\right)F=G. \tag{2.6}$$

先构造 (2.6) 的一个特解如下: 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 是 $Q(z)$ 的实根,其阶数分别是 $m_1,\cdots,m_k$,又设 $\lambda_{k+1},\cdots,\lambda_p$ 为 $Q(z)$ 的非实根,阶数分别是 $m_{k+1},\cdots,m_p$。记

$$P_0(z)=\prod_{\nu=1}^{k}(z-\lambda_\nu)^{2m_\nu},$$

$$P_1(z)=\prod_{\nu=k+1}^{p}(z-\lambda_\nu)^{m_\nu}(z-\bar{\lambda}_\nu)^{m_\nu}.$$

显然,P_0, P_1 在实轴上都是非负的,而且

$$P(z)=P_0(z)P_1(z)(z\in\mathbf{C}).$$

容易知道，在实轴上，$P_1(x)\neq 0$。设 $u_\nu(\lambda, x)$ 是 $\frac{e^{-i\lambda x}}{P_0(\lambda)}$ 在 $\lambda=\lambda_\nu$ 附近的 Laurent 展开式中主要部分。作函数

$$S(\lambda, x)=\sum_{\nu=1}^{k} u_\nu(\lambda, x),$$

以及

$$S_\rho(\lambda, x)=\begin{cases}S(\lambda, x), & |\lambda|<\rho,\\ 0, & |\lambda|\geqslant\rho.\end{cases}$$

这里 $\rho>\max\limits_{1\leqslant\nu\leqslant k}|\lambda_\nu|$。记

$$d\beta(\lambda)=\frac{d\alpha(\lambda)}{P_1(\lambda)},$$

再作广义函数 F_ρ：

$$F_\rho(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{e^{-i\lambda x}}{P_0(\lambda)}-S_\rho(\lambda, x)\right]\varphi(x)dx\right\}d\beta(\lambda),$$

注意到 $e^{i\lambda_\nu x}u_\nu(\lambda, x)$ 是 x 的次数不超过 $2m_\nu-1$ 的多项式，所以 $\left(i\frac{d}{dx}-\lambda_\nu\right)^{2m_\nu}u_\nu(\lambda, x)=0$。因此，对任何 $\varphi\in K_1$，

$$\int_{-\infty}^{\infty}u_\nu(\lambda, x)P\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[P\left(i\frac{d}{dx}\right)u_\nu(\lambda, x)\right]\varphi(x)dx=0.$$

这样，

$$\int_{-\infty}^{\infty}S_\rho(\lambda, x)P\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)dx=0,$$

从而

$$\left(P\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)F_\rho\right)(\varphi)=F_\rho\left(P\left(i\frac{d}{dx}\right)\varphi\right)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\lambda x}}{P_0(\lambda)}P\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)dx\right\}$$

$$\times\frac{d\alpha(\lambda)}{P_1(\lambda)}=G(\varphi),$$

即 F_ρ 是方程 (2.6) 的一个特解. 令 $\omega_\rho = F - F_\rho$, 便有

$$P\left(i\frac{d}{dx}\right)\omega_\rho = 0. \tag{2.7}$$

因为 F 是 Hermite 型的,又 F_ρ 也是 Hermite 型的,因此 ω_ρ 必是 Hermite 型的. 容易知道,方程 (2.3) 的解必为普通函数, 所以

$$\omega_\rho(-x) = \overline{\omega_\rho(x)}.$$

这样,方程 (2.7) 的解形为

$$\omega_\rho(x) = \sum_{\nu=1}^{k} e^{-i\lambda_\nu x} Q_\nu(x)$$

$$+ \sum_{\nu=k+1}^{p} \{e^{-i\lambda_\nu x} Q_\nu(x) + e^{-i\bar{\lambda}_\nu x}\overline{Q_\nu(-x)}\}, \tag{2.8}$$

这里 $Q_\nu(x)$ 是与 ρ 有关的多项式. 当 $\nu = 1, 2, \cdots, k$ 时,次数为 $2m_\nu - 1$, 并且 $\overline{Q_\nu(x)} = Q_\nu(-x)$; 当 $\nu = k+1, \cdots, p$ 时,次数为 $m_\nu - 1$,并且 $\sum_{\nu=1}^{k} m_\nu = n$. 由此得到下列定理.

定理 2.3 设 F 是 (i) $\mathbf{K}_1$ 上具有 n 个负二项式的条件正定广义函数, 或是 (ii) 在一个亏维数为 n 的平移不变的闭子空间 H 上正定的广义函数,那末必存在一个 n 次多项式 $Q(z)$, 使得 $Q\left(i\frac{d}{dx}\right)\overline{Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)}F$ 是正定广义函数.并且在(ii)的情况下,有

$$H = Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\mathbf{K}_1.$$

同时,唯一地存在直线上正测度 $d\beta(\lambda)$, 适合

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\beta(\lambda)}{1+|\lambda|^N}d\lambda < \infty$$

(N 是某个自然数),使得对任何 $\varphi \in \mathbf{K}_1$,

$$F(\varphi) = \omega_\rho(\varphi) + \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{e^{-i\lambda x}}{P_0(\lambda)}\right.\right.$$

$$\left.\left. - S_\rho(\lambda, x)\right]\varphi(x)dx\right\}d\beta(\lambda), \tag{2.9}$$

此处 $P_0(\lambda)$ 是多项式 $Q(\lambda)\overline{Q(\bar{\lambda})}$ 的实因子全体的积，而 $S_\rho(\lambda, x)$ 当 $|\lambda|<\rho$ 时为 $\frac{e^{-i\lambda x}}{P_0(\lambda)}$ 的主要部分；当 $|\lambda|>\rho$ 时，

$$S_\rho(\lambda, x)=0$$

（ρ 是适当大的正数），$\omega_\rho(x)$ 是常微分方程

$$Q\left(i\frac{d}{dx}\right)\overline{Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)}\omega_\rho(x)=0 \tag{2.10}$$

的普通解，形如 (2.8)。

反之，任何形如 (2.9) 的广义函数必在某个亏维数为 n 的平移不变子空间 $H\left(=Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\mathbf{K}_1\right)$ 上正定，而且具有不超过 n 个负二次式的条件正定广义函数。

证 显然，形如 (2.9) 的广义函数在

$$H=Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\mathbf{K}_1$$

上是正定的，剩下的只是要证明它具有的负二次式不超过 n 个。

取一列直线上正测度 $d\beta_m(\lambda)$，使它在集 $\bigcup_{\nu=1}^{k}\left(\lambda_\nu-\frac{1}{m}, \lambda_\nu+\frac{1}{m}\right)$ 以及集 $(-\infty, -m)$，(m, ∞) 上为零，而在它们的余集上与 $d\beta(\lambda)$ 一致，同时使普通函数

$$F_m(x)=\omega_\rho(x)+\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{e^{-i\lambda x}}{P_0(\lambda)}-S_\rho(\lambda, x)\right]d\beta_m(\lambda)$$

按 $\mathbf{K}_1'$ 上弱拓扑收敛于 F。记

$$\omega_m(x)=\omega_\rho(x)-\int_{-\infty}^{\infty}S_\rho(\lambda, x)d\beta_m(\lambda),$$

那末便有

$$F_m(x)-\omega_m(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}\frac{d\beta_m(\lambda)}{P_0(\lambda)}.$$

由 Bochner 定理，$F_m(x)-\omega_m(x)$ 是正定连续函数，所以只要证明 $\omega_m(x)$ 具有不超过 n 个负二次式即可。

因为 $\omega_m(x)$ 满足 (2.10) 并且

$$\overline{\omega_m(x)} = \omega_m(-x),$$

因此 $\omega_m(x)$ 形如 (2.8)。先取 (2.8) 中形如 $e^{-iax}Q(x)(a=\lambda_\nu$ 是实数)的项来考虑。这时，$Q(x)$ 的次数不超过 $\mu = 2m_\nu - 1$，而且 $\overline{Q(x)} = Q(-\lambda)$，易知

$$(e^{-iax}Q(x))(\varphi * \varphi^*) = Q\left(i\frac{d}{d\lambda}\right)|\tilde{\varphi}(\lambda)|^2|_{\lambda=a},$$

这里 $\tilde{\varphi}$ 是 φ 的 Fourier 变换。记 $T(z) = Q(iz)$，那末 T 是实系数的 μ 次多项式。由于

$$\frac{d^p}{d\lambda^p}|\tilde{\varphi}(\lambda)|^2|_{\lambda=a} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \sum_{\nu=0}^{p} \frac{|\tilde{\varphi}(a+\nu h)|^2(-1)^{p-\nu}C_\nu^p}{h^p},$$

设 $T(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_\mu z^\mu$，那末

$$Q\left(i\frac{d}{d\lambda}\right)|\tilde{\varphi}(\lambda)|^2|_{\lambda=a} = \lim_{h\to 0}\frac{a_\mu}{h^\mu}$$

$$\times \sum_{\nu=0}^{\mu}|\tilde{\varphi}(a+\nu h)|^2(-1)^{\mu-\nu}c_\nu(h),$$

其中

$$c_\nu(h) = c_\nu^\mu - c_\nu^{\mu-1}\frac{a_{\mu-1}}{a_\mu}h + \cdots + (-1)^{\mu-\nu}\frac{a_\nu}{a_\mu}h^{\mu-\nu}.$$

当 h 充分小时,对所有的 ν，有 $c_\nu(h) > 0$。因此，$e^{-iax}Q(x)$ 显然是不超过 m_ν 个负二次式的条件正定函数。

对于 (2.8) 中形如 $e^{-i\lambda_\nu x}Q_\nu(x) + e^{-i\bar{\lambda}_\nu x}\overline{Q_\nu(-x)}$ 的项,也可类似地证明它是具有不超过 m_ν 个 (m_ν 是 $Q_\nu(x)$ 的次数)负二次式的条件正定函数。总之，$\omega_m(x)$是具有不超过 n 个负二次式的。证毕。

现在考察 F 退化成普通连续函数的情况。

设 F 是连续函数,而且 $F(x) = \overline{F(-x)}$，那末 F 作为广义函数

$$F(\varphi) = \int F(x)\varphi(x)dx$$

是 Hermite 型的。容易证明，F 具有 n 个负二次式的条件正定广义函数的充要条件是，对任一组实数 $\xi_1, \cdots, \xi_l$，二次型

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{l} F(\xi_\mu - \xi_\nu)u_\mu \bar{u}_\nu \tag{2.11}$$

的正规形式中最多含有 n 个负二次式，而且确实存在一组实数 $\xi_1, \cdots, \xi_l$，使 (2.11) 的正规形式含有 n 个负二次式。这时我们也称 $F(x)$ 是具有 n 个负二次式的条件正定连续函数.

设 $F(x)$ 是具有 n 个负二次式的条件正定连续函数，那末条件正定广义函数 F 有积分表达式 (2.8)，令

$$F_\rho(x) = F(x) - \omega_\rho(x),$$

$F_\rho(x)$ 便也是连续函数. 设 $\psi \in \mathbf{K}_1$，而且 $\tilde{\psi}(\lambda)$ 在

$$\lambda = \lambda_\nu(\nu = 1, 2, \cdots, k)$$

附近的 Taylor 展开式中最低次项为 m_ν 次时，$\tilde{\psi}(\lambda)\overline{\tilde{\psi}(\bar{\lambda})}$ 在

$$\lambda = \lambda_\nu \quad (\nu = 1, 2, \cdots, k)$$

点附近的 Taylor 展开式中最低为 $2m_\nu$ 次. 因而，如记

$$\varphi(x) = \psi(x) * \psi(x)^*,$$

则

$$F_\rho(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \varphi(x) dx \right\} \frac{d\beta(\lambda)}{P_0(\lambda)}.$$

作

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{M_\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}}, & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

此处 M_ε 是使

$$\int u_\varepsilon(x) dx = 1$$

的就范化因子. 任取有限个复数 y_μ 及实数 ξ_μ，使 $\sum_\mu y_\mu e^{-i\lambda \xi_\mu}$ 在 $\lambda = \lambda_\nu$ 的展开式中最低次项为 m_ν $(\nu = 1, 2, \cdots, k)$ 次. 因此，当取

$$\phi_\varepsilon(x) = \sum_\mu y_\mu u_\varepsilon(x - \xi_\mu)$$

时,

$$\tilde{\phi}_\varepsilon(x) = \left(\sum_\mu y_\mu e^{-i\lambda\xi_\mu}\right)\tilde{u}_\varepsilon(\lambda)$$

在λ_ν点的 Taylor 展开也是如此. 记 $\varphi_\varepsilon = \phi_\varepsilon * \phi_\varepsilon^*$, 那末

$$F_\rho(\phi_\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\sum_\mu y_\mu e^{-i\lambda\xi_\mu}\right|^2}{P_0(\lambda)} |\tilde{u}_\varepsilon(\lambda)|^2 d\beta(\lambda).$$

易知当 $\varepsilon \to 0$ 时, $\tilde{u}_\varepsilon(\lambda)$ 在任何有界区域中一致收敛于 1. 而当 $\varepsilon \to 0$ 时,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} F_\rho(\varphi_\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\iint F_\rho(y - t)\phi_\varepsilon(y)\overline{\phi_\varepsilon(t)}dy\,dt\\ &= \sum_{\mu,\nu} F_\rho(\xi_\mu - \xi_\nu)y_\mu\bar{y}_\nu,\end{aligned}$$

所以对任何有界的区间 D,

$$\begin{aligned}&\int_D \frac{\left|\sum_\mu y_\mu e^{-i\lambda\xi_\mu}\right|^2}{P_0(\lambda)} d\beta(\lambda)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_D \frac{\left|\sum_\mu y_\mu e^{-i\lambda\xi_\mu}\right|^2}{P_0(\lambda)} |\tilde{u}_\varepsilon(\lambda)|^2 d\beta(\lambda)\\ &\leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} F_\rho(\varphi_\varepsilon) = \sum_{\mu,\nu} F_\rho(\xi_\mu - \xi_\nu)y_\mu\bar{y}_\nu,\end{aligned}$$

从而

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\sum_\mu y_\mu e^{-i\lambda\xi_\mu}\right|^2}{P_0(\lambda)} d\beta(\lambda) \leqslant \sum_{\mu,\nu} F_\rho(\xi_\mu - \xi_\nu)y_\mu\bar{y}_\nu.$$

由此容易证明

$$\int_{|\lambda|>\rho} \frac{d\beta(\lambda)}{\rho_0(\lambda)} < \infty.$$

事实上,可取有限数组 $\{y_{\mu,\nu}\}$, $\{\xi_{\mu,\nu}\}$, 使得

$$\sum_{\mu} y_{\mu,\nu} e^{-i\lambda\xi_{\mu,\nu}} = R_\nu(\lambda)$$

在点 λ_ν 有 m_ν 次零点。然而 $\sum_\nu |R_\nu(\lambda)|^2$ 在 $|\lambda|>\rho$ 中有下界 A，于是

$$A\int_{|\lambda|>\rho}\frac{d\beta(\lambda)}{P_0(\lambda)}\leqslant\sum_{\mu,\mu',\nu}F(\xi_{\mu,\nu}-\xi_{\mu',\nu})y_{\mu,\nu}\overline{y_{\mu',\nu}},$$

所以积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{e^{-i\lambda x}}{P_0(\lambda)}-S_\rho(\lambda,x)\right]d\beta(\lambda)$ 绝对收敛，而且 (2.9) 中对 x 的积分和对 λ 的积分可交换顺序。这样得到定理 2.3 的如下推论。

推论 2.4 设 $F(x)$ 是具 n 个负二次式的条件正定连续函数，那末必有多项式 $Q(\lambda)$，使得 $Q\left(i\frac{d}{dx}\right)\overline{Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)}F$ 是正定广义函数。同时

$$F(x)=\omega_\rho(x)+\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{e^{-i\lambda x}}{P_0(\lambda)}-S_\rho(\lambda,x)\right]d\beta(\lambda),\quad(2.12)$$

这里 $d\beta(\lambda)$，$P_0(\lambda)$，$S_\rho(\lambda,x)$，$\omega_\rho(\lambda)$ 的意义同定理 2.3.

反之，任何形如 (2.12) 的连续函数 $F(x)$ 必是具有不超过 n 个负二次式的条件正定函数。

3.条件正定双线性泛函 比条件正定广义函数稍为更一般的是所谓条件正定双线性泛函。设 $K(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{K}_m$ 上双线性泛函，如果对固定的 $\psi\in\mathbf{K}_m$，$K(\cdot,\psi)\in\mathbf{K}_m'$；对固定的 $\varphi\in\mathbf{K}_m$，$\overline{K(\varphi,\cdot)}\in\mathbf{K}_m'$；那末称 $K(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{K}_m$ 上连续双线性泛函。如果 $\mathbf{K}_m$ 上双线性泛函 $K(\cdot,\cdot)$ 满足

$$K(\varphi,\psi)=\overline{K(\psi,\varphi)}\quad(\varphi,\psi\in\mathbf{K}_m),$$

那末称 $K(\cdot,\cdot)$ 是 Hermite 的。设 $h=(h_1,\cdots,h_m)$，记

$$(\varphi_h)(x)=\varphi(x+h),$$

如果 $\mathbf{K}_m$ 上双线性泛函 $K(\cdot,\cdot)$ 满足

$$K(\varphi,\psi)=K(\varphi_h,\psi_h),\ h\in\mathbf{R}^m,\ \varphi,\psi\in\mathbf{K}_m,$$

那末称 $K(\cdot,\cdot)$ 是平移不变的。再引入如下定义。

定义 2.3 设 $K(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{K}_m$ 上连续的双线性 Hermite 泛函，如果它在某个亏维数为 n 的一个平移不变的闭线性子空间 H 上是正定的，并且 $K(\cdot,\cdot)$ 在 H 上是平移不变的，则称 $K(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{K}_m$ 上条件正定双线性泛函。

由前面讨论可知，在 $\mathbf{K}_1$ 的情况下，必存在一个 n 次多项式 $Q(\lambda)$，使得

$$H = Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\mathbf{K}_1.$$

容易知道，

$$K_Q(\varphi,\psi) = K\left(Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\varphi,\ Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\psi\right)$$

在整个 $\mathbf{K}_1$ 上是平移不变的，并且是正定的。

定理 2.5 设 $K(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{K}_1$ 上条件正定双线性泛函。对

$$Q(\lambda) = \prod_{\nu=1}^{p}(\lambda-\lambda_\nu)^{m_\nu}$$

$(I_m\lambda_\nu = 0,\ 1\leqslant\nu\leqslant k;\ I_m\lambda_\nu \neq 0,\ k+1\leqslant\nu\leqslant p)$，$K_Q(\cdot,\cdot)$为平移不变且正定。那末对任何 φ，$\psi\in\mathbf{K}_1$，

$$\begin{aligned} K(\varphi,\psi) = &\int_{(-\infty,\infty)-\{\lambda_\nu|1\leqslant\nu\leqslant k\}}\tilde{\varphi}_0(\lambda)\overline{\tilde{\psi}_0(\lambda)}d\beta(\lambda) \\ &+\sum_{\nu=1}^{k}a_\nu b_{\nu m_\nu}\bar{c}_{\nu m_\nu} \\ &+\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{j=0}^{m_\nu-1}[b_{\nu j}\overline{L_{\nu j}(\psi)}+\bar{c}_{\nu j}L_{\nu j}(\varphi)] \\ &+\sum_{\mu,\nu=1}^{p}\sum_{i=0}^{m_\mu-1}\sum_{j=0}^{m_\nu-1}b_{\mu i}\bar{c}_{\nu j}A_{\mu\nu ij}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

这里 $d\beta(\lambda)$ 是直线上一个正测度，适合

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\beta(\lambda)}{1+|\lambda|^N}<\infty$$

(N 是某个自然数)，并且存在 $\varepsilon > 0$，使得

$$\int_{\bigcup_{\nu=1}^{k}\{\lambda|0<|\lambda-\lambda_\nu|<\varepsilon\}} Q(\lambda)\overline{Q(\lambda)}d\beta(\lambda) < \infty,$$

$a_\nu \geqslant 0$，$L_{\nu j}$ 是 $\mathbf{K}_1$ 上线性泛函，$A_{\mu\nu i l} = \bar{A}_{\mu\nu i l}$。又记

$$Q_\nu(\lambda) = \frac{Q(\lambda)}{(\lambda - \lambda_\nu)^{m_\nu}},$$

有

$$b_{\nu j} = \left[\frac{\tilde{\varphi}(\lambda)}{Q_\nu(\lambda)}\right]^{(j)}_{\lambda=\lambda_\nu}, \quad c_{\nu j} = \left[\frac{\tilde{\psi}(\lambda)}{Q_\nu(\lambda)}\right]^{(j)}_{\lambda=\lambda_\nu},$$

而 $\tilde{\varphi}$，$\tilde{\psi}$ 是 φ，ψ 的 Fourier 变换，

$$\varphi_0(x) = \varphi(x) - \sum_{\nu=1}^{p}\sum_{j=0}^{m_\nu-1} b_{\nu j}\varphi_{\nu j}(x),$$

$$\psi_0(x) = \psi(x) - \sum_{\nu=1}^{p}\sum_{j=0}^{m_\nu-1} c_{\nu j}\varphi_{\nu j}(x),$$

其中 $\varphi_{\nu j} \in \mathbf{K}_1$ 满足

$$\left[\frac{\tilde{\varphi}_{\nu j}(\lambda)}{Q_\mu(\lambda)}\right]^{(l)}_{\lambda=\lambda_\mu} = \delta_{\mu\nu}\delta_{jl},$$

$\tilde{\varphi}_0$，$\tilde{\psi}_0$，$\tilde{\varphi}_{\nu j}$ 分别为 φ_0，ψ_0，$\varphi_{\nu j}$ 的 Fourier 变换。

反之，如果 $K(\cdot,\cdot)$ 具有 (2.13) 的表达式，那末它必是条件正定连续双线性泛函。

证 首先利用一个已知的事实：即 $\mathbf{K}_1$ 上任何对平移不变的 Hermite 连续双线性泛函均可写成 $(F, \varphi * \psi^*)$ 的形式，此处 $F \in \mathbf{K}_1'$。因为 $K_Q(\cdot,\cdot)$ 是平移不变的，所以存在 $F_Q \in \mathbf{K}_1'$，使得 $K_Q(\varphi, \psi) = F_Q(\varphi * \psi^*)(\varphi, \psi \in \mathbf{K}_1)$。对 $\chi \in \mathbf{K}_1$，定义

$$F\left(Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\bar{Q}\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\chi\right) = F_Q(\chi),$$

这样的 F 定义在

$$H_1 = Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\bar{Q}\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\mathbf{K}_1$$

上。由定理 2.2，H_1 的亏维数为

$$n = 2\sum_{\nu=1}^{p} m_\nu.$$

将 F 延拓到整个 $\mathbf{K}_1$ 上(延拓方式只要保持线性即可)，延拓后仍记为 F，显然 $F \in \mathbf{K}_1'$. 由于

$$\left(Q\left(i\frac{d}{dx}\right)\bar{Q}\left(i\frac{d}{dx}\right)F\right)(\varphi * \psi^*) = F\left(Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\right.$$

$$\left.\times \bar{Q}\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)(\varphi * \psi^*)\right) = K_Q(\varphi, \psi),$$

因此 $Q\left(i\frac{d}{dx}\right)\bar{Q}\left(i\frac{d}{dx}\right)F$ 是 $\mathbf{K}_1$ 上正定广义函数. 由正定广义函数的 Bochner 定理，存在直线上正则度 $d\alpha(\lambda)$，并适合

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha(\lambda)}{1+|\lambda|^N} < \infty,$$

(N 是某个正整数)，使得

$$F\left(Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\bar{Q}\left(i\frac{d}{dx}\right)\varphi\right) = \left(Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\bar{Q}\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)F\right)(\varphi)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(\lambda)d\alpha(\lambda),$$

这里 $\tilde{\varphi}$ 是 φ 的 Fourier 变换. 设 $\varphi \in H_1$，易知

$$F(\varphi) = \int \tilde{\varphi}(\lambda)\frac{d\alpha(\lambda)}{Q(\lambda)\bar{Q}(\lambda)},$$

记 $S_0 = (-\infty, \infty) - \{\lambda_\nu | \nu = 1, 2, \cdots, k\}$，注意到 $\lambda_\nu (\nu = 1, 2, \cdots, k)$ 是 $\tilde{\varphi}(\lambda)$ 的不低于 $2m_\nu$ 次的零点，所以

$$\lim_{\lambda\to\lambda_\nu}\frac{\tilde{\varphi}(\lambda)}{Q(\lambda)\bar{Q}(\lambda)} = \frac{\tilde{\varphi}^{(2m_\nu)}(\lambda_\nu)}{(2m_\nu)!\,Q_\nu(\lambda_\nu)\bar{Q}_\nu(\lambda_\nu)}.$$

记

$$d\beta(\lambda) = \frac{d\alpha(\lambda)}{Q(\lambda)\bar{Q}(\lambda)},$$

即得

$$F(\varphi) = \int_{S_0}\tilde{\varphi}(\lambda)d\beta(\lambda) + \sum_{\nu=1}^{k}\alpha(\lambda_\nu)\frac{\tilde{\varphi}^{(2m_\nu)}(\lambda\nu)}{(2m_\nu)!\,Q_\nu(\lambda)\bar{Q}_\nu(\lambda_\nu)}.$$

当 $\varphi, \psi \in Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\mathbf{K}_1$ 时，有 $\varphi * \psi^* \in H_1$. 设

$$\varphi = Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\varphi_1, \quad \psi = Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\psi_1,$$

$$K(\varphi, \psi) = K_Q(\varphi_1, \psi_1) = F\left(Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\bar{Q}\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)(\varphi_1 * \psi_1^*)\right.$$

$$= F(\varphi * \psi^*) = \int_{S_0} \tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\varphi}(\bar{\lambda})}d\beta(\lambda)$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{k}\sum_{i=0}^{2m_\nu}\frac{\alpha(\lambda_\nu)c_{2m_\nu}^{i}\tilde{\varphi}^{(i)}(\lambda_\nu)\overline{\tilde{\psi}^{(2m_\nu-i)}(\lambda\nu)}^*}{(2m_\nu)!Q_\nu(\lambda_\nu)\bar{Q}_{\nu_\nu}(\lambda_\nu)}$$

$$= \int_{S_0} \tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\psi}(\bar{\lambda})}d\beta(\lambda)$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{k}\frac{\alpha(\lambda_\nu)}{(2m_\nu)!}\left[\frac{\tilde{\varphi}(\lambda)}{Q_\nu(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_\nu}^{(m_\nu)}\left[\frac{\overline{\tilde{\psi}(\lambda)}}{Q_\nu(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_\nu}^{(m_\nu)}.$$

为了得到 $K(\varphi,\psi)$ 在整个$\mathbf{K}_1$上的积分表示，再建立两个引理. 记

$$\mathbf{K}_{10} = \{\varphi \mid \varphi \in \mathbf{K}_1, \quad \left[\frac{\tilde{\varphi}(\lambda)}{Q_\nu(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_\nu}^{(j)} = 0,$$
$$0 \leqslant j \leqslant m_\nu - 1, \ 1 \leqslant \nu \leqslant p\}.$$

引理 2.6 $Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_{10}$.

证 首先，易知 $Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\mathbf{K}_1 \subset \mathbf{K}_{10}$.

反之，设 $\varphi \in \mathbf{K}_{10} \subset \mathbf{K}_1$, 那末 $\frac{\tilde{\varphi}(\lambda)}{Q_\nu(\lambda)}$ 是至多以 $\lambda_\mu(\mu \neq \nu)$ 为极点且在 λ_ν 处零点次数不低于 m_ν 的半纯函数，因此可写成

$$\frac{\tilde{\varphi}(\lambda)}{Q_\nu(\lambda)} = (\lambda - \lambda_\nu)^{m_\nu}\varphi_\nu(\lambda),$$

其中 $\varphi_\nu(\lambda)$ 是至多以 $\lambda_\mu(\mu \neq \nu)$ 为极点的半纯函数。又

$$\frac{\tilde{\varphi}(\lambda)}{Q(\lambda)} = \varphi_\nu(\lambda),$$

即 $\varphi_\nu(\lambda)$ 实际上与 ν 无关，因而它是整函数. 由 $\varphi\in\mathbf{K}_1$ 可知，存在 $\varphi_0\in\mathbf{K}_1$，使 $\tilde{\varphi}_0(\lambda)=\varphi_\nu(\lambda)$，于是

$$\varphi=Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\varphi_0\in Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\mathbf{K}_1.$$

证毕.

引理 2.7 存在序列 $\{\varphi_{\mu\nu}\}\subset\mathbf{K}_1(0\leqslant\nu\leqslant m_\mu,\ 1\leqslant\mu\leqslant p)$，使得

$$\left[\frac{\tilde{\varphi}_{\mu l}}{Q_\nu}\right]^{(j)}_{\lambda=\lambda_\nu}=\delta_{\mu\nu}\delta_{jl}.$$

证 取 $\chi\in\mathbf{K}_1$，使 $\tilde{\chi}(\lambda_\nu)\neq0(1\leqslant\nu\leqslant p)$，作

$$\phi_{\nu k'}=\prod_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq\nu}}^{p}\left(\frac{1}{i}\ \frac{d}{dx}-\chi_\alpha\right)^{m_\alpha+1}\left(\frac{1}{i}\ \frac{d}{dx}-\lambda_\nu\right)^{k'}\chi,$$

经直接验证易知

$$\left[\frac{\phi_{\nu k'}}{Q_\mu}\right]^{(j)}_{\lambda_\mu}\begin{cases}=0, & \mu\neq\nu\ \text{且}\ j\leqslant m_\mu,\\ & \text{或}\ \mu=\nu\ \text{且}\ j\leqslant k'\\ \neq0, & \mu=\nu,\ j=k'.\end{cases}$$

再作

$$\varphi_{\nu m}=\sum_{l=0}^{m_\nu}\alpha_{\nu l}^{(m)}\phi_{\nu l}\ (0\leqslant m\leqslant m_\nu,\ 1\leqslant\nu\leqslant p),$$

那末

(i) 对任何一组 $\{\alpha_{\nu l}^{(m)}|l=0,1,\cdots,m_\nu\}$ 有

$$\left[\frac{\tilde{\varphi}_{\nu m}}{Q_\mu}\right]^{(j)}_{\lambda_\mu}=0(\mu\neq0,\ 0\leqslant j\leqslant m_\mu).$$

(ii) 存在一组 $\{\alpha_{\nu l}^{(m)}|l=0,1,\cdots,m_\nu\}$，使

$$\left[\frac{\tilde{\varphi}_{\nu m}}{Q_\nu}\right]^{(j)}_{\lambda_\nu}=\delta_{jm}\ (0\leqslant j\leqslant m_\nu),$$

即

$$\sum_{l=0}^{m_\nu}\left[\frac{\tilde{\phi}_{\nu l}}{Q_\nu}\right]^{(j)}_{\lambda_\nu}\alpha_{\nu l}^{(m)}=\delta_{jm}.$$

这是因为相应的系数阵$\left(\left[\frac{\tilde{\Phi}_{\nu l}}{Q_\nu}\right]_{\lambda_\nu}^{(j)}\right)$$(l,\ j=0,1,\cdots,m_\nu)$是上三角阵，主对角线上元

$$\left[\frac{\tilde{\Phi}_{\nu l}}{Q_\nu}\right]_{\lambda_\nu}^{(l)} \neq 0.$$

在 (ii) 中取 $0 \leqslant m \leqslant m_\nu$，$1 \leqslant \nu \leqslant p$ 得到一列 $\{\varphi_{\nu m}\}$，由 (i)，(ii) 即知它们满足引理的要求．证毕．

现在继续证明定理 2.5.

对任意的 $\varphi \in \mathbf{K}_1$，利用引理2.7的 $\{\varphi_{\nu m}\}$，作

$$\varphi_0(x) = \varphi(x) - \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{j=0}^{m_\nu} \left[\frac{\tilde{\varphi}}{Q_\nu}\right]_{\lambda_\nu}^{(j)} \varphi_{\nu j}(x),$$

于是有

$$\left[\frac{\tilde{\varphi}_0}{Q_\mu}\right]_{\lambda_\mu}^{(k')} = 0,\ 0 \leqslant k' \leqslant m_\mu - 1,\ 1 \leqslant \mu \leqslant p.$$

由引理 2.6,

$$\varphi_0 \in Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\mathbf{K}_1.$$

另外，对 $1 \leqslant \mu \leqslant p$，有

$$\left[\frac{\tilde{\varphi}_0}{Q_\mu}\right]_{\lambda_\mu}^{(m_\mu)} = \left[\frac{\tilde{\varphi}}{Q_\mu}\right]_{\lambda_\mu}^{(m_\mu)}.$$

对 $\varphi, \psi \in \mathbf{K}_1$，记

$$b_{\nu j} = \left[\frac{\tilde{\varphi}}{Q_\nu}\right]_{\lambda_\nu}^{(j)},\quad c_{\nu j} = \left[\frac{\tilde{\psi}}{Q_\nu}\right]_{\lambda_\nu}^{(j)}.$$

由上面的证明有

$$\varphi_0(x) = \varphi(x) - \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{j=0}^{m_\nu-1} b_{\nu j}\varphi_{\nu j}(x) \in Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\mathbf{K}_1,$$

$$\psi_0(x) = \psi(x) - \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{j=0}^{m_\nu-1} c_{\nu j}\varphi_{\nu j}(x) \in Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\mathbf{K}_1.$$

因为 $K(\cdot,\cdot)$ 是连续双线性泛函，并且是 Hermite 的，所以

$$K(\varphi, \psi) = K(\varphi_0, \psi_0) + \sum_{\nu} \sum_{j} [b_{\nu j} K(\varphi_{\nu j}, \varphi_0)$$
$$+ \bar{c}_{\nu j} K(\varphi_0, \varphi_{\nu j})] + \sum_{\mu,\nu} \sum_{i} \sum_{j} b_{\mu i} \bar{c}_{\nu j}$$
$$\times K(\varphi_{\mu i}, \varphi_{\nu j}),$$

而

$$K(\varphi_0, \psi_0) = \int_{S_0} \tilde{\varphi}_0(\lambda) \overline{\tilde{\psi}_0(\lambda)} d\beta(\lambda) + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\alpha(\lambda_\nu)}{(2m_\nu)!} b_{\nu m_\nu} \bar{c}_{\nu m_\nu}.$$

对固定的 ν 与 j, $K(\varphi_0, \varphi_{\nu j})$ 是 $\mathbf{K}_1$ 上连续线性泛函,记为 $L_{\nu j}(\varphi)$,这时

$$K(\varphi_{\nu j}, \psi_0) = \overline{L_{\nu j}(\psi)}.$$

再注意到

$$K(\varphi_{\mu i}, \varphi_{\nu j}) = \overline{K(\varphi_{\nu j}, \varphi_{\mu i})},$$

即得 $K(\varphi, \psi)$ 的形式是 (2.13).

反之,当 $K(\varphi, \psi)$ 形为 (2.13) 时,可直接验证它是连续的条件正定双线性泛函. 证毕.

4. 多元条件正定广义函数 多元条件正定广义函数的情况是比较复杂的. 这里将分别给出具有 n 个负二次式的条件正定广义函数及在具有有限亏维数的平移不变子空间上正定的条件正定广义函数的积分表示. 虽然由于定理 2.1 后者的积分表示适用于前者,但是,由于方法及表示形式的区别,我们将首先写出具有 n 个负二次式的条件正定广义函数的积分表示.

引理 2.8 设 $F \in \mathbf{K}'_m$ 是具有 n 个负二次式的条件正定广义函数. 那末,对任何一组数 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \in \mathbf{R}^m$,

$$\sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu^2 = 1,$$

必有一个变数 z 的 n 次多项式 $Q_\alpha(z)$, 使得 F 在闭线性子空间

$$H_\alpha = Q_\alpha\left(\frac{1}{i} \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial x}\right) \mathbf{K}_m{}^{1)}$$

---

1) $\alpha \cdot \dfrac{\partial}{\partial X} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \dfrac{\partial}{\partial X_j}$.

上正定。

证 由定理 2.1，存在亏维数为 n 的平移不变子空间 H，F 在其上正定．对任何一组 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$，

$$\sum_{\nu=1}^{m}\alpha_\nu^2=1,$$

当 $\varphi\in H$ 时，$\varphi(x+t\alpha)\in H$，$t\in\mathbf{R}$，因此

$$\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial x}\varphi\in H.$$

仿定理 2.2 的证明，可以得到对 n 次多项式 Q_α，有

$$H\supset Q_\alpha\left(\frac{1}{i}\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{K}_m.$$

这样，F 在子空间

$$H_\alpha=Q_\alpha\left(\frac{1}{i}\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{K}_m$$

上是正定的．证毕。

值得注意的是，H_α 的亏维数不是有限的，因此 $H_\alpha\neq H$.

现在，我们来研究 F 的形式。

对 $\varphi\in\mathbf{K}_m$，记它的 Fourier 变换为 $\tilde{\varphi}$，$\mathbf{K}_m$ 的 Fourier 变换记为 $\mathbf{Z}_m$，$\tilde{H}_\alpha$ 是H_α中函数的 Fourier 变换全体．显然，

$$\tilde{H}_\alpha=Q_\alpha(\alpha\cdot\lambda)^{1)}\mathbf{Z}_m.$$

定义 $\mathbf{Z}_m$ 上的广义函数 $\tilde{F}$ 为 $\tilde{F}(\tilde{\varphi})=F(\varphi)$.

首先写出 $\tilde{F}$ 在 $Q_\alpha(\alpha\cdot\lambda)\bar{Q}_\alpha(\alpha\cdot\lambda)\mathbf{Z}_m$ 上的积分表示．因为 F 在H_α上正定，所以当 $\Phi\in\mathbf{Z}_m$ 时，

$$\tilde{F}(Q_\alpha(\alpha\cdot\lambda)\bar{Q}_\alpha(\alpha\cdot\lambda)\Phi(\lambda)\bar{\Phi}(\lambda))\geqslant 0.$$

记

$$F_\alpha(\Psi(\lambda))=\tilde{F}(Q_\alpha(\alpha\cdot\lambda)\bar{Q}_\alpha(\alpha\cdot\lambda)\Psi(\lambda)),\qquad(2.14)$$

这样就得到 $\mathbf{Z}_m$ 上的一个正定广义函数．由 Bochner 定理，有正测度 $d\mu_\alpha(\lambda)$，它满足

1) $\alpha\cdot\lambda=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\lambda_j$.

$$\int \frac{d\mu_\alpha(x)}{1+|\lambda|^{n_\alpha}} < \infty$$

(n_α 为某个正整数)，

$$|\lambda|^2 = \sum_{\nu=1}^{m} |\lambda_\nu|^2,$$

使得

$$F_\alpha(\Psi(\lambda)) = \int \Psi(\lambda) d\mu_\alpha(\lambda). \tag{2.15}$$

记 $\mathbf{R}^m$ 上单位球面为 S_m，对 $\alpha,\ \beta \in S_m$，由 (2.14) 及 (2.15) 有

$$\begin{aligned}
&\int \Psi(\lambda) Q_\beta(\beta\cdot\lambda)\overline{Q}_\beta(\beta\cdot\lambda) d\mu_\alpha(\lambda) \\
&\quad = \tilde{F}(Q_\beta(\beta\cdot\lambda)\overline{Q}_\beta(\beta\cdot\lambda)Q_\alpha(\alpha\cdot\lambda) \\
&\quad\quad \overline{Q}_\alpha(\alpha\cdot\lambda)\Psi(\lambda)) \\
&\quad = \int \Psi(\lambda) Q_\alpha(\alpha\cdot\lambda)\overline{Q}_\alpha(\alpha\cdot\lambda) d\mu_\beta(\lambda),\ \Psi(\lambda)\in \mathbf{Z}_m.
\end{aligned}$$

因此，有

$$\frac{d\mu_\alpha(\lambda)}{|Q_\alpha(\alpha\cdot\lambda)|^2} = \frac{d\mu_\beta(\lambda)}{|Q_\beta(\beta\cdot\lambda)|^2}, \tag{2.16}$$

这就是说，$\dfrac{d\mu_\alpha(\lambda)}{|Q_\alpha(\alpha\cdot\lambda)|^2}$ 与 α 无关，因此记作 $d\mu(\lambda)$. 由 (2.14)—(2.16) 知道，对任何 α 及任何 $\Psi\in\mathbf{Z}_m$，成立

$$\tilde{F}(Q_\alpha(\alpha\cdot\lambda)\overline{Q}_\alpha(\alpha\cdot\lambda)\Psi(\lambda)) = \int Q_\alpha(\alpha\cdot\lambda)\overline{Q}_\alpha(\alpha\cdot\lambda)\Psi(\lambda) d\mu(\lambda).$$

其次，讨论使 $d\mu(\lambda)$ 出现奇性的点. 记

$$P_\alpha(\alpha\cdot\lambda) = Q_\alpha(\alpha\cdot\lambda)\overline{Q}_\alpha(\alpha\lambda)$$

$$W_\alpha = \{\lambda \mid \lambda\in\mathbf{C}^m,\ P_\alpha(\alpha\cdot\lambda) = 0\},$$

$$W = \bigcap_\alpha W_\alpha.$$

今证 W 中点不多于 $2n$ 个.

设 $P_\alpha(t)$ 的零点为 $t_1^{(\alpha)},\ \cdots,\ t_{p\alpha}^{(\alpha)}$，次数分别为 $m_1^{(\alpha)},\ \cdots,\ m_{p\alpha}^{(\alpha)}$. 记 $e_\mu = (\delta_{\mu\nu})(\nu = 1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，于是

$$W_{e_\mu} = \{\lambda \mid \lambda\in\mathbf{C}^m,\ P_{e_\mu}(e_\mu\cdot\lambda)=0\}=\{\lambda_\mu = t_\nu^{(e_\mu)} e_\mu \mid 1 \leqslant \nu \leqslant p_{e_\mu}\}.$$

显然，有

$$W \subset \sum_{\mu=1}^{m} W^{e_\mu}.$$

而右边的点集至多含有 $\prod_{\mu=1}^{m} p^{e_\mu}$ 个点，因此，W是有限集．设

$$W = \{b_1, \cdots, b_p\},$$

于是对任何 $\alpha \in S_m$，有 $P_\alpha(\alpha \cdot b_\nu)=0\ (1 \leqslant \nu \leqslant p)$，即

$$\{\alpha \cdot b_\nu | \nu = 1, 2, \cdots, p\}$$

是 $P_\alpha(t) = 0$ 的根．现在再证存在 $\alpha \in S_m$，使得 $\{\alpha \cdot b_\nu\}$ 各不相同，这样就有

$$\sum_{\nu=1}^{p} m_\nu^{(\alpha)} \leqslant 2n.$$

如此的 α 存在性的证明如下：记

$$E_{kl} = \{\alpha | \alpha \in S_m, (b_k - b_l) \cdot \alpha = 0\}, \ E = \bigcup_{k \neq l} E_{kl},$$

这是 $m-1$ 维面 S_m 中至多是 $m-2$ 维的集，所以 $S_m - E$ 非空．显然，取 $\alpha \in S_m - E$ 即可．

设 $b_1, \cdots, b_l$ 是W中实点全体，易知只有在这些点上 $d\mu(\lambda)$ 才出现奇性．现来确定奇性的阶数．

设 $V_{\nu,k} = \{\alpha | \alpha \in S_m, m_\nu^{(\alpha)} = k\}$．对任何固定的 ν，有

$$S_m = \bigcup_{k=1}^{2n} V_{\nu,k}. \tag{2.17}$$

在 $V_{\nu,1}, \cdots, V_{\nu,m}$ 中可能有些 $V_{\nu,k}$ 完全含在某个过原点的 $m-1$ 维超平面上，这些超平面的和集记为 D_ν．另一方面，E是 S_m 和有限个 $m-2$ 维或 $m-1$ 维的过原点的超平面的交集，因此，$M_\nu = S_m-(D_\nu \cup E)$ 在 S_m 上稠密．由(2.17)，必有 k，使得 $V_{\nu k} \cap M_\nu \neq \Phi$．记这种 k 中的最小值为 m_ν．于是，在 V_{ν,m_ν} 上可以取到不在同一个过原点的 $m-1$ 维超平面上的m个点 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$，这样，有

$$N_\nu = \inf_{W \in S_m} \sum_{\mu=1}^{m} |W \cdot \alpha_\mu|^{m_\nu} > 0.$$

因为 b_ν 是 $P_{\alpha_\mu}(\alpha_\mu \cdot \lambda)$ 的 m_ν 次零点，所以存在常数 $Q_\nu > 0$；当 λ 在 b_ν 的一个在 $\mathbf{R}^m$ 中的小环境中变动时，有

$$\begin{aligned}\sum_{\mu=1}^{m} |Q_{\alpha_\mu}(\alpha_\mu \cdot \lambda)|^2 &= \sum_{\mu=1}^{m} P_{\alpha_\mu}(\alpha_\mu \cdot \lambda) \\ &\geqslant Q_\nu \sum_{\mu=1}^{m} |(\lambda - b_\nu) \cdot \alpha_\nu|^{m_\nu} \\ &\geqslant N_\nu Q_\nu |\lambda - b_\nu|^{m_\nu}.\end{aligned}$$

此时，再利用 (2.16) 得到

$$\begin{aligned}|\lambda - b_\nu|^{m_\nu} d\mu(\lambda) &= |\lambda - b_\nu|^{m_\nu} \frac{\sum_{\nu=1}^{m} d\mu_{\alpha_\nu}}{\sum_{\mu=1}^{m} |Q_{\alpha_\mu}(\alpha_\mu \cdot \lambda)|^2} \\ &\leqslant Q_\nu N_\nu \sum_{\nu=1}^{m} d\mu_{\alpha_\nu}(\lambda).\end{aligned}$$

因此，

$$d\beta(\lambda) = \prod_{\nu=1}^{l} |\lambda - b_\nu|^{m_\nu} d\mu(\lambda)$$

是一个普通的正测度.

现在仿定理 2.3 的方法在 $\mathbf{K}_m$ 上作广义函数 R_ρ 如下，记

$$U_\nu(\lambda, x) = e^{-ib_\nu \cdot x} \sum_{t=0}^{m_\nu - 1} \frac{1}{t!} (-i(\lambda - b_\nu) \cdot x)^t,$$

取 $\rho > 0$，使得

$$\rho < \frac{1}{2} \min_{\mu \neq \nu} |b_\mu - b_\nu|.$$

作函数 $Q_\rho(S)$ 如下，

$$Q_\rho(S) = \begin{cases} 1, & S < \rho \\ 0, & S \geqslant \rho \end{cases}$$

再作函数

$$S_\rho(\lambda\cdot\alpha)=\sum_{\nu=1}^{l}U_\nu(\lambda\cdot\alpha)Q_\rho(|\lambda-b_\nu|).$$

对 $\varphi\in\mathbf{K}_m$，定义

$$F_\rho(\varphi)=\int\left\{\int\frac{\{e^{-i\lambda\cdot x}-S_\rho(\lambda\cdot x)}{\prod_{\nu=1}^{l}|\lambda-b_\nu|^{m_\nu}}\varphi(x)dx\right\}d\beta(\lambda).$$

当 $\alpha\in\bigcap_{\nu=1}^{l}M_\nu$ 时，$P_\alpha(t)$ 在 $\alpha-b_\nu$ 点具有不少于 m_ν 次的零点，所以

$$P\left(i\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)U_\nu(\lambda\cdot x)=0,$$

从而得到

$$\begin{aligned}F_\rho\left(P_\alpha\left(\frac{1}{i}\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi\right)&=\int\left\{\int\frac{e^{-i\lambda\cdot x}-S_\rho(\lambda\cdot x)}{\prod_{\nu=1}^{l}|\lambda-b_\nu|^{m_\nu}}\right.\\&\quad\times P_\alpha\left(\frac{1}{i}\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi(x)dx\Big\}d\beta(\lambda)\\&=\int\left\{\int\phi(x)P_\alpha\left(i\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\frac{e^{-i\lambda\cdot x}-S_\rho(\lambda\cdot x)}{\prod_{\nu=1}^{l}|\lambda-b_\nu|^{m_\nu}}\right]dx\right\}\\&\quad\times d\beta(\lambda)=\int P_\alpha(\alpha\cdot\lambda)\tilde{\phi}(\lambda)d\mu(\lambda)\\&=F\left(P_\alpha\left(\frac{1}{i}\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi\right).\end{aligned}\tag{2.18}$$

记 $T=F-F_\rho$，由 (2.17) 知道，当 $\alpha\in\bigcap_{\nu=1}^{l}M_\nu$ 时，

$$P_\alpha\left(i\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)T=0.\tag{2.19}$$

现在来讨论 T 的形式。我们有如下引理。

引理 2.9 设 T 是 $\mathbf{K}_m$ 上广义函数，如果有 m 个多项式

$P_1(t), \cdots, P_m(t)$ 及 m 个互相垂直的方向 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$，使得

$$P_\nu\left(\alpha_\nu \cdot \frac{\partial}{\partial x}\right) T = 0. \tag{2.20}$$

那末 T 必是普通函数，其形式为

$$T = \sum_{\nu=1}^{N} e^{-i\alpha_\mu \cdot x} Q_\nu(x), \tag{2.21}$$

这里 $Q_\nu(x)$ 是 x 的多项式。

证 只要经过转轴，就可以假设 $\alpha_\nu = e_\nu$，因此 (2.20) 成为

$$P_\nu\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right) T = 0. \tag{2.22}$$

今对 m 用归纳法来证明引理成立。

设 $y_1(x_1), \cdots, y_k(x_1)$ 是微分方程

$$P_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) y(x_1) = 0$$

的基本解组。作广义函数 $u_1, \cdots, u_k$，使得

$$\sum_{\nu=1}^{m} u_\nu y_\nu^{(\mu)}(x_1) = \frac{\partial^\mu}{\partial x_1^\mu} T, \quad \mu = 0, 1, \cdots, k-1. \tag{2.23}$$

由于行列式 $\det(y_\nu^{(\mu)}(x_1)) \neq 0$，所以由 (2.23) 可唯一确定 $u_1, \cdots, u_k$。不妨设

$$u_\nu = \sum_{\mu=0}^{k-1} y_{\mu\nu}(x_1) \frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} T,$$

这里 $\{y_{\mu\nu}(x_1)\}$ 是 k^2 个解析函数。对 (2.23) 施行运算 $\frac{\partial}{\partial x_1}$，并利用 (2.22) 就得到

$$\sum_{\nu=1}^{k} y_\nu^{(\mu)}(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} u_\nu = 0, \quad \mu = 0, 1, \cdots, k-1.$$

由此得到

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial x_1} = 0, \quad \nu = 1, 2, \cdots, k.$$

当 $m = 1$ 时，得 u_1 是常数，引理成立。设对 $m-1$ 时引理

已成立，由

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial x_1}=0$$

知道，u_ν 是 $m-1$ 个变数的广义函数，即当

$$\int \varphi(x_1,\cdots,x_m)dx_1=0$$

时，$u_\nu(\varphi)=0$。对 $\varphi\in K_m$，作

$$\hat{\varphi}(x_2,\cdots,x_m)=\int \varphi(x_1,\cdots,x_m)dx_1\in K_{m-1},$$

定义 $\hat{u}_\nu\in K'_{m-1}$ 为 $\hat{u}_\nu(\hat{\varphi})=u_\nu(\varphi)$，易知这是一意确定的。当 $\mu\geqslant 2$ 时，有

$$\begin{aligned}\left(P_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)\hat{u}_\nu\right)(\hat{\varphi})&=\hat{u}_\nu\left(P_\mu\left(-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)\hat{\varphi}\right)\\&=u_\nu\left(P_\mu\left(-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)\varphi\right)\\&=\left(P_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)u_\nu\right)(\varphi)\\&=\sum_{i=0}^{k-1}\left[y_{i\nu}(x_1)\frac{\partial^i}{\partial x_1^i}P_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)T\right](\varphi)\\&=0,\end{aligned}$$

所以

$$P_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)\hat{u}_\nu=0,\quad \mu=2,\cdots,m.$$

由归纳法假设，$\hat{u}_\nu$ 是普通函数，而且是有限个以 $x_2,\cdots,x_m$ 为变元的指数函数与多项式乘积之和，记为 $u_\nu(x_2,\cdots,x_m)$。因此

$$\begin{aligned}u(\varphi)=\hat{u}(\hat{\varphi})&=\int u_\nu(x_2,\cdots,x_m)\hat{\varphi}(x_2,\cdots,x_m)dx_2\cdots dx_m\\&=\int u_\nu(x_2,\cdots,x_m)\varphi(x_1,\cdots,x_m)dx_1\cdots dx_m,\end{aligned}$$

从而有

$$T(\varphi)=\int\sum_{\nu=1}^{k}y_\nu(x_1)u_\nu(x_2,\cdots,x_m)\varphi(x_1,\cdots,x_m)dx_1,\cdots dx_m.$$

证毕。

为了应用引理 2.9 来讨论满足(2.19)的T的形式，首先必须说明$\bigcap_{\nu=1}^{l} M_\nu$中存在$m$个相互垂直的方向。这是因为$\bigcap_{\nu=1}^{l} M_\nu$为$S_m$除去有限个通过原点的 $m-1$ 维或$m-2$维的超平面与S_m的交，从$\bigcap_{\nu=1}^{l} M_\nu$中除去了那些和这有限个超平面垂直的单位向量，显然，$\bigcap_{\nu=1}^{l} M_\nu$除去这些向量后所得的集$D$仍在$S_m$中稠密。显然，当$\alpha\in D$时，与$\alpha$垂直的向量也属于$D$，所以，在$D$中可以取到$m$个相互垂直的方向 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$。由引理 2.9，满足 (2.19) 的T应该具有(2.21)形式。

现在证明在满足(2.19)的表达式(2.21)中，有 $P_\alpha(\alpha\cdot a_\mu)=0$，这里 $\alpha\in\bigcap_{\nu=1}^{l} M_\nu$。这是因为当 $\alpha\in\bigcap_{\nu=1}^{l} M_\nu$时，

$$P_\alpha\left(i\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)T=\sum_{\mu=1}^{N} e^{-i a_\mu\cdot x}$$
$$\times P_\alpha\left(i\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial X}+\alpha\cdot a_\mu\right)Q_\mu=0,$$

于是立即得到

$$P_\alpha\left(i\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\alpha\cdot a_\mu\right)Q_\mu=0.$$

设Q_μ是k_μ次多项式，其中的最高次项组成k_μ次齐式 $\omega_\mu(x)$，那末就有

$$P_\alpha(\alpha\cdot a_\mu)\omega_\mu+(\text{次数低于 } k_\mu \text{ 的项})=0,$$

因此 $P_\alpha(\alpha\cdot a_\mu)=0$。

记 $\widetilde{W}=\bigcap_{\alpha\in\bigcap M_\nu} W_\alpha$，因为 $\bigcap_{\nu=1}^{l} M_\nu$中有$m$个相互垂直的方向，和前面同样可以证得 $\widetilde{W}$ 是有限集，显然，$W\subset\widetilde{W}$，由于

$$P_\alpha(\alpha\cdot a_\mu)=0,$$

所以 $a_\mu\in\widetilde{W}$. 不妨设 $\widetilde{W}=\{a_1,\cdots,a_N\}$. 因为如果 $\widetilde{W}$ 中有点不在 $a_1,\cdots,a_N$ 中出现，那末把这些点再放进去，而取相应的 $Q_\nu=0$ 即可. 不妨又设 $a_1,\cdots,a_l$ 就是 $b_1,\cdots,b_l$. 因为 $b\in\widetilde{W}$ 时，$\bar{b}\in\widetilde{W}$，所以还可以假设有 $a_{l+\nu}=\bar{a}_{N-\nu+1}\left(\nu=1,2,\cdots,\frac{N-l}{2}\right)$. 因为 F, F_ρ 都是 Hermite 型的，所以 T 也是 Hermite 型的，因此，T 可以进一步地写成下列形式

$$T=\sum_{\nu=1}^{l}e^{-ia_\nu\cdot x}Q_\nu(x)+\sum_{\nu=l+1}^{N+l}[e^{-ia_\nu\cdot x}Q_\nu(x)$$
$$+e^{-i\bar{a}_\nu\cdot x}\overline{Q_\nu(-x)}],$$

当 $\nu\leqslant l$ 时，

$$Q_\nu(x)=\overline{Q_\nu(-x)}.$$

最后，讨论 $Q_\nu(x)$ 的次数. 当 $\alpha\in\bigcap\limits_{\nu=1}^{l}M_\nu$ 时，有 $\alpha\bar{\in}E$，所以 $\alpha\cdot a_\mu(\mu=1,2,\cdots,N)$ 是 N 个不同的数. 设 $m_\mu^{(\alpha)}$ 是 $P_\alpha(t)$ 在 $t=\alpha\cdot a_\mu$ 的零点次数，那末有

$$\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu^{(\alpha)}\leqslant 2n,$$

同时容易得到

$$\left(\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)^{m_\nu^{(\alpha)}}\omega_\nu(x)=0$$

在 $\mathbf{R}^m$ 中 $\omega_\nu(x)=0$ 是不超过 $m-1$ 维的锥面. 记它与 S_m 的交为 σ_ν，显然

$$\overline{\bigcap_{\mu=1}^{l}M_\mu-\sigma_\nu}=S_m.$$

当

$$\alpha\in\bigcap_{\mu=1}^{l}M_\mu-\sigma_\nu$$

时，

$$0=\left(a\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)^{m_\nu^{(a)}}\omega_\nu(x)\Big|_{x=ta}=\frac{d^{m_\nu^{(a)}}}{dt^{m_\nu^{(a)}}}\omega_\nu(ta)$$

$$=\omega_\nu(a)\frac{d^{m_\nu^{(a)}}}{dt^{m_\mu^{(a)}}}t^{k_\nu}.$$

因为 $a\bar{\in}\sigma_\nu$，所以 $\omega_\nu(a)\neq 0$，因而 $k_\nu<m_\nu^{(a)}$. 这样，只要取

$$a\in\bigcap_{\nu=1}^{l}M_\nu-\left(\bigcup_{\mu=1}^{N}\sigma_\mu\right),$$

就有

$$\sum_{\mu=1}^{N}k_\mu\leqslant\sum_{\mu=1}^{N}m_\mu^{(a)}\leqslant 2n.$$

总结上面讨论，就得到

定理 2.10 设 F 是 $\mathbf{K}_m$ 上具有 n 个负二次式的条件正定广义函数，那末必唯一地存在 $\mathbf{R}^m$ 上测度 $d\beta(\lambda)$，适合条件

$$\int\frac{d\beta(\lambda)}{1+|\lambda|^M}<\infty$$

（M是一个正整数），还有 l 个实点 $b_1,\cdots,b_l$，q 个复点 $a_1,\cdots,a_q$ 及相应的正整数 $m_1,\cdots,m_l,n_1,\cdots,n_q$，还有多项式 $Q_1(x),\cdots,Q_l(x)$，$N_1(x)$，$\cdots$，$N_q(x)$，它们的次数分别不超过 $2m_1$，$\cdots$，$2m_l$，n_1，$\cdots$，n_q，而

$$\sum_{\nu=1}^{l}m_\nu+\sum_{\nu=1}^{q}n_\nu\leqslant n,$$

使得

$$F(\varphi)=\int\left\{\int\frac{e^{-i\lambda\cdot x}-R_\rho(\lambda,x)}{\prod\limits_{\nu=1}^{l}|\lambda-b_\nu|^{m_\nu}}\varphi(x)dx\right\}d\beta(\lambda)$$

$$+\int R_\rho(x)\varphi(x)dx,$$

这里

$$R_\rho(\lambda, x) = \sum_{\nu=1}^{l} Q_\rho(|\lambda - b_\nu|)e^{-ib_\nu\cdot x}$$

$$\times \sum_{t=0}^{m_\nu-1} \frac{1}{t!}(-i(\lambda - b_\nu)\cdot x)^t.$$

当 $\rho \leqslant S$ 时，$Q_\rho(S) = 1$；而当 $\rho > S$ 时 $Q_\rho(S) = 0$，又

$$\rho < \frac{1}{2}\min_{\mu\neq\nu}|b_\mu - b_\nu|.$$

同时

$$R_\rho(x) = \sum_{\nu=1}^{l} e^{-ib_\nu\cdot x}Q_\nu(x)$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{q}[e^{-ia_\nu\cdot x}N_\nu(x) + e^{-ia_\nu\cdot x}\overline{N_\nu(-x)}],$$

而且

$$\overline{Q_\nu(x)} = Q_\nu(-x) \quad (\nu = 1, 2, \cdots, l).$$

下面讨论在平移不变子空间上正定的多元广义函数。

引理 2.11 设H是 K_m 中亏维数为 n 的闭线性子空间，那末H对一切平移算子 U_a: $\varphi(x)\longmapsto\varphi(x+a)$ 不变的充要条件是，存在 $a_1, \cdots, a_N$ 及多项式 $Q_{\mu\nu}(x)$ $(\mu = 1, 2, \cdots, N;\ \nu = 1, 2, \cdots, p_\mu)$ 适合

$$\sum_{\mu=1}^{N} p_\mu = n,$$

而且对任何 a 及 k，$Q_{\mu k}(x+a)$ 必是 $\{Q_{\mu\nu}(x)\,|\,\nu = 1, 2, \cdots, p_\mu\}$ 的线性组合，使H成为 K_m 中适合条件

$$\int e^{-ia_\mu\cdot x}Q_{\mu\nu}(x)\varphi(x)\,dx = 0,\ \nu = 1, 2, \cdots, p_\mu;\ \mu = 1, 2, \cdots, N$$

的 $\varphi(x)$ 的全体。

证 必要性 仿定理2.2可知，有广义函数 $L_\nu(\nu = 1, 2, \cdots, n)$，使得$H$为这 n 个广义函数的公共零空间。由于H对 $\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots,$

$\frac{\partial}{\partial x_s}$ 不变，所以存在一组常数 $c_{\mu\nu}^{(l)}$，使得

$$\frac{\partial}{\partial x_l} L_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} c_{\mu\nu}^{(l)} L_\mu, \quad \nu = 1, 2, \cdots, n; \ l = 1, 2, \cdots, m.$$

再仿定理 2.2，可以证明存在多项式 $Q_l(t)$，使得

$$Q_l\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right) L_\nu = 0, \quad \nu = 1, 2, \cdots, n; \ l = 1, 2, \cdots, m.$$

由引理 2.9，存在点 $a_1, \cdots, a_N$ 及多项式 $Q_{\mu\nu}(x)(\nu = 1, 2, \cdots, m; \mu = 1, 2, \cdots, N)$，使得

$$L_\nu = \sum_{\mu=1}^{N} e^{-ia_\mu \cdot x} Q_{\mu\nu}(x).$$

再利用 H 对 $\{U_a\}$ 的不变性，所以当 $\varphi \in H$ 时，

$$0 = L_\nu(U_{-a}\varphi) = \sum_{\mu=1}^{N} e^{-ia_\mu \cdot a} \int e^{-ia_\mu \cdot x} Q_{\mu\nu}(x + a)\varphi(x)dx.$$

因此，对任何 $a \in \mathbb{R}^n$，成立

$$\int e^{-ia_\mu \cdot x} Q_{\mu\nu}(x + a)\varphi(x)dx = 0,$$

由此可知 H 是诸泛函 $e^{-ia_\mu \cdot x} Q_{\mu\nu}(x + a)$ 的公共零空间。于是，存在一组常数 $c_\nu^{(k)}$，使得 $e^{-ia_\mu \cdot x} Q_{\mu_k}(x) = \Sigma c_\nu^{(k)} L_\nu$。比较两边含有 $e^{-ia_\mu \cdot x}$ 的项，即得 $Q_{\mu_k}(x + a)$ 为 $Q_{\mu\nu}(x)(\nu = 1, 2, \cdots, p_\mu)$ 的线性组合。

充分性　作

$$L_\nu = \sum_{\mu=1}^{N} e^{-ia_\mu \cdot x} Q_{\mu\nu}(x)(\nu = 1, 2, \cdots n),$$

易知 H 就是诸 L_ν 的公共零空间，因此充分性是显然的，证毕。

现在建立 H 上正定的广义函数的积分表达式。

设 $Q(x)$ 是一多项式，适合条件

$$Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) e^{-ia_\mu \cdot x} Q_{\mu\nu}(x) = 0,$$

$$\nu=1,2,\cdots,p_\mu,\ \mu=1,2,\cdots,N,\tag{2.24}$$

那末对任何 $\phi\in K_m$，由引理 2.11 可知

$$Q\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi(x)\in H.$$

因此，F 的 Fourier 变换 $\tilde{F}$ 满足

$$\tilde{F}(Q(\lambda)\bar{Q}(\lambda)\tilde{\phi}(\lambda)\overline{\tilde{\phi}(\lambda)})\geqslant 0.\tag{2.25}$$

令 $F_Q(\varphi(\lambda))=\tilde{F}(Q(\lambda)\bar{Q}(\lambda)\varphi(\lambda))(\varphi\in Z_m)$，$F_Q$ 是 Z_m 上正定广义函数，因而有正测度 $d\mu_Q(\lambda)$，

$$\int\frac{d\mu_Q(\lambda)}{1+|\lambda|^c}<\infty$$

（c 是正整数），使得

$$F_Q(\varphi)=\int\varphi(\lambda)d\mu_Q(\lambda).$$

与定理 2.10 的处理方法一样，可以知道 $\dfrac{d\mu_Q(\lambda)}{|Q(\lambda)|^2}$ 实质上与 Q 无关，记作 $d\mu(\lambda)$。于是，有

$$\tilde{F}(Q(\lambda)\bar{Q}(\lambda)\varphi(\lambda))=\int Q(\lambda)\bar{Q}(\lambda)\varphi(\lambda)d\mu(\lambda).\tag{2.26}$$

对于满足 (2.24) 而次数不超过 n 的多项式 $Q(\lambda)$，作 $Q(\lambda)\bar{Q}(\lambda)$，这个多项式在次数不超过$2n$的多项式全体所成的空间中张成一个线性子空间，记为 A，称 A 是对应于H的多项式空间。由 (2.26)，当 $P(\lambda)\in A$ 时，容易证明

$$\tilde{F}(P(\lambda)\varphi(\lambda))=\int P(\lambda)\varphi(\lambda)d\mu(\lambda).\tag{2.27}$$

由 $d\mu(\lambda)$ 的定义知道，$\lambda\neq a_\mu$ 处是正常的，而在 $\lambda=a_\mu$ 处的环境中，对任何 $P(\lambda)\in A$，$P(\lambda)d\mu(\lambda)$ 是正常的，设 H^* 是 Z_m 中函数 $\varphi(\lambda)$ 在 $\lambda=a_\mu$ 的 Taylor 展开式中，首 $2n$ 次多项式属于 A的那种函数全体所成的线性子空间，称之为H的对偶空间。那末，

$$M(\phi(\lambda))=\int\phi(\lambda)d\mu(\lambda)\tag{2.28}$$

是 H^* 上有确定意义的线性泛函. 因为 H^* 是 $\mathbf{Z}_m$ 的闭子空间, 而 $M(\phi(\lambda))$ 在 H^* 上按 $\mathbf{Z}_m$ 中拓扑是连续的, 因此可以把 M 延拓为 $\mathbf{Z}_m$ 上广义函数. 由 (2.27), (2.28) 可知, 当 $P(\lambda)\in A$ 时,

$$(\tilde{F}-M)(\phi(\lambda)P(\lambda))=0.$$

设 $T\in \mathbf{K}_m'$, 而 $\tilde{T}=\tilde{F}-M$, 于是当 $P(\lambda)\in A$ 时,

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)T=0. \tag{2.29}$$

与引理 2.9 相仿, 易知这时必有不超过 $2n$ 次的多项式 $W_\mu(x)$, 使得

$$T=\sum_{\mu=1}^{N}e^{-ia_\mu\cdot x}W_\mu(x).$$

这里, 由 (2.29) 易知, $P(\lambda)\in A$ 时,

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}+a_\mu\right)W_\mu(x)=0. \tag{2.30}$$

由于当 $\phi\in H^*$ 时,

$$\tilde{T}(\phi(\lambda))=\sum_{\mu=1}^{N}W_\mu\left(i\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\phi(\lambda)|_{\lambda=a_\mu}.$$

但是, $\phi(\lambda)$ 在 $\lambda=a_\mu$ 的 Taylor 展开式中次数不超过 $2n$ 的项必与 A 中某一多项式 $P(\lambda)$ 一致, 如果我们能证明

$$W_\mu\left(i\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)P(\lambda)|_{\lambda=a_\mu}=0,$$

那末当 $\phi\in H^*$ 时, 就有 $\tilde{T}(\phi)=0$, 即

$$\tilde{F}(\phi)=M(\phi)=\int\phi(\lambda)d\mu(\lambda).$$

实际上, 由 (2.30),

$$\begin{aligned}
0&=\int e^{-ia_\mu\cdot x}\left(P\left(i\frac{\partial}{\partial x}+a_\mu\right)W_\mu(x)\right)\varphi(x)dx\\
&=\int\varphi(x)P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)(W_\mu(x)e^{-ia_\mu\cdot x})dx\\
&=\int e^{-ia_\mu\cdot x}W_\mu(x)P\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)dx
\end{aligned}$$

$$= W_\mu\left(i\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)(P(\lambda)\bar{\varphi}(\lambda))\Big|_{\lambda=a_\mu}$$

对任何 $\bar{\varphi}(\lambda)\in \mathbf{Z}_m$ 成立．因此，

$$W_\mu\left(i\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)P(\lambda)\Big|_{\lambda=a_\mu}=0.$$

这样就证明了下面的定理．

定理 2.12 设H是 $\mathbf{K}_m$ 中亏维数为 n 的闭线性子空间，H是平移不变的．设 H^* 是H在 $\mathbf{Z}_m$ 中的对偶空间．如果 $\mathbf{K}_m$ 上广义函数 F 在H上是正定的，那末必存在正测度 $d\mu(\lambda)$，当 $P(\lambda)$ 是属于H的多项式空间时，存在正整数 k，使得

$$\int\frac{P(\lambda)d\mu(\lambda)}{1+|\lambda|^k}<\infty.$$

当 $\varphi\in\mathbf{K}_m$，而 $\bar{\varphi}\in H^*$ 时，

$$F(\varphi)=\int\left\{\int e^{-i\lambda\cdot x}\varphi(x)dx\right\}d\mu(\lambda). \tag{2.31}$$

利用定理 2.12 便可确定出 F 在整个空间 $\mathbf{K}_m$ 上的积分表示式．因为 H^* 在 $\mathbf{Z}_m$ 中的亏维数是有限的，因而存在有限个不超过 $2n$ 次的多项式 $\omega_{\mu\nu}(\lambda)(\nu=1,2,\cdots,q_\mu,\ \mu=1,2,\cdots,n)$，使得 $P(\lambda)\in A$ 的充要条件是

$$\omega_{\mu\nu}\left(i\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)P(\lambda)\Big|_{\lambda=a_\mu}=0. \tag{2.32}$$

对于适合 (2.32) 的多项式组 $\{\omega_{\mu\nu}(\lambda)\}$，函数 $\varphi\in H^*$ 的充要条件是

$$\omega_{\mu\nu}\left(i\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\varphi(\lambda)\Big|_{\lambda=a_\mu}=0.$$

设 $\Phi_{\mu\nu}(\lambda)$ 是 $\mathbf{Z}_m$ 中适合条件

$$\omega_{\mu'\nu'}\left(i\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\Phi_{\mu\nu}(\lambda)\Big|_{\lambda=a_\mu}=\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'}$$

的函数(这一组函数是存在的)，设 $\varphi_{\mu\nu}(x)\in\mathbf{K}_m$，$\bar{\varphi}_{\mu\nu}=\Phi_{\mu\nu}$，那末由 (2.31) 及 (2.32) 可以得到：当 $\varphi\in\mathbf{K}_m$ 时，

$$F(\varphi)=\int\left\{\int[e^{-i\lambda\cdot x}-\Sigma e^{-ia_\mu\cdot x}\omega_{\mu\nu}(x)\Phi_{\mu\nu}(\lambda)]\varphi(x)dx\,d\mu(\lambda)\right.$$

$$+\Sigma F(\varphi_{\mu\nu}(x))\int e^{-i\alpha_\mu\cdot x}\omega_{\mu\nu}(x)\varphi(x)dx$$

$$+\Sigma F(\varphi_{\mu\nu}(x))\int e^{-i\beta_\mu\cdot x}\omega_{\mu\nu}(x)\varphi(x)dx.$$

4. Banach 代数上条件正定泛函的表示 关于 Banach 代数上正定泛函的表示有如下基本结果：设$\mathfrak{R}$是具有单位元和连续对合$*$的 Banach 代数．f是$\mathfrak{R}$上正定泛函，那末必有一个 Hilbert 空间H和$\mathfrak{R}$到$B(H)$循环对称表示A_x，使得

$$f(x)=(A_x\xi_0,\xi_0),\quad x\in R,$$

这里$\xi_0\in H$是循环向量．

现将这个结果推广到$\mathfrak{R}$上的条件正定泛函．

定义 2.4 设$\mathfrak{R}$是具有对合$*$的代数，f是$\mathfrak{R}$上线性泛函，如果

(i) 对任何$x,y\in\mathfrak{R}$，$f(y^*x)$是$\mathfrak{R}$上双线性 Hermite 泛函，

(ii) 对任何$x,y\in\mathfrak{R}$，以$(x,y)_f=f(y^*x)$作为$\mathfrak{R}$上度规，$(\mathfrak{R},(\cdot,\cdot)_f)$的极大负子空间维数为$n$，

那末称f是$\mathfrak{R}$上具有负指标n的条件正定泛函．

对$\mathfrak{R}$上负指标n的条件正定泛函f，令

$$\mathfrak{R}_f=\{x\,|\,f(y^*x)=0,\ y\in\mathfrak{R}\},$$

易知$\mathfrak{R}_f$是$\mathfrak{R}$的左理想．作$\mathfrak{R}_0=\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_f$．对任何$\tilde{x},\tilde{y}\in\mathfrak{R}_0$，定义

$$(\tilde{x},\tilde{y})_f=f(y^*x),\quad x\in\tilde{x},\ y\in\tilde{y},$$

易知$\mathfrak{R}_0$按$(\cdot,\cdot)_f$有如下直交直接和分解：$\mathfrak{R}_0=\mathfrak{R}_-\oplus\mathfrak{R}_+$，其中$\mathfrak{R}_-,\mathfrak{R}_+$分别是$\mathfrak{R}_0$中的负、正线性子空间．引入内积

$$[\tilde{x},\tilde{y}]_f=-(\tilde{x}_-,\tilde{y}_-)_f+(\tilde{x}_+,\tilde{y}_+)_f,$$

这里$\tilde{x}=\tilde{x}_-+\tilde{x}_+$，$\tilde{y}=\tilde{y}_-+\tilde{y}_+$，$\tilde{x}_-,\tilde{y}_-\in\mathfrak{R}_-$，$\tilde{x}_+,\tilde{y}_+\in\mathfrak{R}_+$．将$\mathfrak{R}_0$按$[\cdot,\cdot]_f$完备化得到$\Pi_n$．

定义 2.5 由给定的具有对合$*$的代数$\mathfrak{R}$以及$\mathfrak{R}$上的具有负指标n的条件正定泛函所产生的Π_n空间，称为f的表示空间是：对每个$x\in\mathfrak{R}$，在Π_n上有算子A_x，使得对任何$y\in\mathfrak{R}$，

$$\mathscr{D}(A_x)=\mathfrak{R}_0,\quad A_x\tilde{y}=\widetilde{xy}.$$

定理 2.13 设 $\mathfrak{R}$ 是具有连续对合 * 的 Banach 代数，f 是 $\mathfrak{R}$ 上对称的负指标为 n 的条件正定泛函．那末，必存在不定度规空间 Π_K，$K \leqslant n+1$，并且存在 $\mathfrak{R}$ 到 $B(\Pi_K)$ 的一个循环表示 τ：$x \longmapsto \widetilde{A}_x$，$\xi_0$ 为循环向量，使得

(i) $f(x) = (\widetilde{A}_x\xi_0, \xi_0)_f$，$x \in \mathfrak{R}$；

(ii) $\widetilde{A}_{x^*} = \widetilde{A}_x^\dagger$.

为了证明这个定理，先证下面的引理．

引理 2.14 设 $\mathfrak{R}$ 是具有对合 * 的代数，但没有单位元．$\mathfrak{R}_1$ 是 $\mathfrak{R}$ 和形式单位元 e 生成的 * 代数．如果 f 是 $\mathfrak{R}$ 上具有负指标 n 的条件正泛函，那末 f 可延拓成 $\mathfrak{R}_1$ 上条件正定泛函的充要条件是，f 是对称的（即 $f(x) = \overline{f(x^*)}$，$x \in \mathfrak{R}$），并且 f 的延拓 f_1 是 $\mathfrak{R}_1$ 上具有指标不超过 $n+1$ 的条件正定泛函．

证 显然，$f(x) = \overline{f(x^*)}$ $(x \in \mathfrak{R})$ 是 f 能延拓的充要条件．

现在证明延拓后的 f_1 的负指标不超过 $n+1$．

事实上，在 $\mathfrak{R}$ 上由 f 产生的度规为 $(\cdot, \cdot)_f$，由假设不难知道，$\mathfrak{R}$ 有分解 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_- \oplus \mathfrak{R}_+$，其中 $\mathfrak{R}_-$ 是 $\mathfrak{R}$ 中按 $(\cdot, \cdot)_f$ 的某个极大负线性子空间（所以 $\dim\mathfrak{R}_- = n$），而 $\mathfrak{R}_+$ 是半正子空间．显然，$\mathfrak{R}_1$ 有分解 $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_- \dotplus \mathfrak{R}'$，这里 $\mathfrak{R}'$ 是由 $\mathfrak{R}_+$ 与形式单位元 e 张成的线性子空间．由于 f_1 是 f 的延拓，所以 $\mathfrak{R}_-$ 关于 $(\cdot, \cdot)_{f_1}$ 也是负性子空间．如果 $\mathfrak{R}'$ 中有两个向量

$$a_i = \lambda_i e + x_i, \quad x_i \in \mathfrak{R}_+ (i = 1, 2)$$

张成的线性子空间按 $(\cdot, \cdot)_{f_1}$ 是负的，我们不妨假设

$$(a_i, a_j)_{f_1} = -\delta_{ij} (i, j = 1, 2).$$

由于 $\lambda_2 a_1 - \lambda_1 a_2 = \lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_1 \in \mathfrak{R}_+$，所以

$$\begin{aligned} -(|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2) &= (\lambda_2 a_1 - \lambda_1 a_2, \lambda_2 a_1 - \lambda_1 a_2)_{f_1} \\ &= (\lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_1, \lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_1)_f \geqslant 0. \end{aligned}$$

显然，因为 $\lambda_1 \neq 0$，$\lambda_2 \neq 0$，上式不可能成立．所以 f_1 的负指标不超过 $n+1$．证毕．

引理 2.15 设 $\mathfrak{R}$ 是具有单位元和连续对合 * 的 Banach 代数，f 是 $\mathfrak{R}$ 上具有负指标 n 的条件正定泛函．$x \in \mathfrak{R}$，如果 $x = x^*$，那

末 A_x 必可延拓成 f 的表示空间 Π_n 上自共轭算子 $\tilde{A}_x$，并且

$$\sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(\tilde{A}_x)\} \leqslant \|x\|$$

(从而 $\tilde{A}_x$ 是 Π_n 上有界算子)。

证 显然，$e\bar{\in}\mathfrak{N}_f$ (否则将有 $f(x^*) = f(x^*e) = 0$，即 f 是零泛函了．这与具有负指标 n 相矛盾)．对任何 $x \in \mathfrak{R}$，作 $\mathfrak{N}_0(\subset \Pi_n)$ 上算子

$$A_x: \tilde{y} \longmapsto \widetilde{xy}, \tag{2.33}$$

显然有

(i) $\mathscr{D}(A_x) = \mathfrak{N}_0$，$\mathscr{R}(A_x) \subset \mathfrak{N}_0$，并且 A_x 是线性算子；

(ii) 如果 x 在 $\mathfrak{R}$ 上有左(右)逆元 $x_l^{-1}(x_r^{-1})$，那末在 $\mathfrak{N}_0$ 上有 $A_{x_l^{-1}}A_x = A_xA_{x_r^{-1}} \subset I|_{\mathfrak{N}_0}$ (I 是 Π_n 上单位算子)，从而当 x 在 $\mathfrak{R}$ 上有逆元 x^{-1} 时，那末 $A_{x^{-1}}A_x = A_xA_{x^{-1}} = I|_{\mathfrak{N}_0}$。

(iii) 如果 $x = x^*$，那末对任何 $\tilde{y}, \tilde{z} \in \mathfrak{N}_0$，

$$\begin{aligned}(A_x\tilde{y}, \tilde{z})_f &= f(z^*(xy)) = f((x^*z)^*y) \\ &= f((xz)^*y) = (\tilde{y}, \tilde{x}\tilde{z})_f = (\tilde{y}, A_x\tilde{z})_f,\end{aligned}$$

即 $A_x \subset A_x^\dagger$。

由于对任何 $x \in \mathfrak{R}$，$x = x^*$，当 $|\lambda| > \|x\|$ 时，$(x - \lambda e)^{-1}$，$(x - \bar{\lambda}e)^{-1} \in \mathfrak{R}$，所以由 (ii) 知道

$$\mathscr{R}(A_{x-\lambda e}) = \mathscr{R}(A_x - \lambda I),\quad \mathscr{R}(A_{x-\bar{\lambda}e}) = \mathscr{R}(A_x - \bar{\lambda}I)$$

均在 Π_n 中稠密．当 $I_m\lambda \neq 0$ 时，根据第二章定理 3.1，A_x 的 Cayley 变换 V_x 是保距算子，并且满足

$$\overline{\mathscr{R}(V_x - I)} = \Pi_n$$

(从它可以推出 $1\bar{\in}\sigma_p(V_x)$)．显然，

$$\overline{\mathscr{R}(V_x)} = \Pi_n,$$

所以由第二章定理 3.8 的 (i)，V_x 必有闭扩张 $\bar{V}_x$，$\bar{V}_x$ 是保距算子，更满足

$$\overline{\mathscr{R}(\bar{V}_x - I)} = \Pi_n.$$

再注意到 $\mathscr{D}(V_x) = \mathscr{R}(A_x - \lambda I)$，$\mathscr{R}(V_x) = \mathscr{R}(A_x - \bar{\lambda}I)$，而

$$\overline{\mathscr{R}(A_x - \lambda I)} = \overline{\mathscr{R}(A_x - \bar{\lambda}I)} = \Pi_n,$$

则易知保距算子 V_x 及其逆 V_x^{-1} 都是连续的，从而 V_x 的延拓 $\bar{V}_x$ 是

唯一的，并且是 Π_n 上酉算子．又因为

$$\overline{\mathscr{R}(\overline{V}_x - I)} = \Pi_n,$$

所以 $\overline{V}_x$ 的 Cayley 变换 $\widetilde{A}_x$ 是自共轭算子，并且是 A_x 的唯一的闭延拓．从等式

$$(\widetilde{A}_x - \lambda I)\mathscr{D}(\widetilde{A}_x) = (\widetilde{A}_x - \bar{\lambda} I)\mathscr{D}(\widetilde{A}_x) = \Pi_n$$

以及闭图象定理（因为 $\widetilde{A}_x - \lambda I$，$\widetilde{A}_x - \bar{\lambda} I$ 都是闭算子，从而 $(\widetilde{A}_x - \lambda I)^{-1}$，$(\widetilde{A}_x - \bar{\lambda} I)^{-1}$ 为闭算子）可知，λ，$\bar{\lambda} \in \rho(\widetilde{A}_x)$．证毕．

定理 2.13 的证明 利用引理 2.15，先将 $\mathfrak{R}$ 扩充成具有单位元的 $\mathfrak{R}_1$，f 将延拓成 $\mathfrak{R}_1$ 上的 f_1；f_1 是 $\mathfrak{R}_1$ 上具有负指标不超过 $n+1$ 的条件正定泛函．记 f_1 所产生的表示空间为 $\Pi_K(K \leqslant n+1)$，取 ξ_0 为 $\tilde{e} \in \Pi_K$．按 $(\cdot, \cdot)_{f_1}$ 作表示，由于对任何 $x \in \mathfrak{R}$，

$$\widetilde{A}_x \xi_0 = \widetilde{xe} = \tilde{x},$$

所以 ξ_0 是循环向量．显然，它是 $\mathfrak{R}$ 的一个表示．由引理 2.15，$\mathfrak{R}_1$ 中自共轭元 x 的表示 $\widetilde{A}_x$ 是 Π_K 上自共轭算子，所以上述表示是对称表示．证毕．

必须注意，条件正定泛函与正定泛函有本质的区别．例如，具有单位元和连续对合 * 的 Banach 代数 $\mathfrak{R}$ 上每个正定泛函必连续，但条件正定泛函就不一定连续了．

例 2.1 任取一个无限维实 Banach 空间 B，令 f 是 B 上无界实线性泛函．记 $\mathfrak{R} = \{x + iy \mid x, y \in B\}$，在 $\mathfrak{R}$ 上定义数乘和乘法如下：

$$(\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y),$$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = 0.$$

又定义

$$(x + iy)^* = x - iy.$$

$$\|x + iy\| = \|x\| + \|y\|,$$

易知 $\mathfrak{R}$ 是一个对称的可交换的 Banacd 代数，定义

$$F(x + iy) = f(x) + if(y),$$

易知 F 是 $\mathfrak{N}$ 上一个对称的负指标为 0 的泛函，可以把 f 延拓为 $\mathfrak{N}_1$（对任何 $x,y\in\mathfrak{N}$，$x+iy+\lambda e\in\mathfrak{N}_1$，规定

$$\|x+iy+\lambda e\|=\|x\|+\|y\|+|\lambda|)$$

上具有负指标为 1 的条件正定泛函 f_1，显然 f_1 是不连续的。

§3 极·积算子

这一节中基本空间是 Hilbert 空间 H，用 $[\cdot,\cdot]$，$\|\cdot\|$ 分别表示 H 上内积和范数。设 A 是 H 上的一个有界线性算子，如果 $0\in\rho(A)$，由 A 导入算子 $U=A^{*^{-1}}A$，称作 A 的极·积算子。我们在本节中将应用不定度规的观念来考察 U 的谱的性质，U 与 A 的关系，以及反问题，即 H 上具有怎样性质的算子 U，才能使得方程 $U=A^{*^{-1}}A$ 有解(同时还考察方程解 A 的一般形式)。

1. 非退化的双线性空间及其上算子

定义 3.1 设 A 是 Hilbert 空间 H 上有界线性算子，并且 $0\in\rho(A)$，由 A 导出 H 上一个有界双线性泛函 $(\cdot,\cdot)$，满足

$$(x,y)=[Ax,y],\ x,\ y\in H,$$

称 $(H,(\cdot,\cdot))$ (或 (H,A)) 是非退化的双线性空间。

如果 $A=I$，那末 (H,I) 便是 H 本身。又如果 $A=A^*$，那末 $(H,(\cdot,\cdot))$ 就是不定度规空间，而且是完备的，事实上，如果

$$A=\int\lambda dE_\lambda$$

是 A 的谱分解，H_+，H_- 是 A 的正、负谱子空间，$P_\pm$ 是 H 在 $H_\pm$ 上投影算子。将 H 上原内积 $[\cdot,\cdot]$ 换为等价的内积

$$[\cdot,\cdot]_A=[|A|\cdot,\cdot],$$

易知这时有

$$(x,y)=[Jx,y]_A,\ x,\ y\in H,$$

其中 $J=P_+-P_-$。

在有界双线性空间 $(H,(\cdot,\cdot))$ 上拓扑就取为原 Hilbert 空

间H上的拓扑．这里不拟类似于完备的不定度规空间上算子理论来讨论 $(H, (\cdot, \cdot))$ 上的算子，只仅就下面的需要引进 $(H, (\cdot, \cdot))$ 上某些算子，并列举它们的一些性质．

定义 3.2 设 B 是有界双线性空间 $(H, (\cdot, \cdot))$ 上线性算子，如果存在常数 M，使得

$$\sup_{\|x\|=\|y\|=1}|(Bx, y)| \leqslant M,$$

就称 B 是 $(H, (\cdot, \cdot))$ 上有界线性算子．设线性算子 T 在 $(H, (\cdot, \cdot))$ 上稠定，$(H, (\cdot, \cdot))$ 上适合下列条件的线性算子 T'，

$$(Tx, y) = (x, T'y), \ x \in \mathscr{D}(T), \ y \in \mathscr{D}(T') \tag{3.1}$$

中定义域最大(按包含关系)的算子 $T^\dagger$ 称为 T 的共轭算子．如果稠定算子 T 满足 $T = T^\dagger$，称 T 是 $(H, (\cdot, \cdot))$ 上自共轭算子．如果线性算子 U，对一切 $x, y \in \mathscr{D}(U)$，都有

$$(Ux, Uy) = (x, y), \tag{3.2}$$

则称 U 是 $(H, (\cdot, \cdot))$ 上保距算子．如果 U 不仅是 $(H, (\cdot, \cdot))$ 上保距算子，而且是 H 上的双射，那末称 U 是 $(H, (\cdot, \cdot))$ 上酉算子．$(H, (\cdot, \cdot))$ 上幂等自共轭算子称为 $(H, (\cdot, \cdot))$ 上投影算子．

下列引理是显然的．

引理 3.1 在有界双线性空间 $(H, (\cdot, \cdot))(= (H, A))$ 上下列命题成立．

(i) B 为 (H, A) 上有界线性算子的充要条件是，B 是 (H, I) 上有界线性算子．

(ii) B 是 (H, A) 上稠定线性算子，那末 $B^\dagger$ 存在而且唯一，并且有

$$B^\dagger = A^{*^{-1}}B^*A^*, \tag{3.3}$$

而 B 是 (H, A) 上自共轭算子的充要条件是

$$A^*B = B^*A^*; \tag{3.4}$$

$(B^\dagger)^\dagger = B$ 的充要条件是 B 与 $A^{*^{-1}}A$ 可交换．特别，当且仅当

$A^{*-1}A = \alpha I$（α 是非零数——下一小节中将知道只能 $|\alpha| = 1$）时，对一切 (H, A) 上有界线性算子 B，才有 $(B^\dagger)^\dagger = B$.

(iii) (H, A) 上酉算子必是有界算子.

(iv) U 是满足 $\mathscr{D}(U) = H = \mathscr{R}(U)$ 的线性算子，它为 (H, A) 上酉算子的充要条件是下面五个中的任何一个成立：

$$a)\ U^\dagger U = I,\quad b)\ UU^\dagger = I, \tag{3.5}$$

$$c)\ U^{-1} = A^{*-1}U^*A^*,\ d)\ U^*A^*U = A^*,\ e)\ U^*AU = A. \tag{3.6}$$

(v) 对于 (H, A) 上酉算子 U 总有 $(U^\dagger)^\dagger = U$.

(vi) $\sigma(B^\dagger) = \overline{\sigma(B)}(= \{\bar{\lambda} | \lambda \in \sigma(B)\})$，从而当 $B^\dagger = B$ 时，$\sigma(B)$ 必关于实轴对称. 当 U 是 (H, A) 上酉算子时，

$$\sigma(U) = \frac{1}{\overline{\sigma(U)}}\left(= \left\{\frac{1}{\bar{\lambda}} \middle| \lambda \in \sigma(U)\right\}\right),$$

即酉算子的谱关于单位圆周对称.

(vii) 若 P 是 (H, A) 上投影算子，那末 P 必是有界的，并且 $H = PH \oplus (PH)^\perp ((PH)^\perp = (I - P)H)$，这里 $\oplus$ 是 (H, A) 上直交直接和.

通过直接计算还不难得到 (H, A) 上有关 Cayley 变换的结果. 下面仅就有界自共轭算子情况及正则点的变换写出.

引理 3.2 设 B 是 (H, A) 上有界自共轭算子，$\zeta \in \rho(B)$，$I_m\zeta \neq 0$，那末

$$U = (B - \bar{\zeta}I)(B - \zeta I)^{-1} \tag{3.7}$$

是 (H, A) 上酉算子，并且 $1 \in \rho(U)$. 反之，如果 U 是 (H, A) 上酉算子，并且 $1 \in \rho(U)$，那末

$$B = (\zeta U - \bar{\zeta}I)(U - I)^{-1} \tag{3.8}$$

是 (H, A) 上有界自共轭算子. (3.7), (3.8) 互为逆变换.

2. 极 · 积算子概念及其性质

定义 3.3 设 A 是 Hilbert 空间 $(H, [\cdot, \cdot])$ 上有界线性算子，$0 \in \rho(A)$，称算子 $U = A^{*-1}A$ 是 A 的极·积算子.

有时，对任何 $\lambda \in \rho(A)$，也称 $U_\lambda = (A - \lambda)^{*-1}(A - \lambda)$ 是

A的极·积算子．

显然，当 $\dim H=1$，A是复数a，当$a\neq 0$时，

$$U=\frac{1}{\bar{a}}a=e^{i2\theta}(\theta=\arg a).$$

引理 3.3 设A是 Hilbert 空间 $(H,[\cdot,\cdot])$ 上有界线性算子，$0\in\rho(A)$，那末算子 $U=A^{*^{-1}}A$，$U^{-1}=A^{-1}A^*$ 是空间 (H,A^*) 或 (H,A) 上的酉算子，从而$\sigma(U)$关于单位圆周对称．如果V是(H,A^*)或(H,A)上酉算子，那末U必与V可交换．

证 由假设U是双射，又由于 $A=A^*U$，所以 $A^*=U^*A$，从而

$$A^*=U^*A^*U,\quad A=U^*AU. \tag{3.9}$$

由引理 3.1 的 (iv)，U是(H,A)或(H,A^*)上的酉算子．再由引理 3.1 的 (vi)，

$$\sigma(U)=\frac{1}{\overline{\sigma(U)}}.$$

设V是(H,A)（或(H,A^*)）上的酉算子，由引理 3.1 的 (v)，$(V^\dagger)^\dagger=V$．再由引理 3.1 的 (ii)，V与$A^{*^{-1}}A$（或$A^{-1}A^*=U^{-1}$）可交换．证毕．

定理 3.4 设A是 Hilbert 空间 $(H,[\cdot,\cdot])$ 上有界线性算子，如果存在α，$I_mA\geqslant\alpha I>0$，那末

(i) $0\in\rho(A)$．

(ii) $U=A^{*^{-1}}A$ 是 Hilbert 空间 (H,I_mA) 上酉算子，从而 $\sigma(U)$ 在单位圆周上，并且U有丰富的约化子空间．

(iii) $1\in\rho(U)$．

证 (i) 记 $A=u+iv$ 是直角坐标分解，对任何 $x\in H$，

$$(Ax,x)=(ux,x)+i(vx,x),$$
$$(A^*x,x)=(ux,x)-i(vx,x),$$

所以

$$|(Ax,x)|\geqslant\alpha\|x\|^2,\quad |(A^*x,x)|\geqslant\alpha\|x\|^2.$$

由此可知，A^{-1}，$A^{*^{-1}}$是$(H,[\cdot,\cdot])$上有界算子，即 $0\in\rho(A)$．

(ii) 由引理 3.3 的 (3.9) 式知道 $v = U^*vU$. 再根据引理 3.1 的 (iv), U 是 (H, v) 上的酉算子.

(iii) 因为

$$A = v(v^{-1}u + iI), \quad A^* = v(v^{-1}u - iI) \tag{3.10}$$

以及 $v^{-1}u = v^{-1}(uv^{-1})v = v^{*-1}(v^{-1}u)v^*$, 所以 $v^{-1}u$ 是 (H,v) 上自共轭算子. 然而 (H,v) 是 Hilbert 空间,则$-i$ 必是 (H,v) 上自共轭算子 $v^{-1}u$ 的正则点.

从 (3.10) 知道, $v^{-1}u$ 的 Cayley 变换(取 $\zeta = -i$) 正是 U, 从而 $1 \in \rho(U)$. 证毕.

类似可以得到下列定理.

定理 3.5 设 A 是 Hilbert 空间 $(H, [\cdot,\cdot])$ 上有界线性算子, $0 \in \rho(A) \cap \rho(ImA)$, 那末 $U = A^{*-1}A$ 是不定度规空间 (H, ImA) 上酉算子,而且 $1 \in \rho(U)$. 特别,如果

$$E_1 = \{x \mid (ImAx, x) < 0\}$$

的维数 $\dim E_1 < \infty$, U 就是 Π_K 型空间上酉算子.

证 由于 $A = v(v^{-1}u + iI)$, A^{-1} 是有界的,所以$-i$ 是 Π 型空间 (H, v) 上自共轭算子 $v^{-1}u$ 的正则点,从而$1 \in \rho(U)$. 其余的可类似于定理 3.4 的证明. 证毕.

推论 3.6 设 A 是 Hilbert 空间 $(H,[\cdot,\cdot])$ 上有界线性算子,如果存在复数 $z = re^{i\theta}$, 使得 $Im(zA) \geqslant \alpha I > 0$, 那末 $0 \in \rho(A)$, $U = A^{*-1}A$ 是 $(H, Im(zA))$ 上酉算子,并且 $e^{-i2\theta} \in \rho(U)$.

证 考察 $A' = zA$. A' 满足定理 3.4 的条件,所以

$$U' = (A'^*)^{-1}A' = e^{i2\theta}U$$

是 $(H, Im(zA))$ 上酉算子,并且 $1 \in \rho(U')$, 即 U 是 $(H, Im(zA))$ 上酉算子,并且 $e^{-i2\theta} \in \rho(U)$. 证毕.

定理 3.7 设 A 是 Hilbert 空间 $(H, [\cdot,\cdot])$ 上有界线性算子,对任何满足 $|\lambda| > \|A\|$ 的复数 λ,

$$U_\lambda = (A - \lambda I)^{*-1}(A - \lambda I)$$

必是某个 Hilbert 空间上的酉算子. 如果记 $\lambda = re^{i\theta}$, 那末

$$-e^{2i\theta} \in \rho(U_\lambda).$$

证 考察算子 $\frac{1}{i\lambda}A$，显然，$\left\|\frac{1}{i\lambda}A\right\|<1$. 由于对任何算子 B，总有

$$\|ImB\|=\sup_{\|x\|=1}|(ImBx,x)|\leqslant\sup_{\|x\|=1}|(Bx,x)|\leqslant\|B\|,$$

所以

$$Im\left(\frac{1}{i\lambda}A+iI\right)\geqslant\left(1-\left\|\frac{1}{i\lambda}A\right\|\right)I>0,$$

从而 $\frac{1}{i\lambda}A+iI$ 的极·积算子 U' 是 Hilbert 空间 $\left(H,Im\left(\frac{1}{i\lambda}A+iI\right)\right)$ 上酉算子，而且 $1\in\rho(U')$. 由于算子

$$A-\lambda I=i\lambda\left(\frac{1}{i\lambda}A+iI\right)$$

的极·积算子 $U_\lambda=e^{i(\pi+2\theta)}U'$ 也是 $\left(H,Im\left(\frac{1}{iA}+iI\right)\right)$ 上酉算子，并且 $-e^{i2\theta}\in\rho(U_\lambda)$，所以定理得证.

显然，对一般的算子 A 来说，定理 3.7 中的条件 $|\lambda|>\|A\|$ 是不能改为 $|\lambda|\geqslant\|A\|$ 的.

3. $U=A^{*-1}A$ 与 A 的关系 这一小节主要考察 A 的极·积算子与 A 的关系.

定理 3.8 设 A 是 Hilbert 空间 $(H,[\cdot,\cdot])$ 上有界线性算子，而且存在常数 α，$ImA\geqslant\alpha I>0$，那末必存在两个 Hilbert (H,v_i) $(i=1,2)$ 使得

(i) A 和 A^* 都是 (H,v_1) 到 (H,v_2) 的酉算子.

(ii) 存在 (H,v_i) 上谱测度集中在 $[\alpha,\beta]\subset(0,2\pi)$ 上的谱系 $\{E_\lambda^i|\lambda\in[0,2\pi]\}$，使得对任何 $\Delta=(\lambda,\mu]\subset(0,2\pi]$

$$AE_\Delta^1H\subset E_\Delta^2H,\quad A^*E_\Delta^1H\subset E_\Delta^2H,$$

而且对任何 $x\in E_\Delta^1H$，有

$$\|(A-e^{i\lambda}A^*)x\|\leqslant\|A\|\,|\Delta|\,\|x\|\quad(|\Delta|=\mu-\lambda).$$

证 取 $v_1=v$，$v_2=A^{-1}vA^{*-1}$. 记 (H,v_i) 的内积、范数分

别为 $[\cdot,\cdot]_i$, $\|\cdot\|_i$. 因为 $A^{*^{-1}}A=U$ 是 (H, v_1) 上酉算子，它的谱系为 $\{E_\lambda^1 | \lambda\in[0,2\pi]\}$，又由于 $1\in\rho(U)$，所以谱测度集中在 $[\alpha,\beta]\subset(0,2\pi)$ 中。下面证明 A^* 是 (H, v_1) 到 (H, v_2) 的酉算子。事实上，对任何 $x, y\in H$，

$$[A^*x, A^*y]_2=[v_2A^*x, A^*y]=[Av_2A^*x, y]$$
$$=[vx, y]=[x, y]_1,$$

又因为 A^* 是 H 上的双射，所以 A^* 是 (H, v_1) 到 (H, v_2) 的酉算子。由于 $A=A^*U$，所以 A 也是 (H, v_1) 到 (H, v_2) 的酉算子，即 (i) 成立.

取 $E_\lambda^2=A^*E_\lambda^1A^{*^{-1}}$，易知 $\{E_\lambda^2 | \lambda\in[0, 2\pi]\}$ 是 (H, v_2) 上谱系，并且 $A^*E_\Delta^1H\subset E_\Delta^2H$. 由于 $A=A^*U$，所以

$$A=A^*\int_0^{2\pi} e^{i\lambda}dE_\lambda^1=\int_0^{2\pi} e^{i\lambda}A^*dE_\lambda^1. \tag{3.11}$$

从 (3.11) 易知，$AE_\Delta^1H\subset E_\Delta^2H$，并且当 $x\in E_\Delta^1H$ 时

$$\|(A-e^{i\lambda}A^*)x\|^2=\left\|\int_\Delta (e^{i\lambda'}-e^{i\lambda})A^*dE_\lambda^1x\right\|^2$$
$$\leqslant\|A^*\|^2|\Delta|^2\|x\|^2,$$

由于 $\|A^*\|=\|A\|$，所以 (ii) 成立. 证毕.

下面是定理 3.7 的特例.

推论 3.9 在定理 3.7 的假设下，又如果 $\mathrm{Re}A$ 是全连续算子，那末必存在一列数 $\{e^{i\lambda_n}\}$, $\lambda_0=\pi$, $e^{i\lambda_n}\neq 1$, $n=1, 2, \cdots$，以及 H 上一列有限维投影子空间 $\{E_n | n=1, 2, \cdots\}$ 和可能是无限维的闭线性子空间 E_0，使得

(i) $H=\sum\limits_0^\infty\dotplus E_n$.

(ii) 对每个 $x\in H$，必可唯一地分解(强极限)成

$$x=\sum_{n=0}^\infty x_n,\quad x_n\in E_n,$$

并且

$$Ax = \sum_{0}^{\infty} e^{i\lambda_n} A^{n} x \ (强极限).$$

证 因为 $v^{-1}u$ 是 $(H, [\cdot, \cdot])$ 上全连续算子，而 (H, v) 与 (H, I) 拓扑等价，所以 $v^{-1}u$ 也是 (H, v) 上全连续算子. 由 Cayley 变换，易知 U 的谱是可列的，并且当 $e^{i\lambda_n} \in \sigma(U)$，

$$e^{i\lambda_n} \neq -1$$

时，相应的谱子空间是有限维的，$\mathscr{N}(v^{-1}u)$ 就是 U 相应于 -1 的特征子空间. 利用定理 3.7，易知推论中的 (i)，(ii) 成立. 证毕.

定理 3.10 设 A 是 Hilbert 空间 $(H, [\cdot, \cdot])$ 上有界线性算子，那末

(i) A 为正常算子的充要条件是存在 $\lambda \in \rho(A)$，成立

$$\frac{\partial U_\lambda}{\partial \lambda} U_\lambda = U_\lambda \frac{\partial U_\lambda}{\partial \lambda},$$

这里 $\frac{\text{“}\partial\text{”}}{\partial \lambda}$ 是方向导数.

(ii) 如果存在常数 α，使得 $Im A \geqslant \alpha I > 0$，那末 A 为正常算子的充要条件是 U 为正常的.

(iii) A 是正常的充要条件是存在一个 λ: $|\lambda| > \|A\|$，使得 U_λ 是正常的.

证 (i)，(ii)，(iii) 的必要性都是显然的. 下面分别证明充分性.

(i) 不妨设 $\lambda = 0$，即 A^{-1} 存在，并且有界. 记 $\lambda = x + iy$，容易算出

$$\left.\frac{\partial U_x}{\partial x}\right|_{x=0} = -A^{*-1}A + A^{*-1}, \tag{3.12}$$

$$\left.\frac{\partial U_y}{\partial y}\right|_{y=0} = i(A^{*-1}A + A^{*-1}). \tag{3.13}$$

根据假设，在 $\lambda = 0$ 时，有

$$\frac{\partial U_\lambda}{\partial \lambda} U_\lambda = U_\lambda \frac{\partial U_\lambda}{\partial \lambda},$$

即

$$U_\lambda^{-1}\frac{\partial U_\lambda}{\partial \lambda}=\frac{\partial U_\lambda}{\partial \lambda}U_\lambda^{-1},$$

从 (3.12), (3.13) 就得到

$$-A^{-1}A^{*^{-1}}A+A^{-1}=-A^{*^{-1}}+A^{*^{-1}}A^{-1}A^{*}, \qquad (3.14)$$

$$A^{-1}A^{*^{-1}}A+A^{-1}=A^{*^{-1}}+A^{*^{-1}}A^{-1}A^{*}. \qquad (3.15)$$

显然, (3.14), (3.15), 同时成立的充要条件是

$$A^{-1}-A^{*^{-1}}A^{-1}A^{*}=A^{*^{-1}}-A^{-1}A^{*^{-1}}A=0,$$

即 A 是正常的.

(ii) 由 (3.9) 得到

$$u=U^{*}uU,\ v=U^{*}vU.$$

由于 U 是 (H,v) 上酉算子, 所以 $\sigma(U)$ 落在单位圆周上. 但是(在 Hilbert 空间中)谱落在单位圆周上的正常算子必是酉算子. 因而 $U^{*}=U^{-1}$,

$$A^{-1}A^{*}=U^{-1}=U^{*}=A^{*}A^{-1}, \qquad (3.16)$$

即 A 是正常的.

(iii) 根据定理 3.7 及本定理的 (ii) 立即可知, $A-\lambda I$ 是正常的, 从而 A 是正常的. 证毕.

下面利用极·积算子考察亚正常和次正常算子性质的推论.

推论 3.11 (i) 如果 A 是 $(H,[\cdot,\cdot])$ 上亚正常算子, 那末对一切 $\lambda\in\rho(A)$, U_λ 是压缩算子; 反之, 如果有某个 $\lambda\in\rho(A)$, U_λ 是压缩算子, 那末 A 是亚正常算子.

(ii) 如果 A 是亚正常或次正常的算子, 那末对一切 $\lambda\in\rho(A)$, $\sigma(U_\lambda)$ 必落在单位圆周上.

(iii) 设 A 是亚正常或次正常的算子, 如果有 $\lambda\in\rho(A)$, U_λ 是正常的, 那末 A 必是正常算子.

证 (i) 是显然的.

(ii) 对于亚正常或次正常算子 A, 以及 $\lambda\in\rho(A)$, 显然

$$\|U_\lambda\|\leqslant 1,$$

所以 $\sigma(U_\lambda)$ 包含在闭单位圆内. 又由于 $\sigma(U_\lambda)$ 关于单位圆周对

称，所以 $\sigma(U_\lambda)$ 落在单位圆周上.

(iii) 如果 U_λ 是正常的，又由 (ii)，$\sigma(U_\lambda)$ 落在单位圆周上. 根据定理 3.10 的 (ii)的证明中所指出的，U_λ 是$(H,[\cdot,\cdot])$上酉算子，这时就有

$$(A-\lambda I)^{-1}(A-\lambda I)^* = U_\lambda^{-1} = U_\lambda^* \\ = (A-\lambda I)^*(A-\lambda I)^{-1},$$

即 $A-\lambda I$ 是正常的，从而A是正常的. 证毕.

利用上述推论，可以造一个算子 U，它不是酉算子，但能满足下列条件.

(i) $\|U\| = 1$.

(ii) $\sigma(U)$ 落在单位圆周上.

(iii) 令 $\mathscr{B}[0,2\pi]$ 是 $[0,2\pi]$ 上 Borel 集全体. 存在单位圆周上谱测度(不是直交投影，而是平行投影)

$$\{E(B)\,|\,B\in\mathscr{B}[0,2\pi]\},$$

使得对任何 $B\in\mathscr{B}[0,2\pi]$，

$$UE(B)H\subset E(B)H,\quad U^{-1}E(B)H\subset E(B)H.$$

例 3.1 任取 $(H,[\cdot,\cdot])$ 上非正常的亚正常算子 A，再取 $|\lambda|>\|A\|$，作 $U_\lambda = (A-\lambda I)^{*-1}(A-\lambda I)$. 由推论 3.11 知道 $\sigma(U_\lambda)$ 必落在单位圆周上，且 $\|U_\lambda\|\leqslant 1$，由此可知 $\|U_\lambda\| = 1$. 显然，U_λ 不会是 $(H,[\cdot,\cdot])$ 上酉算子(否则 A 将是正常的)，则根据定理 3.7，满足上述 (iii) 的谱测度 $\{E(B)\,|\,B\in\mathscr{B}[0,2\pi]\}$ 是存在的.

下面再举一例，说明 $U = A^{*-1}A$ 是正常的，然而 A 是非正常的.

例 3.2 设 A_1 是 Hilbert 空间 $(H,[\cdot,\cdot])$ 上有界线性算子，$0\in\rho(A_1)$. 取 λ 为 $|\lambda|\neq 0,1$ 的复数，作 $\widetilde{H} = H\oplus H$，以及 $\widetilde{H}$ 上算子

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda}A_1^* \\ A_1 & 0 \end{pmatrix},$$

易知

$$A^*A = \begin{pmatrix} A_1^*A_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{|\lambda|^2}A_1A_1^* \end{pmatrix},\ AA^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{|\lambda|^2}A_1^*A & 0 \\ 0 & A_1A_1^* \end{pmatrix},$$

$$A^{*-1}A = \begin{pmatrix} \lambda I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{\lambda}}I \end{pmatrix}.$$

显然，A 是 $\tilde{H}$ 上非正常算子，而 $A^{*-1}A$ 是 $\tilde{H}$ 上正常算子。

下面考察 A 的约化子空间问题。

定理 3.12 设 A 是 Hilbert 空间 $(H, [\cdot,\cdot])$ 上有界线性算子。

(i) 当 $0\in\rho(A)$，$U = A^{*-1}A$ 是某个非退化双线性空间 (H, v_0) 上酉算子时，如果存在 (H, v_0) 上投影算子 P，使得凡是与 U 可交换的算子都与 P 可交换[1]，那末 APH，A^*PH 必在 $(H, [\cdot,\cdot])$ 上直交于 $(I-P)H$。特别，当 $P = P^*$（即 P 也是 $(H, [\cdot,\cdot])$ 上投影算子）时，PH 约化 A。

(ii) 如果 $0\in\rho(ImA)$，P 是 $(H,[\cdot,\cdot])$ 上投影算子，那末 PH 约化 A 的充要条件是：a) P 是 (H, v) 上投影算子；b) $PU = UP$。

证 (i) 由假设 $v_0 = U^*v_0U$，并且

$$[v_0Px, (I-P)y] = 0,\ x, y\in H. \tag{3.17}$$

又由于 $A = A^*U$，所以 $u = U^*uU$，$v = U^*vU$（$A = u + iv$ 是直角分解），从(3.17)就得到

$$v_0^{-1}u = U^{-1}v_0^{-1}uU,\ v_0^{-1}v = U^{-1}v_0^{-1}vU, \tag{3.18}$$

即 $v_0^{-1}u$，$v_0^{-1}v$ 都与 U 可交换。从而对任何 $x, y\in H$，

$$[vPx, (I-P)y] = [v_0Pv_0^{-1}vx, (I-P)y] = 0,$$

---

1) 如果 (H, v_0) 是 Π_K 型空间，由第四章 Π_K 上酉算子的谱系的理论可知，这种投影算子很多。

$$[uPx,(I-P)y]=[v_0Pv_0^{-1}ux,(I-P)y]=0,$$

即 APH, A^*PH 都在 $(H,[\cdot,\cdot])$ 上直交于 $(I-P)H$. 特别，当 P 就是 $(H,[\cdot,\cdot])$ 上投影算子时，PH 约化 A.

(ii) 必要性 已知 $P^2=P$, 又 P 与 A, A^* 都可交换，所以 $Pv=vP$, 即 $P=v^{-1}Pv=v^{-1}P^*v=P^\dagger$, 从而 a) 是必要的，而 b) 的必要性是显然的.

充分性 因为 $P=P^*$, 由 a), $P=P^\dagger=v^{-1}P^*v$, 所以 P 与 v 可交换. 利用 b), 定理 3.5 以及 Cayley 变换便知，P 与

$$v^{-1}u=i(U+I)(U-I)^{-1}$$

可交换. 由此可以得到 $Pu=uP$, 从而 $PA=AP$, $PA^*=A^*P$. 证毕.

根据定理 3.7, 对任何 $|\lambda|>\|A\|$ 的 λ, U_λ 必是某个 Hilbert 空间 (H,v_λ) 上酉算子，记 (H,v_λ) 上投影算子全体为 $\mathscr{P}_{v_\lambda}$, 立即可得下列推论.

推论 3.13 设 A 是 Hilbert 空间 $(H,[\cdot,\cdot])$ 上有界线性算子，$\mathscr{P}_A$ 是 $(H,[\cdot,\cdot])$ 上相应于约化 A 的闭子空间的投影算子全体. 那末，对于 $|\lambda|>\|A\|$ 的 λ, 必有

$$\mathscr{P}_A=\{P|P^*=P,\ PU_\lambda=U_\lambda P,\ P\in\mathscr{P}_{v_\lambda}\}. \quad (3.19)$$

4. 算子方程 $A^{*-1}A=U$ 的解 在第 2, 3 两小节中是给定 A 后，研究 $U=A^{*-1}A$ 的性质以及 U 与 A 的关系. 现在要考察相反的问题，即对怎样的算子 U, 方程 $A^{*-1}A=U$ 是可解的；在可解的情况下，解 A 的一般形式是什么？

为了研究当 U 是 $(H,[\cdot,\cdot])$ 上正常算子或相似于某个正常算子时方程 $A^{*-1}A=U$ 的可解条件，以及可解时方程的通解的形式，显然得首先要考察方程 $A=U^*AU$ 的解. 为此，我们需要下列引理(它们的证明参见附录 B 中有关内容).

引理 3.14 设 N_1, N_2 分别是 Hilbert 空间 (H,v_1), (H,v_2) 上正常算子，$N_i=U_iR^i$ 是极分解，$\int H_\lambda^i d\mu$ 是 R^i 的积分分解，U_i 的积分表示为 $U^i(\cdot)$. 那末，$A=N_2AN_1$ 成立的充要条件是，

A 有表示 $A(\cdot)$，$A(r)$ 是 $H^1(r)$ 到 $H^2\left(\frac{1}{r}\right)$ 的有界线性算子，并且 $A(\cdot)$ 是有界算子值函数，对每个 r，

$$U^2\left(\frac{1}{r}\right)A(r)U^1(r)=A(r)$$

成立。

本引理就是附录 B 中定理 2．下列是引理 3.14 的直接推论．

推论 3.15 设 N_1，N_2 分别是 Hilbert 空间 (H, v_1)，(H, v_2) 上正常算子，(H, v_1) 到 (H, v_2) 的有界线性算子 A 满足

$$N_2AN_1=A$$

时，那末 A 必将 N_1 的与单位圆周所相应的谱子空间映照成 N_2 的与单位圆周所相应的谱子空间．

推论 3.16 设 N_1，N_2 分别是 Hilbert 空间 (H, v_1)，(H, v_2) 上正常算子，(H, v_1) 到 (H, v_2) 的有界线性算子 A 满足

$$N_2AN_1=A$$

时，必有 $N_2^\dagger AN_1^\dagger=A$ 成立．特别，当 $v_i=I$ 时，有 $A=N_2^*AN_1^*$．

推论 3.17 (**Fuglede-Putnam 定理**) N_1，N_2 假设如推论 3.16，如果推论 3.16 中 A 满足 $N_2A=AN_1$ 时，那末必有

$$N_2^\dagger A=AN_1^\dagger.$$

特别当 $v_i=I$ 时，有 $N_2^*A=AN_1^*$．

推论 3.16，3.17 即附录 B 中推论 3．

定理 3.17 设 U 是可分 Hilbert 空间 $(H, [\cdot,\cdot])$ 上正常算子，H_0，H_1，H_2 分别是 U 在单位圆周上、闭单位圆外、开单位圆内谱子空间，记 $U_i=U|_{H_i}(i=0, 1, 2)$．U 的谱分解写成

$$U=\int_{|\lambda|>1}\lambda dE_\lambda^1+\int_{|\lambda|>1}\frac{1}{\bar{\lambda}}dE_\lambda^2+\int_{|\lambda|=1}\lambda dE_\lambda^0,$$

那末方程 $A^{*-1}A=U$ 可解的充要条件是：

(i) $\sigma(U)=\dfrac{1}{\overline{\sigma(U)}}$，

(ii) U_1 与 $U_2^{*-1}=\int_{|\lambda|>1}\lambda dE_\lambda^2$ 酉等价．

当 U 满足 (i), (ii) 时,还成立

(iii) $H_1 \oplus H_2$ 必约化 $A^{*^{-1}}A = U$ 的任何解 A. 令 $\int_0^{2\pi} H_\theta d\mu^\theta$ 为 U_0 的积分分解,那末 A 在积分分解下是 $e^{i\frac{\theta}{2}}b_\theta$, 其中 b_θ 是具有有界逆的有界算子值函数,并且 $b_\theta^* = b_\theta$.

(iv) A 在 $H_1 \oplus H_2$ 上的一般形式是

$$A|_{H_1 \oplus H_2} = \begin{pmatrix} 0 & A_2 \\ A_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} H_1 \\ H_2 \end{matrix}, \quad A_2 = A_1^* U_2, \tag{3.20}$$

而 A_1 的一般形式是: 如果 $\int_{\rho>1} H_\rho^i d\rho (i = 1, 2)$ 分别是$(U_1^* U_1)^{\frac{1}{2}}$, $(U_2^* U_2)^{-\frac{1}{2}}$ 的积分分解, U_1, U_2 的表示分别为 ρU_ρ^1, $\frac{1}{\rho} U_\rho^2$ (U_ρ^i 是 H_ρ^i 上酉算子), 那末通解 $A_1 = V_1 S$, 其中 V_1 是任一实现 U_1, $U_2^{*^{-1}}$ 酉等价的酉算子,它必有积分分解 $V_{1(\cdot)}$, 这里 $V_{1\rho}$ 是 H_ρ^1 到 H_ρ^2 的酉算子, 而 S 在 H_1 中有积分分解 $S_{(\cdot)}$, $S_{(\cdot)}$ 是具有界逆的有界算子值函数,并且 $S_\rho U_\rho^1 = U_\rho^1 S_\rho$.

证 (i) 的必要性是显然的. 今证 (ii) 的必要性如下:

视 U 为 Hilbert 空间 $H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_0$ 上算子,显然

$$U = U_1 \oplus U_2 \oplus U_0, \quad U^* = U_1^* \oplus U_2^* \oplus U_0^*. \tag{3.21}$$

由于 U 是正常的, 所以存在 $H_i (i = 1, 2)$ 上可交换的两个谱系 $\{E_\rho^i | 1 + 0 \leqslant \rho < \infty\}$, $\{\tilde{E}_\theta^i | 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$, 使得

$$U_1 = \iint \rho e^{i\theta} dE_\rho^1 d\tilde{E}_\theta^1, \quad U_2 = \iint \rho e^{i\theta} dE_\rho^2 d\tilde{E}_\theta^2.$$

由于 $A = U^* A U$, 根据引理3.14, $H_1 \oplus H_2$ 必是 A 的约化子空间,并且

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_2 \\ A_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} H_1 \\ H_2 \end{matrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 0 & A_1^* \\ A_2^* & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} H_1 \\ H_2 \end{matrix}.$$

由于 A^{-1} 有界,易知 A_1^{-1}, A_2^{-1} 也有界,从而

$$A^{*^{-1}} A|_{H_1 \oplus H_2} = U|_{H_1 \oplus H_2}$$

就得到

$$A_2^{*^{-1}} A_1 = U_1, \quad A_1^{*^{-1}} A_2 = U_2, \tag{3.22}$$

然而 (3.22) 可解，等价于方程

$$A_1 = U_2^* A_1 U_1 \tag{3.23}$$

有具有有界逆的解 A_1. 事实上，如果 (3.23) 有具有有界逆的解 A_1, 取 $A_2^* = U_2^* A_1$, 那末 $\{A_1, A_2\}$ 便是(3.22)的解；反之，当(3.22)有解 $\{A_1, A_2\}$ 时，由于 $A_1^{*-1}A_2 = U_2$, 所以 $A_2^* = U_2^* A_1$, 代入 $A_2^{*-1}A_1 = U$ 后就得到 A_1 是 (3.23) 的解.

现在要找出 (3.23) 有具有有界逆解 A_1 的条件. 记 $A_1 = V_1 R$ 是极分解，V_1 是 H_1 到 H_2 的酉算子. 从 (3.23) 易知，$RU_1 = U_1 R$, 用极分解 $A_1 = V_1 R$ 代入(3.23)，利用 R^{-1} 有界，两边消去 R，得到

$$V_1 = U_2^* V_1 U_1, \quad 即 \quad U_2^{*-1} = V_1 U_1 V_1^{-1}, \tag{3.24}$$

这就是说，U_1, U_2 是酉等价. (ii) 的必要性证得.

反之，假定 (3.24) 成立，显然 (3.23) 就具有有界逆解 $V_1 R$, R 是 H_1 上任何与 U_1 可交换的具有有界逆的算子，从而 (3.22) 有解.

下面来求 (3.23) 具有有界逆的解 A_1 的一般形式.

记

$$V_\rho^1 = \int \rho dE_\rho^1, \quad V_\rho^2 = \int \frac{1}{\rho} dE_\rho^2, \quad V_\theta^j = \int e^{i\theta} d\tilde{E}_\theta^j (j = 1, 2).$$

在积分分解 $\int H_\rho^j d\mu (j = 1, 2)$ 下，V_ρ^1, V_ρ^2; V_θ^1, V_θ^2 分别有表示 ρ, $\frac{1}{\rho}$; U_ρ^1, U_ρ^2, 其中 U_ρ^j 是 H_ρ^j 上酉算子，即 $U_{(\cdot)}^j$ 是酉算子值函数.

设 V_1 是使 U_2^{*-1} 与 U_1 酉等价的任一酉算子，即 (3.24) 成立，根据引理 3.14, V_1 有表示 $V_{(\cdot)}$, $V_{(\cdot)}$ 是 $H_{(\cdot)}^1$ 到 $H_{(\cdot)}^2$ 的酉算子，则 V_1 便是(3.23)的一个具有有界逆的解.

如果 (3.23) 有另外的具有有界逆的解 A_1', 从 (3.23) 易知，

$$S = V_1^{-1} A_1'$$

必与 U_1 可交换. 因为 U_1 是正常的，根据引理 3.14 或Fuglede-Putnam 定理，S 必与 $U_1^* U_1$ 可交换. 因此，S 有积分表示 $S_{(\cdot)}$, 又因为 S 与 V_ρ^1 可交换，所以 $S_\rho U_\rho^1 = U_\rho^1 S_\rho$. 由于 S^{-1} 有界，从而 $S_{(\cdot)}$ 是具有

有界逆的有界算子值函数，所以A_1'的表示形式为 $V_{(\cdot)}S_{(\cdot)}$，这样就得到定理中的(iv)的形式.

现在求 $A^{*-1}A=U$ 在 H_0上解的一般形式. 记 $A_0=A|_{H_0}$，显然，$A_0^{*-1}A_0=U_0$，由于U_0是H_0上酉算子，所以对 A_0，U_0，(3.16)成立，即A_0与U_0可交换，从而A_0有表示$a_{(\cdot)}$，$a_{(\cdot)}$是具有有界逆的有界算子值函数，并且$a_\theta^{*-1}a_\theta=e^{i\theta}$. 令 $b_\theta=a_\theta e^{-\frac{i\theta}{2}}$，便得到 $b_\theta=b_\theta^*$，从而有定理中(iii)的形式. 证毕.

推论 3.19 在定理 3.18 假设和记号下，如果A是$A^{*-1}A=U$的一个解，那末

(i) A^2是正常算子.

(ii) $H_i(i=0,1,2)$ 是A^2的约化子空间，A^2在H_i上限制为 $(A^2)_i$，必有 $\sigma((A^2)_1)=\sigma((A^2)_2)=\sigma(V_\theta^1V_\rho^{-1}S^2)$.

(iii) $H_i(i=0,1,2)$是A^*A，AA^*的约化子空间，$(A^*A)_i$，$(AA^*)_i$ 分别是A^*A，AA^*在H_i上的限制，则必有

$$\sigma((A^*A)_1)=\sigma((AA^*)_2)=\sigma(S^2),$$
$$\sigma((A^*A)_2)=\sigma((AA^*)_1)=\sigma(S^2V_\rho^{1-2}),$$
$$\sigma((A^*A)_0)=\sigma((AA^*)_0)=\sigma(b^2),$$

其中算子b是由定理 3.18 中$b_{(\cdot)}$所定出的算子.

证 在 $H_1\oplus H_2$ 上，由(3.20)，(3.22)，(3.24)得到

$$A^2|_{H_1\oplus H_2}=\begin{pmatrix}U_1^{-1*}A_1^*A_1 & O\\ O & A_1U_1^{-1*}A_1^*\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}V_\theta^1(V_\rho^1)^{-1}S^2 & O\\ O & V_1V_\theta^1(V_\rho^1)^{-1}S^2V_1^{-1}\end{pmatrix},$$

$$A^*A|_{H_1\oplus H_2}=\begin{pmatrix}A_1^*A_1 & O\\ O & A_2^*A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S^2 & O\\ O & V_1S^2(V_\rho^1)^{-2}V_1^{-1}\end{pmatrix},$$

$$AA^*|_{H_1\oplus H_2}=\begin{pmatrix}A_2A_2^* & O\\ O & A_1A_1^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S^2(V_\rho^1)^{-2} & O\\ O & V_1S^2V_1^{-1}\end{pmatrix}.$$

由定理 3.18 的(iii)，得到

$$A^2|_{H_0}=U_0b^2,\quad A^*A|_{H_0}=AA^*|_{H_0}=b^2.$$

由此可知，推论中的 (i)，(ii)，(iii) 成立．证毕．

注 推论中的 (i) 曾被 M. D. Choi 得到，并且还被证明是充分的，即如果 A^2 是正常的，那末 $U = A^{*-1}A$ 也是正常的．这里也提供充分性的一个直接证明：由于 $A^2A = AA^2$，由 Fuglede-Putnam 定理立即有 $A^{*2}A = AA^{*2}$，由此可知 $A^*A = UA^{*2}$．再用 U 右乘两边得到 $A^*AU = UA^*A$，取共轭得到

$$A^*AU^* = U^*A^*A,$$

从而 $UA^{*2}U^* = U^*UA^{*2}$．现在，只要证明 $A^{*2}U^* = U^*A^{*2}$ 就可以了．事实上，因为 $A^{*2}A^{-1} = A^{-1}A^{*2}$，从而

$$U^*A^{*2} = A^*A^{-1}A^{*2} = A^{*2}A^*A^{-1} = A^{*2}U^*.$$

证毕．

下面考察 U 相似于正常算子的情况．先建立一个引理．

引理 3.20 Hilbert 空间 $(H, [\cdot, \cdot])$ 上有界线性算子 T 相似于正常算子 N 的充要条件是，T 必是某个 Hilbert 空间 (H, v) 上的正常算子．

证 必要性 因为存在具有有界逆的有界线性算子 A，使得 $T = A^{-1}NA$．今令 $A = U\rho$ 是极分解，$N' = U^*NU$，因为 U 是酉算子，所以 N' 也是正常算子，并且 $T = \rho^{-1}N'\rho$．取 $v = \rho^2$，易知 T 在 (H, v) 上的共轭算子 $T^\dagger = \rho^{-2}T^*\rho^2 = \rho^{-1}N'^*\rho$，并且 $T^\dagger T = \rho^{-1}N'^*N'\rho = TT^\dagger$，即 T 是 (H, v) 上正常算子．

充分性 因为 T 是 (H, v) 上正常算子，因而在 (H, v) 上，T 有谱分解

$$T = \int_{\sigma(T)} z dE_z (E^2(\cdot) = E(\cdot),\ E(\cdot) = v^{-1}E(\cdot)^*v).$$

令 $E'(\cdot) = v^{\frac{1}{2}}E(\cdot)v^{-\frac{1}{2}}$，易知 $E'(\cdot)^2 = E'(\cdot)$，

$$E'(\cdot)^* = v^{-\frac{1}{2}}E(\cdot)^*v^{\frac{1}{2}} = v^{\frac{1}{2}}E(\cdot)v^{-\frac{1}{2}} = E'(\cdot),$$

即 $E'(\cdot)$ 是 $(H, [\cdot, \cdot])$ 上投影算子，从而

$$T = v^{-\frac{1}{2}}\int_{\sigma(T)} z dE'_z v^{\frac{1}{2}},$$

而 $\int_{\sigma(T)} z dE'_z$ 是 $(H, [\cdot, \cdot])$ 上正常算子．证毕．

由此可知，假设U相似于某个正常算子就等价于假设U是某个 Hilbert 空间上正常算子．

定理 3.21 设U是 Hilbert 空间 (H, v) 上正常算子，那末方程 $A^{*-1}A=U$ 可解的充要条件是把 (H, v) 视为定理 3.18 中 $(H, [\cdot, \cdot])$ 时，算子U满足定理 3.18 的 (i)，(ii)．当可解时，方程 $A^{*-1}A=U$的解的一般形式是 $A=vA_0$，A_0是把 (H, v) 视为定理 3.18 中的 $(H, [\cdot, \cdot])$ 时由定理 3.18 所得的通解．

证 记 $v^{-1}A=A_0$，方程 $A^{*-1}A=U$ 等价于

$$A_0=v^{-1}A^*U=A^\dagger v^{-1}U,$$

因为 $v^{-1}=v^{-1}(v^{-1})^*v=(v^{-1})^\dagger$，所以方程 $A^{*-1}A=U$ 等价于 $A_0=(v^{-1}A)^\dagger U=A_0^\dagger U$．由此即得定理 3.21． 证毕．

推论 3.22 设U是 Hilbert 空间 (H, v) 上酉算子，那末方程 $A^{*-1}A=U$ 的通解是

$$A=vVU^{\frac{1}{2}},$$

其中V是任意一个与U可交换的 (H, v) 上具有有界逆的自共轭算子．

证 用 (H, v) 代替定理 3.18 中的 $(H, [\cdot, \cdot])$，而U在 (H, v) 上自动地满足定理 3.18 的可解条件 (i)，(ii)，并且相应的 (H_1, v)，(H_2, v) 都消失了．根据定理 3.18 和定理 3.21，

$$A_0\longleftrightarrow e^{\frac{i\theta}{2}}b_\theta,\quad U^{\frac{1}{2}}\longleftrightarrow e^{\frac{i\theta}{2}},\quad V\longleftrightarrow b_\theta,$$

但又由 $b_\theta^\dagger=b_\theta$ 知道，V是 (H, v) 上自共轭算子．

显然，任何与U可交换并且有有界逆的有界算子α所导出的方程 $A^{*-1}A=U$ 的解 $A'=\alpha^*vU^{\frac{1}{2}}\alpha$，正是通解 $A=vVU^{\frac{1}{2}}$ 中满足$V>0$（正性是按 (H, v)）的解的全体．

事实上，因为 $A=vVU^{\frac{1}{2}}$ 是通解，所以相应于A'的V必满足下列方程：对任何x，$y\in H$，

$$\begin{aligned}[v\alpha x, \alpha y]&=(\alpha^*v\alpha U^{\frac{1}{2}}U^{-\frac{1}{2}}x, y)\\&=[vVU^{\frac{1}{2}}U^{-\frac{1}{2}}x, y]=[vVx, y],\end{aligned}$$

所以V是 (H, v) 上正算子，并且 $V=\alpha^\dagger\alpha$．

反之，如果V是 (H, v) 上正算子，那末取 $\alpha = V^{\frac{1}{2}}$，即为所求。证毕。

例3.3 现在举例说明，不是每个算子A必有 $A^{*-1}A$ 相似于一个正常算子的性质。例如，当 $\dim H = 2$ 时，在就范直交系 e_1，e_2下取

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

于是

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A^{*-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U = A^{*-1}A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

因为 $\sigma(U) = \{-1\}$，如果U相似于正常算子N，那末$N = -I$，从而 $U = -I$。这显然是不对的。

对于给定的不相似于正常算子的U，有下列定理。

定理 3.23 设U是 Hilbert 空间 $(H, [\cdot, \cdot])$ 上有界线性算子。$0 \in \rho(U)$，并且 $\sigma(U)$ 为单连区域。这时，方程 $A^{*-1}A = U$ 可解的充要条件是存在完备的不定度规空间 (H, v)，使得U为 (H, v) 上酉算子。

当可解时，$A^{*-1}A = U$ 有一个特解 A_0：

$$A_0 = 2e^{i\frac{\pi+\theta}{2}}v[(U-I)^{-1}+I], \quad A_0^* = 2e^{i\frac{\pi-\theta}{2}}v(U-I)^{-1}. \tag{3.25}$$

如果有另一个解 A'，满足 $\mathrm{Im}A' = \mathrm{Im}A_0$，那末 $A' = A_0$。通解的一般形式是 $A = A_0V$，其中V是完备不定度规空间(H, v)上与U可交换的具有有界逆的有界自共轭算子。

证 必要性 根据假设，$\sigma(U)$ 包含在一个不包含原点的单连通区域之内，记此单连区域的境界为 γ，并在必要时可适当旋转角度 θ，使得 $1 \in \rho(U)$。如果A适合 $A^{*-1}A = U$，即

$$AU = U^{*-1}A \text{ (即 } U^*AU = A\text{)}, \tag{3.26}$$

则对任何 $\lambda \in \rho(U)$，有 $\lambda^{\frac{1}{2}}A(\lambda I - U)^{-1} = \lambda^{\frac{1}{2}}(\lambda I - U^{*-1})^{-1}A$。将此式两边都沿 γ 积分，得到 $AU^{\frac{1}{2}} = U^{*-\frac{1}{2}}A$，即

$$U^{*\frac{1}{2}}AU^{\frac{1}{2}} = A. \tag{3.27}$$

由此可得

$$(AU^{-\frac{1}{2}})^* = U^{*-\frac{1}{2}}A^*U^{-\frac{1}{2}}U^{\frac{1}{2}} = A^*U^{\frac{1}{2}} = A^*UU^{-\frac{1}{2}} = AU^{-\frac{1}{2}},$$

即 $v = AU^{-\frac{1}{2}}$ 是自共轭算子．显然，由 (3.26) 可得

$$U^*vU = v,$$

即条件是必要的．

充分性　先设 $1 \in \rho(U)$，作算子 A_0 和 A_0^* 为

$$A_0 = i2v[(U - I)^{-1} + I], \quad A_0^* = i2v(U - I)^{-1}. \tag{3.28}$$

下面先验证 $A_0^* = (A_0)^*$．因为 $v = U^*vU$，易知

$$(U - I)^*v + v(U - I) = -(U^* - I)v(U - I),$$

两边左除 $(U^* - I)$，右除 $(U - I)$ 就得到

$$v(U - I)^{-1} + (U - I)^{-1}v = v,$$

即

$$(A_0^*)^* = -2i(U - I)^{*-1}v = A_0,$$

从而 $A_0^* = (A_0)^*$．

显然，(3.28) 是方程 $A^{*-1}A = U$ 的一个解，并且 $\mathrm{Im}A_0 = v$．如果有另一解 A'，$\mathrm{Im}A' = v$，记 $\mathrm{Re}A' = u'$，由

$$A' = v(v^{-1}u + iI), \quad A^* = v(v^{-1}u' - iI)$$

以及 $A'^{*-1}A' = U$，立即知道 A'，A'^* 必是 (3.28) 的形式．

如果 V 是与 U 可交换的，并且是 (H, v) 上有有界逆的有界自共轭算子．即 $VU = UV$，$V = v^{-1}V^*v$，于是

$$A = A_0V = A_0^*UV = i2vV(U - I)^{-1}U = V^*A_0^*U = A^*U,$$

从而 $A = A_0V$ 是 $A^{*-1}A = U$ 的解．反之，如果 A 是

$$A^{*-1}A = U$$

的解，则必有 $U^*AU = A$．又因为 $U^*A_0U = A_0$，所以

$$A_0^{-1}A = V$$

必与 U 可交换．再从 $A = A_0V$ 是解，所以

$$V^*A_0^*U = A^*U = A = A_0V = A_0^*UV = A_0^*VU,$$

代入特解 A_0^* 的表达式 (3.28)，立即得到 $V^*v = vV$，所以

$$V = V^+.$$

一般地，由于 $0 \in \rho(U)$，且 $\rho(U)$ 为单连区域，总有实数 θ，使得 $e^{i\theta} \in \rho(U)$. 令 $U' = e^{-i\theta}U$，U' 便以 1 为正则点，而且是 (H, v) 上酉算子. 显然，方程 $A^{*-1}A = U'$ 可解，并且满足

$$\mathrm{Im}A = \mathrm{Im}A_0$$

的解是唯一的，通解的形式也如定理所述. 证毕.

由定理 3.23 的证明易知下列定理成立.

定理 3.24 设 (H, v) 是完备的不定度规空间，U 是 (H, v) 上酉算子. 那末，方程 $A^{*-1}A = U$ 具有有界逆的虚部的解的充要条件是 $1 \in \rho(U)$. 当 $1 \in \rho(U)$ 时，满足 $\mathrm{Im}A = v$ 的解是唯一的，它是 $A = 2iv[(U - I)^{-1} + I](A^* = 2iv(U - I)^{-1})$.

最后，我们举一个算子 A，相应的 $U = A^{*-1}A$ 的 $\rho(U)$ 不是单连的，而且 U 也不相似于正常算子.

例 3.4 设 $H = L^2[0, 2\pi] \oplus L^2[0, 2\pi]$，取

$$A = i\begin{pmatrix} O & S \\ -S & \frac{1}{2}S \end{pmatrix},$$

其中 S 是 $L^2[0, 2\pi]$ 上乘 $e^{i\frac{\theta}{2}}(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ 的算子，易知

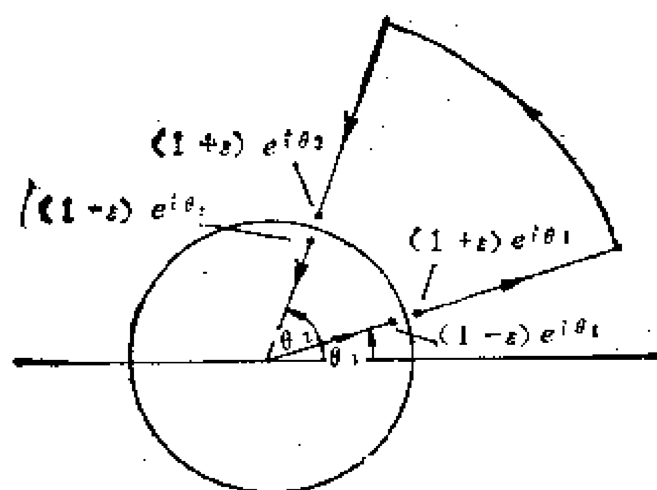
$$U = A^{*-1}A = \begin{pmatrix} S^2 & -S^2 \\ O & S^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & -e^{i\theta} \\ O & e^{i\theta} \end{pmatrix}.$$

显然，$\sigma(U)$ 正是单位圆周. 对任何 $|\lambda| \neq 1$，

$$(\lambda I - U)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda - e^{i\theta}} & \dfrac{e^{-i\theta}}{(\lambda - e^{i\theta})^2} \\ 0 & \dfrac{1}{\lambda - e^{i\theta}} \end{pmatrix}. \tag{3.29}$$

如果 U 相似于一个正常算子 N，即 $U = X^{-1}NX$，由于 $\sigma(U)$ 在单位圆周上，所以 N 是 H 上酉算子. 由于

$$(\lambda I - U)^{-1} = X^{-1}(\lambda I - N)^{-1}X \quad (|\lambda| \neq 1), \tag{3.30}$$



所以对任何如上图的围道γ进行积分，有

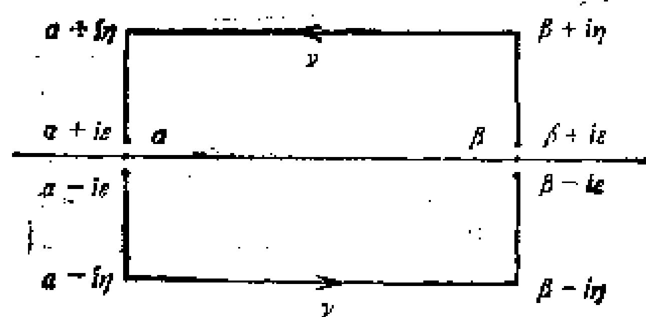
$$\oint_{\gamma} \frac{1}{\lambda I - U} d\lambda = X^{-1} \oint_{\gamma} \frac{1}{\lambda I - N} d\lambda X, \tag{3.31}$$

右边的强极限（当 $\varepsilon \to 0$ 时）存在，而且就是 $X^{-1}(E_{\theta_2} - E_{\theta_1})X$（$\{E_\theta | 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ 是N的谱系），即（3.31）右边是幂等的并且是关于θ_1, θ_2有界的算子函数．然而在用（3.29）计算（3.31）的左边的积分时，由于$\dfrac{1}{(\lambda - e^{i\theta})^2}$有较高的奇性，易知（3.31）左边强极限并不存在（实际上是无界算子），这是矛盾．所以，U决不相似于一个正常算子．

附 录 A

本附录将给出第三章§4的某些引理的证明，为此，先给出如下引理.

引理 1 设 A 是 Hilbert 空间 H 上自共轭算子，$\{E_\lambda^A\}$ 是相应于 A 的(右连续)谱系. 围道 γ 如下图所示，又设 $f(\lambda)$ 是除实轴外



都解析的(数值)函数. 如果存在常数 M，使得

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{1}{\lambda-\lambda'}f(\lambda)d\lambda\right|\leqslant M,\quad \lambda'\in(-\infty,\ \infty), \tag{1}$$

并且 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\dfrac{1}{2\pi i}\oint\dfrac{1}{\lambda-\lambda'}f(\lambda)d\lambda$ 在实轴上处处收敛于 $g(\lambda')$，那末

$$(\text{强})\ \lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\pi i}\oint(\lambda I-A)^{-1}f(\lambda)d\lambda=g(A). \tag{2}$$

证 由于 $(\lambda I-A)^{-1}f(\lambda)$ 在 γ 上解析(算子值解析函数)，所以对任何 $x,y\in H$,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint(\lambda I-A)^{-1}f(\lambda)d\lambda x=\frac{1}{2\pi i}\oint(\lambda I-A)^{-1}f(\lambda)xd\lambda, \tag{3}$$

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\oint(\lambda I-A)^{-1}f(\lambda)d\lambda x,y\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint((\lambda I-A)^{-1}f(\lambda)x,y)d\lambda. \tag{4}$$

由于函数

$$g_\varepsilon(\lambda')=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{1}{\lambda-\lambda'}f(\lambda)d\lambda$$

是 $(-\infty,\infty)$ 有界 Borel 可测函数，所以

$$g_\varepsilon(A)x=\int g_\varepsilon(\lambda')dE^A_{\lambda'}x=\frac{1}{2\pi i}\int\oint\frac{1}{\lambda-\lambda'}f(\lambda)d\lambda dE^A_{\lambda'}x, \tag{5}$$

$$(g_\varepsilon(A)x,y)=\frac{1}{2\pi i}\int\oint\frac{1}{\lambda-\lambda'}f(\lambda)d\lambda d(E^A_{\lambda'}x,y). \tag{6}$$

注意，(3)，(5) 中积分是强极限意义下的积分，

为证明 (2)，先证明下式成立

$$\frac{1}{2\pi i}\oint(\lambda I-A)^{-1}f(\lambda)d\lambda x=\frac{1}{2\pi i}\int\oint\frac{1}{\lambda-\lambda'}f(\lambda)d\lambda dE^A_{\lambda'}x. \tag{7}$$

事实上，对数值测度 $d\lambda d(E^A_{\lambda'}x,y)$ 用 Fubini 定理，就有

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2\pi i}\oint(\lambda I-A)^{-1}f(\lambda)d\lambda x,y\right)\\
&=\frac{1}{2\pi i}\oint((\lambda I-A)^{-1}f(\lambda)x,y)d\lambda\\
&=\frac{1}{2\pi i}\oint\int\frac{1}{\lambda-\lambda'}f(\lambda)d(E^A_{\lambda'}x,y)d\lambda\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int\oint\frac{1}{\lambda-\lambda'}f(\lambda)d\lambda d(E^A_{\lambda'}x,y)\\
&=\left(\frac{1}{2\pi i}\int\oint\frac{1}{\lambda-\lambda'}f(\lambda)d\lambda dE^A_{\lambda'}x,y\right).
\end{aligned}$$

显然，下列强极限存在，且

$$\begin{aligned}
(\text{强})\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\pi i}\int\oint\frac{1}{\lambda-\lambda'}f(\lambda)d\lambda dE^A_{\lambda'}x&=(\text{强})\lim_{\varepsilon\to0}\int g_\varepsilon(\lambda')dE^A_{\lambda'}x\\
&=g(A)x,
\end{aligned} \tag{8}$$

由 (7)，(8) 可知 (2) 成立．证毕．

利用引理 1，立即可得第三章 §4 的某些引理（下面引理编号采用原来编号）．

引理 4.10 设 A 是 Hilbert 空间 H 上自共轭算子，那末

$$(\text{强})\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint(\lambda I-A)^{-1}d\lambda$$

存在．如果 $\{E_\lambda^A\}$ 是 A 的(右连续)谱系，那末对任何 $x\in H$，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint(\lambda I-A)^{-1}d\lambda x=E_{(\alpha\beta)}^A x+\frac{1}{2}(E_\beta^A-E_{\beta-0}^A)x$$

$$+\frac{1}{2}(E_\alpha^A-E_{\alpha-0}^A)x,$$

证 在引理 1 中取 $f(\lambda)\equiv 1$，此时引理 1 中的 $g_\varepsilon(\lambda)$ 就是第三章 § 4 引理 4.9 中的 $F_\varepsilon(\lambda)$． 利用 (4.40)，(4.41) 以及本附录的引理 1，立即得到引理 4.10．证毕．

下面是引理 4.12 中有关空间 $(P,(\cdot,\cdot))$ 部分的结论(有关空间 $(N,-(\cdot,\cdot))$ 部分结论类似可证)．

引理 4.12 对任何 $p\in P$，下式对任何非负整数 k 成立．

$$(\text{强})\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint(\lambda I-A_p)^{-1}(\lambda_j-\lambda)^{-(k+1)}p\,d\lambda$$

$$=(\lambda_j I-A_p)^{-(k+1)}(E_{(\alpha,\beta)}^{A_p}-F(\lambda_j))p, \qquad (9)$$

其中 $\lambda_j\in(\alpha,\beta)$ 时，$F(\lambda_j)=I$；$\lambda_j\bar{\in}[\alpha,\beta]$ 时，$F(\lambda_j)=0$．

证 在本附录引理 1 中，取

$$A=A_p,\ f(\lambda)=(\lambda_j-\lambda)^{-(k+1)}.$$

令 $\hat{\gamma}$ 是由 γ 以及联接点对 $(\alpha+i\varepsilon,\ \alpha-i\varepsilon)$ 和点对 $(\beta-i\varepsilon,\ \beta+i\varepsilon)$ 的两直线段所构成的闭围道(取向和 γ 一致)． 由于

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\hat{\gamma}}(\lambda_j-\lambda)^{-(k'+2)}d\lambda=0,\ k'=0,1,2,\cdots, \qquad (10)$$

对 $\lambda_j\in(\alpha,\beta)$，或 $\lambda_j\bar{\in}[\alpha,\beta]$ 都成立．所以在 γ 上积分有下列估计

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint(\lambda_j-\lambda)^{-(k'+2)}d\lambda\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\hat{\gamma}-\gamma}(\lambda_j-\lambda)^{-(k'+2)}d\lambda\right|$$

$$\leqslant\varepsilon\delta, \qquad (11)$$

$$k'=0,1,2,\cdots,$$

其中 δ 是仅与 λ_j 到 γ 的距离有关的常数，由 (10) 和 (11) 可知，对

任何$p\in(E^{A_p}_{\lambda_j}-E^{A_p}_{\lambda_j-0})P$ 和非负整数 k，

$$(\text{强})\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint(\lambda I-A_p)^{-1}(\lambda_j-\lambda)^{-(k+1)}pd\lambda$$

$$=(\text{强})\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1}{2\pi i}\oint(\lambda_j-\lambda)^{-(k+2)}pd\lambda=0. \quad (12)$$

上式无论是 $\lambda_j\in(\alpha,\beta)$ 或 $\lambda\bar{\in}[\alpha,\beta]$ 都成立，这就是说，(9) 对 $p\in(E^{A_p}_{\lambda_j}-E^{A_p}_{\lambda_j-0})P$ 成立。

设 $p\in(I-(E^{A_p}_{\lambda_j}-E^{A_p}_{\lambda_j-0}))P$。对任何给定的$\delta_0>0$，由(11)可知必存在 $\varepsilon_0(\delta_0)$，当 $0<\varepsilon<\varepsilon_0(\delta_0)$ 时，

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint(\lambda_i-\lambda)^{-1}(\lambda_j-\lambda)^{-(k+1)}d\lambda\right|<\frac{\delta_0}{4},\ k=0,1,2,\cdots,$$

从而仅存在依赖于 δ_0，p 的 τ，当 $|\lambda'-\lambda_j|<\tau$ 时，只要

$$\varepsilon<\varepsilon_0(\delta_0),$$

就有

$$\left\|\int_{|\lambda'-\lambda_j|<\tau}\frac{1}{2\pi i}\oint(\lambda-\lambda')^{-1}(\lambda_j-\lambda)^{-(k+1)}d\lambda dE^{A_p}_{\lambda'}p\right\|<\frac{\delta_0}{2}. \quad (13)$$

显然，

$$(\lambda-\lambda')^{-1}(\lambda_j-\lambda)^{-(k+1)}=[(\lambda-\lambda')^{-1}$$
$$-(\lambda-\lambda_j)^{-1}](\lambda_j-\lambda')^{-(k+1)}$$
$$+\sum_{l=2}^{k+1}(\lambda_j-\lambda')^{-(k+2-l)}(\lambda_j-\lambda)^{-l}. \quad (14)$$

当 $|\lambda_j-\lambda'|\geqslant\tau$ 时，根据 (11)，必存在仅依赖于 τ 的常数 M_τ，

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint\sum_{l=2}^{k+1}(\lambda_j-\lambda')^{-(k+2-l)}(\lambda_j-\lambda)^{-l}d\lambda\right|\leqslant M_\tau\varepsilon. \quad (15)$$

由于

$$\frac{1}{2\pi i}\oint(\lambda-\lambda_j)^{-1}d\lambda=\begin{cases}1+g_{1\varepsilon}, & \lambda_j\in(\alpha,\beta)\\ 0+g_{2\varepsilon}, & \lambda_j\bar{\in}[\alpha,\beta]\end{cases} \quad (16)$$

$$|g_{1\varepsilon}|\leqslant M_1\varepsilon,\ |g_{2\varepsilon}|\leqslant M_2\varepsilon, \quad (17)$$

其中 M_1，M_2 是仅依赖于 λ_j 与 γ 的距离的常数。因而

$$\frac{1}{2\pi i}\oint[(\lambda-\lambda')^{-1}-(\lambda-\lambda_j)^{-1}]d\lambda$$

$$=\begin{cases}(F_\varepsilon(\lambda')-1)-g_{1\varepsilon}, & \lambda_j\in(\alpha,\beta)\\ F_\varepsilon(\lambda')-g_{2\varepsilon}, & \lambda_j\bar{\in}[\alpha,\beta]\end{cases} \tag{18}$$

对给定的 $p\in(I-(E_{\lambda_j}^{A_p}-E_{\lambda_j-0}^{A_p}))P$, 利用 (13), (18), 并注意到 (17) 以及 $F_\varepsilon(\lambda')$ 的定义 (见第三章 § 4 引理 4.9), 易知 (9) 成立. 证毕.

下面是引理 4.13 中有关 $(P,(\cdot,\cdot))$ 部分的结论.

引理 4.13 对任何 $p\in P$, 下式对一切非负整数 k,j 成立.

$$(\text{强})\lim_{\varepsilon\to 0}B_\varepsilon p=\begin{cases}\Big\{-(\lambda_l I-A_p)^{-(k+1)}\Big[\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{n!}\\ \qquad\times\frac{d^n}{d\lambda^n}(\lambda_m-\lambda)^{-(j+1)}\Big|_{\lambda=\lambda_l}(A_p-\lambda_m I)^n\Big]\\ \qquad\times(I-E_{(\alpha,\beta]}^{A_p})+R_p(\lambda_m,\ j+1;\lambda_l,\\ \qquad k+1)E_{(\alpha,\beta]}^{A_p}\Big\}p,\\ \qquad\qquad \text{当 } \lambda_l\in(\alpha,\beta),\ \lambda_m\bar{\in}[\alpha,\beta] \text{ 时}\\ (\lambda_l I-A_p)^{-(k+1)}(\lambda_m I-A_p)^{-(j+1)}\\ \quad\times(E_{(\alpha,\beta]}^{A_p}-F(\lambda_m,\lambda_l))p, \quad \text{其余情况}\end{cases} \tag{19}$$

其中, 当 $\lambda_l=\lambda_m$, 并且 $\lambda_l\in(\alpha,\beta)$ 时, $F(\lambda_m,\lambda_l)=I$; 当 λ_l, $\lambda_m\bar{\in}[\alpha,\beta]$ 时, $F(\lambda_m,\lambda_l)=0$.

证 下列等式是显然的,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint(\lambda_l-\lambda)^{-(k+1)}(\lambda_m-\lambda)^{-(j+1)}d\lambda$$

$$=\begin{cases}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}\frac{d^k}{d\lambda^k}(\lambda_m-\lambda)^{-(j+1)}\Big|_{\lambda=\lambda_l}+g_{3\varepsilon},\\ \qquad\qquad \text{当 } \lambda_l\in(\alpha,\beta),\ \lambda_m\bar{\in}[\alpha,\beta] \text{ 时}\\ 0+g_{4\varepsilon},\quad \text{当 } \lambda_l=\lambda_m, \text{ 且 } \lambda_l\in(\alpha,\beta) \text{ 或}\\ \qquad\qquad \lambda_l,\ \lambda_m\bar{\in}[\alpha,\beta] \text{ 时}\end{cases} \tag{20}$$

$$|g_{3\varepsilon}|<M_3\varepsilon,\quad |g_{4\varepsilon}|<M_4\varepsilon, \tag{21}$$

其中 M_3, M_4 是仅依赖于 λ_l, λ_m 到 γ 的距离的某两个常数.

下面将和证明引理 4.12 的方法相类似地来计算下列算子（见第三章 § 4 的 (4.49)) 的强极限

$$B_\varepsilon = \frac{1}{2\pi i}\oint (\lambda I - A_p)^{-1}(\lambda_l - \lambda)^{-(k+1)}(\lambda_m - \lambda)^{-(j+1)}d\lambda. \quad (22)$$

假设 $p \in (E_{\lambda_l}^{A_p} - E_{\lambda_l-0}^{A_p})P$. 这时，利用 A_p 的谱分解以及 (20), (21)，立即得到

$$(\text{强})\lim_{\varepsilon\to 0} B_\varepsilon p = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\dfrac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}}(\lambda_m - \lambda)^{-(j+1)}\Big|_{\lambda=\lambda_l} p, \\ \qquad \text{当 } \lambda_l \in (\alpha,\beta),\ \lambda_m \bar{\in} [\alpha,\beta] \text{ 时} \\ 0, \text{ 当 } \lambda_l = \lambda_m, \text{ 且 } \lambda_l \in (\alpha,\beta) \text{ 或 } \lambda_l, \lambda_m \bar{\in} [\alpha,\beta] \end{cases}$$

注意到 $R_p(\lambda_m, j+1; \lambda_l, k+1)$ 的定义(见第三章 § 4 的(4.50))，从上式立即可知,引理 4.13 对 $p \in (E_{\lambda_l}^{A_p} - E_{\lambda_l-0}^{A_p})P$ 成立.

设 $p \in (I - (E_{\lambda_l}^{A_p} - E_{\lambda_l-0}^{A_p}))P$. 这时仍采用引理 4.12 中分成 $|\lambda' - \lambda_l| < \tau$, $|\lambda' - \lambda_l| \geqslant \tau$ 两步过渡的办法得到：当

$\lambda_l \in (\alpha, \beta)$，且 $\lambda_m \bar{\in} [\alpha, \beta]$时，

$$\begin{aligned}(\text{强})\lim_{\varepsilon\to 0} B_\varepsilon p = \Big\{&-(\lambda_l I - A_p)^{-(k+1)}\Big[\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{n!} \\ &\times \frac{d^n}{d\lambda^n}(\lambda_m - \lambda)^{-(j+1)}\Big|_{\lambda=\lambda_l}(A_p - \lambda_l I)^n\Big] \\ &\times (I - E_{(\alpha,\beta]}^{A_p})p + R_p(\lambda_m, j+1; \lambda_l, \\ &k+1)E_{(\alpha,\beta]}^{A_p}p\Big\}.\end{aligned}$$

用类似的方法,也不难得到当 $\lambda_l = \lambda_m$，且 $\lambda_l \in (\alpha, \beta)$ 或 $\lambda_l, \lambda_m \bar{\in} [\alpha, \beta]$ 时，

$$\begin{aligned}(\text{强})\lim_{\varepsilon\to 0} B_\varepsilon p = (\lambda_l I - A_p)^{-(k+1)}(\lambda_m I \\ - A_p)^{-(j+1)}(E_{(\alpha,\beta]}^{A_p} - F(\lambda_m, \lambda_l))p.\end{aligned}$$

证毕.

引理 2 设 A 是 Π_K 空间上自共轭算子，$\sigma(A)\subset(-\infty,\infty)$. 对任何 $[\alpha,\beta]$，以及在柱 $\{\lambda | Re\lambda\in[\alpha,\beta]\}$ 的某个领域中解析的函数 $f(\lambda)$，下列强极限存在(围道 γ 如引理 1)

$$g(A)=(\text{强})\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint f(\lambda)(\lambda I-A)^{-1}d\lambda \tag{23}$$

并且

$$g(A)E_{(\alpha,\beta)}=E_{(\alpha,\beta)}g(A). \tag{24}$$

证 根据引理 4.7 的 (4.37) 式，(23) 式右边积分强极限的存在性，实质上化成 A 是 Hilbert 空间上自共轭算子的情况下类似形式的积分存在性. 而这可类似引理 4.9—4.12 来证明(从略).

令

$$g_\varepsilon(A)=\frac{1}{2\pi i}\oint f(\lambda)(\lambda I-A)^{-1}d\lambda, \tag{25}$$

由 (23)，得到

$$(\text{强})\lim_{\varepsilon\to 0}g_\varepsilon(A)=g(A).$$

又因为

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\oint f(\lambda)(\lambda I-A)^{-1}d\lambda\oint(\lambda' I-A)^{-1}d\lambda=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2$$
$$\times\oint(\lambda' I-A)^{-1}d\lambda'\oint f(\lambda)(\lambda I-A)^{-1}d\lambda, \tag{26}$$

对上式取强极限，就得到 (24). 证毕.

附　录　B

下面是熟知的 Putnam-Fuglede 定理.

定理 1　设X是 Hilbert 空间H上有界线性算子，N_1，N_2是H上两个正常算子. 如果 $N_1X = XN_2$，那末必有$N_1^*X = XN_2^*$.

有关讨论 $AX = XB$ 成立,何时导致 $A^*X = XB^*$成立以及相类似的问题,我们统称为 Putnam-Fuglede 型定理. 本附录中将本书中所需要用到的 Putnam-Fuglede 型定理加以证明.

设$(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$是概率测度空间,$\{H_p | p \in \Omega\}$是一族 Hilbert 空间. 定义在$\Omega$上取值于$H_p$上函数$x(\cdot) \in H(\cdot)$ 满足

$$\int_\Omega \|x(p)\|^2 d\mu(p) < \infty \tag{1}$$

的全体成为 Hilbert 空间，记为 $L^2(\Omega, \mathscr{B}, \mu; H_p)$，简记为$\int H_p d\mu$. $A(\cdot)$ 是定义在Ω上取值于$H(\cdot)$上有界线性算子,并且当

$$x(\cdot) \in \int H_p d\mu$$

时,

$$A(\cdot)x(\cdot) \in \int H_p d\mu,$$

称 $A(\cdot)$ 为$\int H_p d\mu$上算子值函数. 如果存在不依赖于 $p(\in \Omega)$ 的常数M，使得 $\|A(\cdot)\| \leqslant M$，称 $A(\cdot)$ 是有界的. 如果 $A(\cdot)$, $A(\cdot)^{-1}$ 都是有界的,称 $A(\cdot)$ 是具有有界逆的有界函数. 下面用的是Ω为复平面 $\mathbf{C}$, $\mathscr{B}$ 是 $\mathbf{C}$ 上 Borel 集类.

如果 $(\mathbf{C}, \mathscr{B}, E)$ 是可分 Hilbert 空间H上的平面谱测度空间,根据一般的算子代数分解理论,那末有如下对应关系

$$H \longleftrightarrow \int H_p d\mu, \quad x \longleftrightarrow x(\cdot), \tag{2}$$

$$\int f(\lambda)dE(\lambda)\longleftrightarrow f(\cdot)I(\cdot) \tag{3}$$

(这里 $f(\cdot)$ 是数值函数，$I(\cdot)$ 是 $H(\cdot)$ 上单位算子)．

$$A\in\{E(B)\,|\,B\in\mathscr{B}\}'\longleftrightarrow A(\cdot),\quad \|A(\cdot)\|\leqslant\|A\|, \tag{4}$$

$$A\in\{E(B)\,|\,B\in\mathscr{B}\}',\ A^{-1}\text{存在}\longleftrightarrow A^{-1}(\cdot)=A(\cdot)^{-1},$$
$$\|A^{-1}(\cdot)\|\leqslant\|A^{-1}\|, \tag{5}$$

$$A\in\{E(B)\,|\,B\in\mathscr{B}\}',\ A^*\longleftrightarrow A^*(\cdot)=A(\cdot)^*, \tag{6}$$

$$A,B\in\{E(B)\,|\,B\in\mathscr{B}\}',\ AB=BA\longleftrightarrow A(\cdot)B(\cdot)$$
$$=B(\cdot)A(\cdot). \tag{7}$$

注意 (4)—(7) 右边的“$\leqslant$”,“$=$”，严格地说是关于谱测度“几乎处处”成立．当空间 H 不是可分空间时，可用可局部化测度空间 $(\mathbf{C},\mathscr{B},\mu)$ 代替原来的概率测度空间，上述结论仍成立．这时，$H(\lambda)$ $(\lambda\in\mathbf{C})$ 仍是可分空间． 另外，如果 $(\mathbf{C},\mathscr{B},E^{(i)})$ $(i=1,2)$ 是两个谱测度空间，相应上述分解中的 $\mu^{(i)}(i=1,2)$，可以做到 $\mu_1=\mu_2$，否则用 $(\mu_1+\mu_2)/2$ 代替原来的每个 $\mu^{(i)}$，再适当改变 $H(\cdot)$ 上内积的适当的数量倍即可．

定理 2 设 $N_i(i=1,2)$ 分别是 Hilbert 空间 $(H_i,[\cdot,\cdot]_i)$ $(i=1,2)$ 上有界正常算子，$N_i=U_iR^i$ 是极分解，$\int H^i(\cdot)d\mu$ 是 R^i 的谱系所相应的积分分解，U_i 的表示是 $U^i(\cdot)$． 又设 X 是 $(H_1,[\cdot,\cdot]_1)$ 到 $(H_2,[\cdot,\cdot]_2)$ 的有界线性算子，那末 $X=N_2XN_1$ 成立的充要条件是 X 可以表示成 $X(\cdot)$，$X(r)$ 是 $H^1(r)$ 到 $H^2\left(\frac{1}{r}\right)$ 的算子，并且 $X(\cdot)$ 是有界的算子值函数，对每个 r，

$$U^2\left(\frac{1}{r}\right)X(r)U^1(r)=X(r).$$

证 设

$$R^i=\int_0^\infty rdE_r^i\ (i=1,2).$$

对任何 $\Delta=(r,\ \Delta r+r]$ $(r>1)$，相应的 H_1 的子空间 $(E^1_{r+\Delta r}-E^1_r)H_1$ 仍用同一记号 Δ 表示，并称为圆环域，而称 H_2 中

$\Delta' = (E^2_{1/r} - E^2_{1/(r+\Delta r)})H_2$ 为Δ的对偶圆环域。

下面分两步证明 $X\Delta \subset \Delta'$。

(1) 对任何

$$\Delta_I = (r_1 r_2], \quad r_1 > \frac{1}{r},$$

证明必有 $E^2_{\Delta_I} X E^1_{\Delta} = 0$。事实上，如果不对，必有 $y \neq 0$，使得 $E^2_{\Delta_I} X E^1_{\Delta} y \neq 0$。但根据假设，应有

$$X = N_2^n X N_1^n, \; n = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$E^2_{\Delta_I} X E^1_{\Delta} = E^2_{\Delta_I} N_2^n X N_1^n E^1_{\Delta}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

因为 N_1, N_2 分别限制在 Δ, Δ' 上是具有有界逆的. 所以，

$$E^2_{\Delta_I} X E^1_{\Delta} = E^2_{\Delta_I} N_2^n X N_1^n E^1_{\Delta}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \tag{8}$$

任取 a 满足

$$\frac{1}{r} < a < r_1,$$

则由 (8) 立即得到

$$0 \neq E^2_{\Delta_I} X E^2_{\Delta} y = \int_{\Delta_I} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n dE^2_\rho U_2^n X U_1^n \int_{\Delta} (a\rho)^n dE'_\rho y,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

当 $n \to -\infty$ 时，上式右边趋向 0，与右边 $\neq 0$ 相矛盾. 所以，

$$E^2_{\Delta_I} X E^1_{\Delta} = 0.$$

(2) 同样的方法可证，对任何 $\Delta_{II} = (r_1, r_2]$

$$0 < r_1 < r_2 < \frac{1}{r + \Delta r},$$

也必有 $E^2_{\Delta_{II}} X E^1_{\Delta} = 0$。

利用 (1), (2)，再用极限过渡的方法，不难证得 $X\Delta \subset \Delta'$。

同样，由于 $X^* = N_1^* X^* N_2^*$，类似可得 $X^*\Delta' \subset \Delta$。

和建立 $\{E(B) | B \in \mathscr{B}\}'$ 中算子 X 的积分分解表示一样，A 必有积分分解表示 $X(\cdot)$，而 $X(r)$ 是 $H^1(r)$ 到 $H^2\left(\frac{1}{r}\right)$ 的一致有界算子值函数，并且 $\|X(\cdot)\| \leqslant \|X\|$, $X^*(\cdot) = X(\cdot)^*$。

从而 $X = N_2 X N_1$ 的积分分解表示就是

$$X(\rho)=\frac{1}{\rho}U^2\left(\frac{1}{\rho}\right)X(\rho)U^1(\rho)\rho=U^2\left(\frac{1}{\rho}\right)X(\rho)U^1(\rho).$$

证毕.

推论3 设 $N_i(i=1, 2)$ 是 Hilbert 空间 $(H_i, [\cdot, \cdot]_i)$ $(i=1, 2)$ 上有界正常算子, X 是 $(H, [\cdot, \cdot]_1)$ 到 $(H_2, [\cdot, \cdot]_2)$ 的有界线性算子. 如果 $N_2XN_1=X$ 成立, 那末 $N_2^*XN_1^*=X$ 也成立; 如果 $XN_1=N_2X$ 成立, 那末 $XN_1^*=N_2^*X$ 也成立 (Putnam-Fuglede 定理).

证 如果 $N_2XN_1=X$ 成立, 那末由定理 2,

$$X(\rho)=U^2\left(\frac{1}{\rho}\right)X(\rho)U^1(\rho). \tag{9}$$

注意, $U^1(\rho)$, $U^2\left(\frac{1}{\rho}\right)$ 分别是 $H^1(\rho)$, $H^2\left(\frac{1}{\rho}\right)$ 上的酉算子, 因此由 (9), 有

$$X(\rho)=\left[U^2\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]^{-1}X(\rho)[U^1(\rho)]^{-1},$$

这就是说, $X=N_2^*XN_1^*$ 成立.

如果 $N_2X=XN_1$ 成立, 任取 λ, $|\lambda|>\|N_2\|_2+\|N_1\|_1$, 那末就有 $(N_2-\lambda I)X=X(N_1-\lambda I)$, 从而又有

$$(N_2-\lambda I)X(-N_1-\lambda I)^{-1}=X.$$

根据已证明的事实, $(N_2-\lambda I)^*X(N_1-\lambda I)^{-1*}=X$ 成立, 即

$$(N_2-\lambda I)^*X=X(N_1-\lambda I)^*$$

成立, 从而 $N_2^*X=XN_1^*$. 证毕.

定理4 设 A, B 分别是 Hilbert 空间 $(H_1, [\cdot, \cdot]_1)$, $(H_2, [\cdot, \cdot]_2)$ 上有界线性算子, X 是 $(H_2, [\cdot, \cdot]_2)$ 到 $(H_1, [\cdot, \cdot]_1)$ 的有界线性算子, $A=U\rho$, $B^*=V\rho'$, $X=W\rho_0$ 都是极分解, 那末 $AXB=X$, $A^*XB^*=X$ 同时成立的充要条件是满足

(i) $\overline{\mathscr{R}(X)}$, $\mathscr{N}(X)^\perp$ 分别约化 A, B 成为具有有界逆的算子.

(ii) W 是 $(N(X)^\perp, [\cdot, \cdot]_2)$ 到 $(\overline{\mathscr{R}(X)}, [\cdot, \cdot]_1)$ 的酉算子, 成立

$$W^*A|_{\overline{\mathscr{R}(X)}}W=(B|_{\mathscr{N}(X)^\perp})^{-1},$$

并且 ρ_0 与 B 可交换(条件(i),(ii)蕴含 $\rho X\rho'=X$, $UXV^*=X$).

证 必要性 (i) 如果 $x\in\mathscr{N}(X)$, 那末 $AXBx=Xx=0$. 但是,从 $A^*XB^*=X$, 有 $\mathscr{R}(X)\subset\mathscr{R}(A^*)\subset\mathscr{N}(A)^\perp$. 从而由 $AXBx=0$ 必可得到 $XBx=0$, 即 $B\mathscr{N}(X)\subset\mathscr{N}(X)$.

类似地用 A^*, B^* 代替 A, B, 得到 $B^*\mathscr{N}(X)\subset\mathscr{N}(X)$. 所以, $\mathscr{N}(X)$ 约化 B.

再用 $B^*X^*A^*=X^*$, $BX^*A=X^*$ 进行同样的讨论, 立即可知 $\overline{\mathscr{R}(X)}$ 必约化 A.

再证 A, B 分别在 $\overline{\mathscr{R}(X)}$, $\mathscr{N}(X)^\perp$ 上是有有界逆的. 事实上,从 $AXB=X$, $A^*XB^*=X$, 有 $\rho^2X\rho'^2=X$. 如果 $\rho'|_{\mathscr{N}(X)^\perp}$ 不是可逆的, 则对任何 $a>0$, $E'_a\mathscr{N}(X)^\perp\neq\{0\}$, 其中 $\{E'_\lambda\}$ 是 $\rho'|_{\mathscr{N}(X)^\perp}$ 的谱系,任取 $y\in E'_a\mathscr{N}(X)^\perp$, $y\neq0$, 就有

$$0\neq Xy=\rho^2X\rho'^2y=\rho^{2n}X\rho'^{2n}y,\quad n=1,2,\cdots. \tag{10}$$

特别, 当 a 满足 $a\|\rho\|_1<1$ 时, 若 $n\to\infty$, 则(10)的右边趋向 0, 这就与左边相矛盾. 所以, $\rho'|_{\mathscr{N}(\rho)}$ 是有有界逆的. 同样, 从 $AXB=X$, $A^*XB^*=X$, 又有 $U\rho^2U^*XV\rho'^2V^*=X$. 类似地又可得到 $V\rho'^2V^*$ 在 $\mathscr{N}(X)^\perp$ 是有有界逆的. 这样就知道 V 是 $\mathscr{N}(X)^\perp$ 上酉算子,并且 B 是有有界逆的算子.

类似还可得 A 是 $\overline{\mathscr{R}(X)}$ 上有有界逆的算子, U 是 $\overline{\mathscr{R}(X)}$ 上酉算子.

(ii) 下面我们不妨就在 $(\overline{\mathscr{R}(X)},[\cdot,\cdot]_1)$, $(\mathscr{N}(X)^\perp,[\cdot,\cdot]_2)$ 上考虑. 因为 ρ' 是有有界逆的,所以由 $\rho^2X\rho'^2=X$ 就得到 $\rho^2X=X\rho'^{-2}$, 从而 $\rho X=X\rho'^{-1}$.

根据 $\rho X=X\rho'^{-1}$, 又有 $W^*\rho W\rho_0=\rho_0\rho'^{-1}$. 令

$$\hat\rho=W^*\rho W,$$

那末从 $\hat\rho\rho_0=\rho_0\rho'^{-1}$, 又还有 $\rho_0\hat\rho=\rho'^{-1}\rho_0$. 因此

$$\rho'^{-1}\rho_0^2=\rho_0\hat\rho\rho_0=\rho_0^2\rho'^{-1},$$

即 ρ_0^2 与 ρ'^{-1} 可交换,从而 ρ_0 与 ρ'^{-1} 可交换,自然与 ρ' 可交换.

利用 ρ_0 与 ρ'^{-1} 可交换,从 $AXB=X$, $\rho X\rho'=X$, 立即可以

得到 $UXV^* = X$; 从 $A^*XB^* = X$, $\rho^{-1}X\rho'^{-1} = X$, 立即可以得到 $U^*XV = X$. 这样,我们就得到

$$X^*X = VX^*U^*UXV^* = VX^*XV^*,$$

即 ρ_0^2 与 V 可交换,从而 ρ_0 也与 V 可交换,因此,ρ_0 与 B 可交换.

利用 ρ_0 与 B 可交换,并且 $\overline{\mathscr{R}(\rho)} = \mathscr{N}(X)^\perp$, 立即可由

$$AXB = X$$

得到 $AWB = W$, 从而 $W^*A|_{\overline{\mathscr{R}(X)}}W = B^{-1}|_{\mathscr{N}(X)^\perp}$.

充分性 因为 $\overline{\mathscr{R}(X)}$, $\mathscr{N}(X)^\perp$ 分别约化 A, B, 所以在分解 $H_1 = \overline{\mathscr{R}(X)} \oplus \mathscr{R}(X)^\perp$, $H_2 = \mathscr{N}(X)^\perp \oplus \mathscr{N}(X)$ 下,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} X_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

显然,方程 $AXB = X$, $A^*XB^* = X$ 等价于方程

$$A_1X_1B_1 = X_1, \quad A_1^*X_1B_1^* = X_1, \tag{12}$$

利用 ρ_0 与 B 可交换,以及

$$W^*A_1W = B_1^{-1}, \quad W^*A_1^*W = B_1^{*-1},$$

立即可计算出等式 (12) 成立. 证毕.

定理 5 设 A, B 分别是 Hilbert 空间 $(H_1, [\cdot,\cdot]_1)$, $(H_2, [\cdot,\cdot]_2)$ 上有界线性算子, X 是 $(H_2, [\cdot,\cdot]_2)$ 到 $(H_1, [\cdot,\cdot]_1)$ 的有界线性算子. $A = U\rho$, $B = V\rho'$, $X = W\rho_0$ 都是极分解. 那末 $AX = XB$, $A^*X = XB^*$ 同时成立的充要条件是满足

(i) $\overline{\mathscr{R}(X)}$, $\mathscr{N}(X)^\perp$ 分别约化 A, B.

(ii) 若 W 是 $(\mathscr{N}(X)^\perp, [\cdot,\cdot]_2)$ 到 $(\overline{\mathscr{R}(X)}, [\cdot,\cdot]_1)$ 的酉算子,则成立

$$W^*A|_{\overline{\mathscr{R}(X)}}W = B|_{\mathscr{N}(X)^\perp},$$

并且 ρ_0 与 B 可交换(条件 (i) (ii) 蕴含 $\rho X = X\rho'$, $UX = XV$).

证 对于 $|\lambda| > \max(\|A\|_1, \|B\|_2)$, 由于

$$AX = XB, \quad A^*X = XB^*$$

同时成立等价于

$$(A + \lambda I)X(B + \lambda I)^{-1} = X, \quad (A + \lambda I)^*X(B + \lambda I)^{-1*} = X,$$

剩下的只要利用定理 4, 立即得到本定理.

从 $AX = XB$，$A^*X = XB^*$，立即可以得到

$$\rho^2 X = A^*AX = A^*XB = XB^*B = X\rho'^2,$$

从而 $\rho X = X\rho'$. 利用这个等式又得到 $X\mathcal{N}(\rho')\subset\mathcal{N}(\rho)$，并且

$$XV\rho' = XB = AX = U\rho X = UX\rho'. \tag{13}$$

再利用 $X\mathcal{N}(\rho')\subset\mathcal{N}(\rho)$，由 (13) 就得到 $XV = UX$. 证毕.

文献索引和注

第　一　章

由于本书的重点是不定度规空间上的算子理论，所以第一章实质上是讨论 Крейн 空间和 Понтрягин 空间的几何学．在 Bognár[1] 中对一般的(即非完备的)不定度规空间进行了系统而深入的讨论(可见该书的第一，三，四章)，通过这些讨论充分显示出不完备的不定度规空间的几何学远比完备的不定度规空间的几何学复杂，例如在不完备的不定度规空间，可能不存在由不定度规所确定的拓扑(内在拓扑)，自然就很难设想在不完备的不定度规空间中会出现在分析上有价值的算子理论．基于此，本书第一章就讨论对算子理论最感兴趣的完备的不定度规空间(重要特例是 Крейн 空间和 Понтрягин 空间)的几何学，相应于这部分的部分内容可见 Bognár 文献 [1] 中第五章．由于 Bognár 文献 [1] 是从讨论一般不定度规空间出发的，所以有关这种空间上拓扑方面的讨论是采用了拓扑线性空间的方法，而要想了解该书第五章内容，又必须很熟悉第一，三，四等章．而本书中讨论完备的不定度规空间上的几何学是完全采用另外的一条路线，即用线性算子来表示线性子空间，从而把完备的不定度规空间上的几何学问题化成线性算子的性质的研究问题，这不仅会使算子理论方面的学者感到极为方便，而且能使我们用较短的篇幅(本书第一章 §1—§3) 就得到 Bognár 文献 [1] 中要到第五章方能获得的某些基本结果．当然，"用算子描述线性子空间"不是作者的首创，相反是受到了用压缩算子描述极大半负子空间，从而将算子的极大半负不变子空间存在性化成算子方程是否有压缩算子解的问题 (Bognár[1] 第八章)这一事实的启发的结果． 作者所做的仅仅是将空间的几何学问题与相应的算子性质联系起来，这样做取得了效果，并且作者曾在别的地方(例如见严绍宗[16]，[20]) 应用这一想法也取得收获．此外，完备子空间概念是由作者提出并加以讨论的．

对于 §4 中的完备的不定度规空间，正则分解 (Bognár 文献 [1] 中称为基本分解) 是人们最易于想到的一种极重要的分解． 然而，从算子谱论，特别是从完备的不定度规空间上的酉、自共轭算子的谱论来看，"标准

分解"是另一个极重要的分解，它是由作者提出的，§4 的全部结果是属于作者的.

关于§5中的Π_K空间结构方面的结果早在50年代初业已获得(见 Bognár 的文献 [1]，Iohvidov, Krein 和 Langer 文献[1])，但所用的方法太依赖于半负子空间维数不超过$K<\infty$这个事实，而相应的结果不便于推广到一般的完备的不定度规空间. 在本书中，§5 的全部内容成了§1—§4 的明显推论.

第 二 章

本章讨论了稠定闭、对称、自共轭、保距和酉算子等的基本性质，其中有些内容是已有的(例如有关共轭算子的性质(引理 1.4)，根子空间性质(定理 1.6)等)，有些内容在较强条件下曾为别的作者得到过 (例如有关保距算子的连续性，对称算子和保距算子的 Cayley 变换等)，这些可参见 Bognár 文献[1]，Iohvidov, Крейн 和 Langer 文献[1]的有关章节. 此外，用不同于本书§3 的条件研究保距算子扩张问题及有关性质的，还有 Putnam[1]，Azuzob[1]，Шмульян[1] 和 Райх[1] 等. 本章§1 定理 1.9 及例 1.3 曾为舒五昌[2]得到，而§1—§3 其余的基本结果都是属于作者的.

本章§4 内容是 Riesz 方法在不定度规空间上的应用.

第 三 章

§1 中的引理 1.2 和引理 1.4 是作者得到的，基本定理 1.5 及定理 1.7—定理 1.8 早在 50 年代就获得了(参见 Bognár[1]).基本定理 1.18—定理 1.19 在 60 年代为舒五昌[1]和 Наймарк (Naĭmark)[1] 几乎同时获得，而定理 1.18 的推广形式，即定理 1.17 是作者给出的.

§2—§3 的全部结果是由作者给出的.

§4—§5对于Π_K空间上有界自共轭算子的谱系和临界点概念最初是由 Крейн 和 Лангер (英译名分别为 Krein 和 Langer) 提出的，发表在 ДАН. СССР., 152 (1963)，但未给出证明，1965 年，舒五昌用谱算子的方法证明了Π_K空间上谱系的存在性的证明(未发表)，再后 Langer 对于Π空间上自共轭算子在适当条件下给出谱系存在性的证明(它是Π_K空间相应结论的真正推广，有关这个定理的叙述可见 Bognár 文献[1]的第八章§6). "临界点"的出现反映了不定度规空间上自共轭算子和 Hilbert 空间上自共轭算子谱论的本质区别，但谱算子方法只能提供谱系的存在性证明，不能给出谱系的明

确表达式，因而不能对“临界点”精确刻画，这就妨碍了进一步的研究。§4—§5就是在§2所给出的模型基础上给出谱系的解析表达式，通过解析表达式清楚地看到 Krein 和 Langer 原来引入的“临界点”可分为两类，一类是谱系在这一点并没有奇性，另一类谱系是在这一点有奇性，所以在本书中将后者称为临界点，而两种情况统称为广义临界点（即 Krein 和 Langer 的临界点）。§5中不仅完全地刻画了临界点的结构，而且给出了自共轭算子的谱映射理论，谱映射的函数类本质上已达到 Borel 可测（除奇性临界点近旁必不可少地要加适当的光滑条件外）函数类。

§6全部是作者及合作者童裕孙博士的工作。有关不定度规空间上算子代数的讨论，可参见 Bognár 文献[1]中所引的有关著作。从现有情况来看，不定度规空间上算子代数的研究尚属开始阶段。

第　四　章

本章§1—§3全部结果是作者的，§4取自李绍宽文献[1]。

Π 空间上耗散算子的研究可见 Bognár 文献[1]中有关著作，还可见童裕孙[3]，Crandell 和 Phillips[1] 等人的著作。

Π 空间上扰动理论的研究可见 Jonas[2],[3]，Jonas 和 Langer[1]，Langer 和 Najman[1] 以及童裕孙[7]等人的著作。

Π 空间上算子的扩张或膨胀的研究可见 Bognár[1] 还可见童裕孙[1]，Davis[1],[2]，Азизов[1]，Никонов 和 Уткин[1]，Райх[1] 以及 Шмульян[1] 等人的著作。

第　五　章

本章中除个别结果属于童裕孙外，其余全部是作者的。

有关不定度规空间理论在场论方面的应用的文章是很多的，可参看 Bognár[1] 中有关文献以及本书中的参考文献部分，这里不拟一一例举。

不定度规空间理论在表示论中的应用主要有在群表示和条件正定泛函（或条件正定广义函数）表示两方面的应用。除本书讨论的内容外，可见 Iohvidov, Krein, Langer[1] 以及 Bognár[1] 的有关著作。

不定度规空间理论在控制论方面的应用可见伍镜波文献[1]，[2]，[3]。

附　　录

有关 Putnam-Fuglede 型定理的讨论很多，这里仅按本书中需要的内容作一介绍，它摘自严绍宗、李绍宽文献 [1]，[2]。

参 考 文 献*

马吉溥

[1] 关于线性算子的一种谱理论和解析演算与不变子空间的一点讨论，南京大学数学专刊，1980.

[2] 一个极谱映射定理，南京大学数学专刊，1980.

[3] 一类解析和解析 J-自伴算子环，数学年刊，**3**(1982).

[4] 一类可析算子，南京大学学报(自然科学)，**3**(1983).

[5] 伪移位算子与不变子空间，数学年刊，**5**A (1984)，341—346.

伍镜波

[1] 拟正定算子值函数与拟完全单调算子值函数，数学年刊，**2**(1981)，339—357.

[2] 无限维实现问题，数学年刊，**4**A (1983)，217—224.

[3] 算子值函数的拟正定性与正常对称系统，数学年刊，**5**A (1984)，389—398.

[4] J-次正常算子的不变子空间，数学年刊，**5**A (1984)，729—732.

严绍宗

[1] 关于压缩算子半群的酉扩张，复旦学报，**16**(1977)，38—49.

[2] 关于 Π_K 空间上酉算子，复旦学报，**18**(1979)，22—31.

[3] 关于 Π_K 空间上自共轭算子，复旦学报，**19**(1980)，171—180.

[4] 算子的酉扩张，科学通报，**25**(1980)，289—291.

[5] 关于算子的酉扩张，复旦学报，**19**(1980)，267—276.

[6] 关于 Π_K 上压缩算子，复旦学报，**19**(1980)，441—451.

[7] 关于极·积算子，数学年刊，**1**(1980)，485—500.

[8] 不定度规空间上酉算子和自共轭算子，中国科学，**4**A (1981)，405—414; *Sci. Sinica*, **24**A(1981)，1615—1625.

[9] Π_K 上自共轭算子开根，数学年刊，**3**(1982)，19—29.

[10] Π 空间的结构 (I)，*Chin. Ann. of Math.*, **5**B(1984)，91—100.

[11] Π 空间的结构 (II)，*Chin. Ann. of Math.*, **5**B (1984)，265—275.

[12] Π 空间上的酉算子(I)，复旦学报，**20**(1981)，424—432.

[13] Π 空间上的酉算子 (II)，数学年刊，**4**A (1983)，207—216.

[14] Π 空间上的酉算子 (III)，数学学报，**25**(1982)，610—616.

[15] Π 空间上的算子，数学学报，**27**(1984)，749—759.

[16] 不定度规空间上某些问题(待发表).

[17] Π 空间上酉算子 (IV)(待发表).

* 本世纪七十年代以前有关不定度规空间理论方面的大量文献在 J. Bognár 的专著[1]中已有相当完整的记载；这里不拟重复，仅就与本书内容关系特别密切的文章列出.

[18] Π 空间上压缩算子，*Chin. Ann. of Math.*, **7B** (1986), 75—89.
[19] 公共的极大半负不变子空间，东北数学，**1**(1985)，121—125.
[20] θ 类算子，中国科学，**8A**(1984)，677—684; *Sci. Sinica*, **28A**(1985)，337—346.

严绍宗，李绍宽

[1] 关于非正常算子的 Putnam-Fuglede 定理，*Chin. Ann. of Math.*, 4B(1983); *Kexue Tongbao Special Issue* (1983)，98—99.
[2] 关于算子方程 $AXB = X$，数学学报，**26**(1983)，597—603.
[3] 关于 Putnam-Fuglede 定理，中国科学 **9A** (1984)，775—783; *Sci. Sinica*, **28** A(1985)，459—468.
[4] 关于 Putnam-Fuglede 型定理，科学通报.

严绍宗，童裕孙

[1] Π_K 上无界自共轭算子，*Chin. Ann. of Math.*, **2**(1981)，157—180.
[2] 关于不定度规的约化，中国科学，**11A** (1984)，986—996; *Sci. Sinica*, **29** (1986)，241—253.

李绍宽

[1] 不定度规空间上的半亚正常算子，复旦学报，**22**(1983)，95—98.

张荫南

[1] 条件正定泛函的对称表示，复旦学报，**20**(1981)，61—66.

陈晓漫

[1] Π_K 空间上正常算子的谱分割(待发表).

陈晓漫，黄超城

[1] Normal Operators on Π_K Space, *Northeastern Math. J. China*, **1**(1985)，247—252.

夏道行，Гельфанд. И. М.

[1] 关于正定广义函数，*УМН. СССР.*, **15**(1958).
[2] 代数上的正定泛函，*ДАН. СССР*, **121**(1958)，223—235.

夏道行，吴卓人，张文泉

[1] 多变数的条件正定广义函数，复旦大学数学论文集 (1959)，437—448.
[2] 不定度规空间上算子半群和条件正定广义函数，上海科学论文集 (1960)，I，28—54.

夏道行

[1] 关于条件正定广义函数，*Sci. Sinica*, **11**(1962)，1147—1168.
[2] 与不定度规有关的散射问题，数学学报，**17**(1974)，60—75.
[3] 关于带不定度规或带中间系统的散射问题，数学学报，**19**(1976)，39—51，129—143.

黄超城

[1] Π_K空间上正常算子的局部谱(待发表).

舒五昌

[1] 不定尺度空间 Π_K 上一族可交换自共轭算子的公共不变子空间，复旦学报，**8** (1963)，231—238.
[2] 不定尺度空间 Π_K 上自共轭算子的某些性质，复旦学报，**10**(1965)，201—207.

童裕孙

[1] 关于最小 J-酉扩张,复旦学报,**19**(1980), 181—188.

[2] 不定度规空间上的耗散算子,复旦学报,**20**(1981),233—237.

[3] 条件正定泛函的三个定理,复旦学报,**21**(1982), 94—101.

[4] 不定度规空间的张量积及其上的线性算子,复旦学报,**21**(1982), 341—350.

[5] Π_K 上自共轭算子的二次交换子及广义谱分解,复旦学报,**21**(1982), 433—438.

[6] 不定度规空间上的K拟三角算子,数学年刊,**5A** (1984), 551—558.

[7] 不定度规空间上可定化算子的扰动(待发表).

[8] 不定度规空间上算子的约化(待发表).

Akopjan, R. U.

[1] On the theory of the spectral function of a J-non-negative operator, *Uzb. Akad. Hayk. SSSR. Mat.*, **13**(1978), 114—121.

Ando, T.

[1] Theory of operators in spaces with indefinite metric, Seminar Note (in Japanese), Hokkaido Univ. 1968.

[2] Linear operator on Krein spaces, Lecture, Hokkaido Univ., 1979.

Arons, M. E., Han, M. Y., Sudarshan, E. C. G.

[1] Finite quantum electrodynamics: a field theory using an indefinite metric, *Phys. Rev.* (2), **137**(1965), B1085—1104.

Bognár, J.

[1] Indefinite inner product spaces, Springer-Verlag, New York, 1974.

Crandall, M. G., Phillips, R. S.

[1] On the extension problem for dissipative operators, *J. Functional Analysis*, **2** (1968), 147—176.

Davis, Ch.

[1] J-unitary dilation of a general operator, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **31**(1970), 75—86.

[2] Dilation of uniformly continous semi-groups, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **15**(1970), 975—983.

Davis, Ch., Foias, C.

[1] Operators with bounded characteristic function and their J-unitary dilation, *Acta Sci. Math.* (Szeged), **32**(1971), 127—139.

Dirac, P. A. M.

[1] The physical interpretation of quantum mechanics, *Proc. Roy. Soc. London*, **180** A(1942), 1—40.

Douglas, R. G.

[1] Banach algebra techniques in operator theory, Acad. Press., New York, 1972.

Dunford, N., Schwartz, J. T.

[1] Linear operators, I, II, Wiley-Intersci., 1971.

Fan, Ky (樊畿)

[1] Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, U. S. A., **38**(1952), 121—126.

[2] Invariant subspaces of certain linear operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69** (1963), 773—777.

[3] Invariant cross-sections and invariant linear operators, *Isral J. Math.*, **2**(1964), 19—26.

[4] Invariant subspaces for a semigroup of linear operators, *Indag. Math.*, **27**(1965), 447—451.

Foiaç, C., Sz-Nagy, B.

[1] Harmonic analysis of operators on Hilbert space, Budapest-Amsterdam, 1970.

Fuglede, B.

[1] A commutativity theorem for normal operators, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **36**(1950), 35—40.

Halmos, P. R.

[1] A Hilbert space problem book, Van Nostrand, Princeton, 1967.

[2] Normal dilation and extensions of operators, *Summa Brasiliensis Math.*, **2**(1950), 125—134.

Helton, J. W.

[1] Unitary operators on a space with an indefinite inner product, *J. Functional Analysis*, **6**(1970), 412—440.

[2] Operators unitary in an indefinite metric and fractional transformations, *Acta Sci. Math.* (Szeged), **32**(1971), 261—266.

Hille, E., Phillips, R. S.

[1] Functional analysis and semi-group, 1957.

Hoffman, K.

[1] Banach spaces of analytic functions, prentice-Hall Inc., 1962.

Iohvidov, I. S., Krein, M. G., Langer, H.

[1] Intruduction to the spectral theory of operators in space with an indefinite metric, *Mathematical Research*, V. 9, Akademine-Verlag, Berlin, 1982.

Ito, K. R.

[1] Canonical linear transformation on Fock space with an indefinite metric, *Publ. RIMS.*, Kyoto univ., **14**(1978), 503—556.

Jonas, P.

[1] Zur Existenz von Eigenspektralfunktionen für J-positive Operatoren, I, II, *Math. Nachr.*, **82**(1978), 241—254; **83**(1978), 197—207.

[2] Compact perturbation of definitizable operators, *J. Operator Theory*, **2**(1979), 63—77.

[3] Compact perturbation of definitizable operators II, *J. Operator Theory*, **8**(1982), 3—18.

Jonas, P., Langer, H.

[1] Some questions in the perturbation theory of J-nonnegative operators in Krein spaces, *Math. Nachr*, **114**(1983), 205—226.

Kako, T.

[1] Spectral and scattering theory for the J-self-adjoint Operators associated with the perturbed Klein-Gordan type equations, *J. Facully of Sci. Univ. of Tokyo*, Section IA., **23**(1976), 199—221.

Krein, M. G., Langer, H.

[1] Über einige Forlselzungsprobleme, die eng mit der Theorie hermitescher Op-

eratoren im Raume Π_K zusammenhängen, I, II, *Math. Nachr.*, **77**(1977), 187—236; *J. Functional Analysis*, **30**(1978), 390—447.

Langer, H.

[1] Über eine klasse polynomialer scharen selberadjunglerter Operatoren im Hilbertraum, *J. Functional Analysis*, **12**(1973), 13—29

[2] Über eine klasse polynomialer scharen selboadjunglerter Operatoren im Hilbertraum II, *J. Functional Analysis*, **16**(1974), 221—234.

[3] Factorization of operator pencils, *Acta Sci. Math.*, **38**(1976), 83—96.

[4] Spectral functions of definitizable, *Lecture Notes in Math.*, **948**(1982), 1—47.

Langer, H., Najman, B.

[1] Perturbation theory for definitizable in Krein space, *J. Operator Theory*, **9**(1983), 297—317.

Lee, T. D., Wick, G. C.

[1] Negative metric and the unitarity of the *S*-matrix, *Nucl. Phys. B.*, **9**(1969), 209—243.

[2] Unitary in the *N θθ'* sector of soluble model with indefinite metric, *Nucl. Phys. B.*, **10**(1969), 1—10.

[3] Finite theory of quantum electrodynamics, *Phys. Rev. D.*, **2**(1970), 1033—1048.

Naǐmark, M. A.

[1] On commuting unitary operators in spaces with indefinite metric, *Acta Sci. Math.* (Szeged), **24**(1963), 177—189.

Ôta, S.

[1] Certain operator algebras induced by *derivations in C^*-algebras on an indefinite product space, *J. Functional Analysis*, **30**(1978), 238—244.

[2] A certain operator algebras in an indefinite inner product space, Memoirs, Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A(1975).

Putnam, C. R.

[1] Dissipative *J*-self-adjoint operators and associated *J*-isometries, *Acta Sci. Math.*, **37**(1975), 109—113.

Sorjonen, P.

[1] On linear relations in an infinite inner product space, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.* I. *Math.*, 4(1978—1979), 169—192.

Азизов, Т. Я.

[1] К теории расширений *J*-изометрических и *J*-симметрических операторов, *Фунц. анализ*, **18**(1984), 57—58.

Бродский, М. С., Лившиц, М. С.

[1] Спектральный анализ Несамосопряженных операторов и промежуточные системы, *УМН. СССР.*, **13** (1958), 3—85.

Гохберг, И. Ц., Крейн, М. Р.

[1] Выдение в теорию линейных несамосопряженных операторов, Из. «Наука».

Лившиц, М. С.

[1] О метрице рассеяния промежуточный системы, *ДАН. СССР.*, **111** (1956), 67—70.

[2] О промежуточной системе образующейся при рассеянии элементарных частиц, *ДАН. СССР.*, **111**(1956), 799—802.

Никонов, А. А., Уткин, В. И.

[1] Расширение Диссипативных операторов в шльбертовом пространстве с индефинитной жетрикой, *Мате Заметки*, **17**(1975), 909—918.

Райх, Л. М.

[1] О расширении J-Эрмитова оператора с неплотной областью определения, *Мате. Заметки*, **17** (1975), 737—743,

Шмульян, Ю. Л.

[1] Теория расширения операторов и пространства С индефинитной Метрикой, Из. АН. СССР., **38**(1974), 896—908.

Хацкевич, В. А.

[1] О плюс-операторах в шльбертовом, $\mathcal{F}$-пространстве, *Мате. Исслед. Кишинев*, IX, **2**(32)(1974), 182—202.

[2] О J-полуунитарных опораторах в шльбертовом J-пространстве, *Мате. Заметки*, **17**(1975), 639—647.